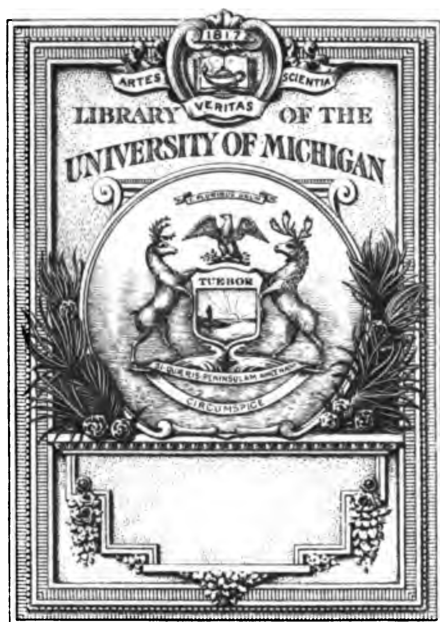
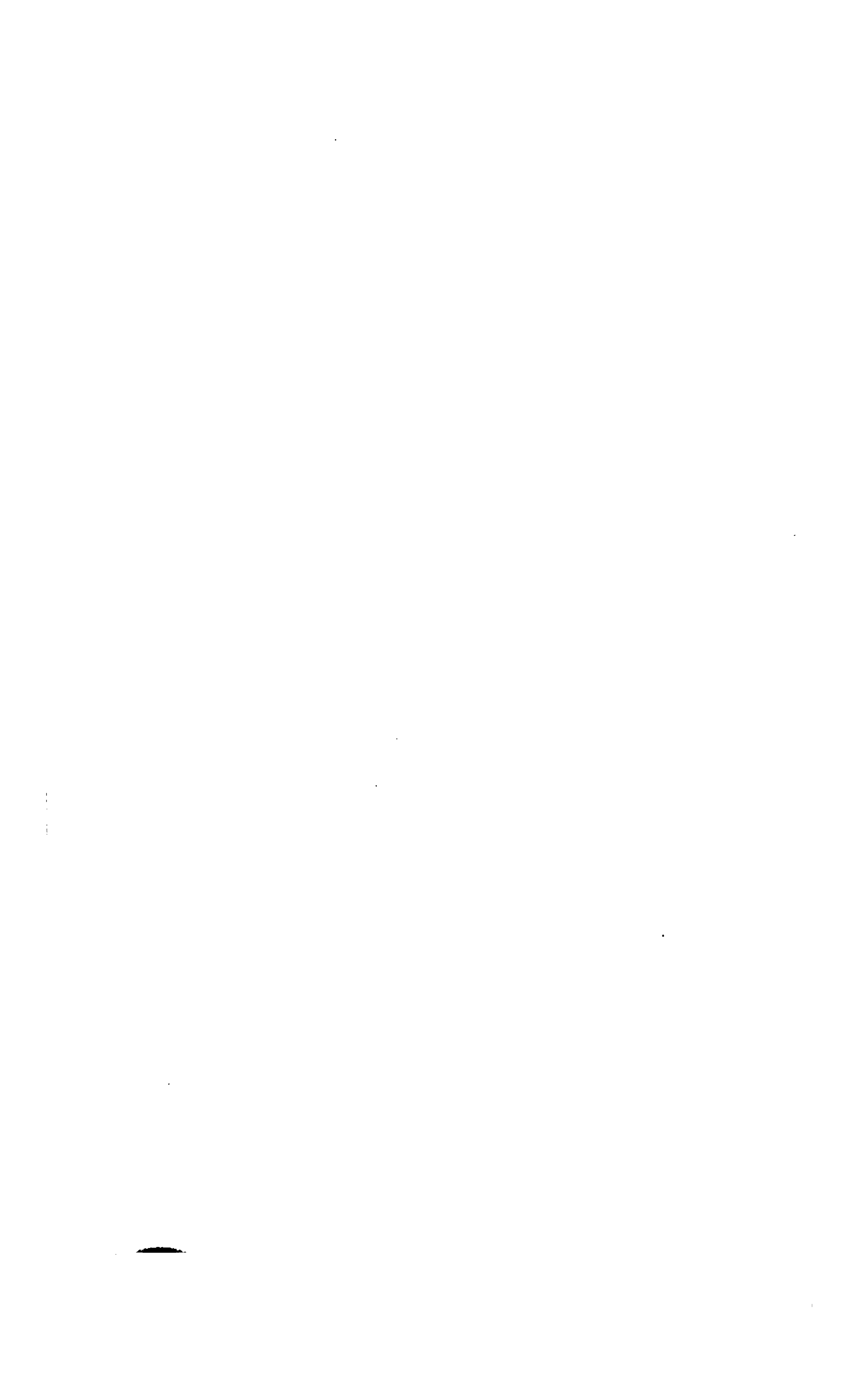

1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



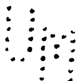
Handbuch

der

rationellen Mechanik.

Von

G. Decher,
Professor der Mechanik an der k. polytechnischen Schule zu Augsburg.



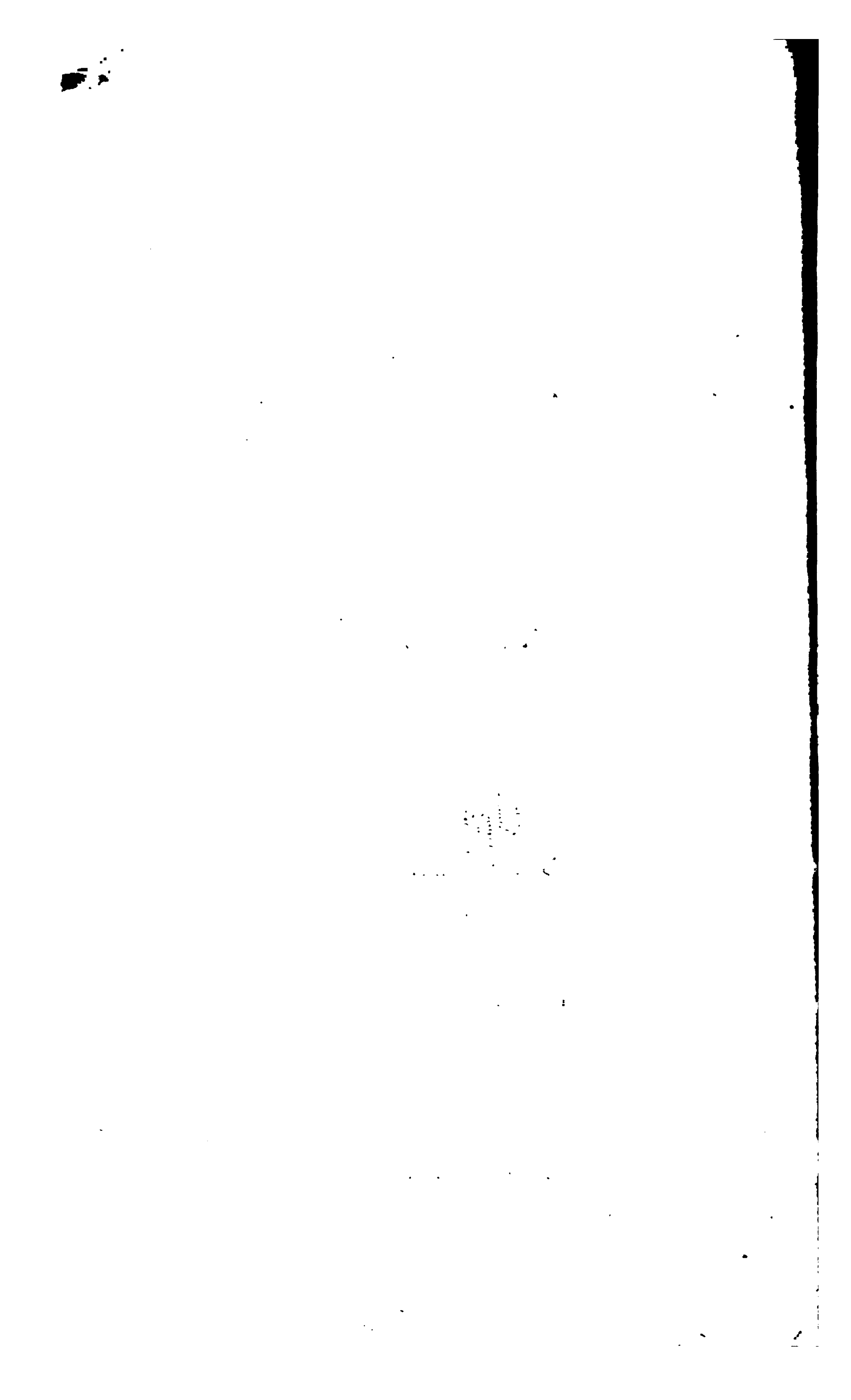
Dritter Band.

Mechanik veränderlicher Systeme.

Mit 4 Steintafeln.



Augsburg.
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1860.



Vorwort.

Nach dem ursprünglichen Plane sollte dieser dritte Band meines Handbuches der Mechanik das dritte und vierte Buch vereinigen; die große Ausdehnung aber, welche das dritte Buch: **die Mechanik veränderlicher Systeme** erhalten hat, nöthigte dazu, diesen Band, um ihn nicht zu voluminös werden zu lassen, auf jenes dritte Buch zu beschränken. Die lange Verzögerung der Herausgabe hat darin ihren Grund, daß ich das dritte Buch auch nach einem ganz andern Plane ausgearbeitet und das frühere Manuscript fast ganz auf die Seite gelegt habe, und daß ich auf mehrere Theile der neuen Bearbeitung viele Zeit verwenden mußte.

In dieser neuen Darstellung der **Mechanik veränderlicher Systeme** dürfte nach meinem Dafürhalten in Betreff der klaren Auffassung und allgemeinen Behandlung der Probleme der Mechanik ein nicht unwesentlicher Schritt vorwärts gethan sein, und zwar nicht allein dadurch, daß darin alle mögliche Arten von Systemen zusammengefaßt sind und nicht bloß, wie es bisher geschehen ist, solche, deren Theile nach gewissen Bedingungen in Verbindung stehen, sondern auch dadurch, daß darin zum erstenmale consequent unterschieden ist zwischen denjenigen Zuständen, welche ein System von materiellen Punkten als ein zusammengehöriges Ganze annehmen kann, und die ich **äußere Zustände** genannt habe, und seinen **innern Zuständen**, welche bloß durch die relative Lage und Geschwindigkeit der einzelnen Punkte oder Theile des

Systems bedingt sind. Gemäß dieser Unterscheidung, welche in den **einleitenden Betrachtungen** besprochen wird, zerfällt das gegenwärtige dritte Buch in drei Abschnitte, von denen der erste die **äußern**, der zweite die **innern Zustände** veränderlicher Systeme behandelt, während der dritte denjenigen allgemeinen Betrachtungen gewidmet ist, durch welche die innern und äußern Zustände zusammengefaßt werden.

Im ersten Abschnitt wird zuerst die **augenblickliche fördernde und drehende Gesammtwirkung** aller **äußern** und **innern** Kräfte des Systems ermittelt und nachgewiesen, daß diese Gesammtwirkung von den innern Kräften unabhängig und daher dieselbe ist, als wenn in dem betreffenden Augenblick das System ein festes wäre; für ein System paralleler Kräfte ergibt sich darnach auch ein augenblicklicher Mittelpunkt derselben und für ein schweres veränderliches System ein **augenblicklicher Schwerpunkt**, so wie im Allgemeinen für jedes veränderliche System ein **augenblicklicher Mittelpunkt der Masse**. Daran schließt sich zunächst die **Erklärung des äußern Gleichgewichtszustandes** und die Untersuchung **der Bedingungen für das Gleichgewicht** eines freien und eines in seiner Bewegung beschränkten Systems mit Berücksichtigung des Unterschiedes zwischen **dauerndem** und **augenblicklichem Gleichgewicht**, die Betrachtung besonderer Fälle von beschränkten Bewegungen und die Fassung des **Princips der virtuellen Geschwindigkeiten** für das **äußere Gleichgewicht**, und darauf folgt eine ausführliche Erörterung **der Gesetze der äußern Bewegung eines veränderlichen Systems**, durch welche einerseits eine vollständige Einsicht in die äußern Zustände eines solchen Systems geboten wird, durch welche aber auch auf der andern Seite der Unterschied zwischen unserer allgemeinen Auffassung veränderlicher Systeme und den bisherigen beschränkten Ansichten augenfällig gemacht werden dürfte.

Nachdem in dieser Erörterung zuerst die allgemeinsten Gleichungen für die äußere fortschreitende und drehende Bewegung eines ganz beliebigen Systems von materiellen Punkten auf dem einfachsten und natürlichsten Wege erhalten worden, werden daraus die Gesetze von **der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes** oder richtiger

des Mittelpunktes der Masse und von **der drehenden Bewegung um diesen Mittelpunkt** abgeleitet, und damit gezeigt, daß diese Gesetze, welche man bisher meistens mit Zugrundlegung des **d'Alembert'schen** Princips, das selbst nur eine Folge unserer natürlicheren Anschauung von der Gesammtwirkung der innern und äußern Kräfte ist, und des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten, das in seiner dazu angewendeten beschränkten Fassung nur für Systeme gültig ist, deren Theile nach bedingten Gesetzen in Verbindung stehen, bewiesen hat, daß diese Gesetze für jedes beliebige System von Körpern gelten, welche man gerade als ein System zusammenbetrachten will. Jene Gesetze gelten z. B. ebensowohl für einen fest liegenden Stein und eine darüber hinfliegende Kugel, welche zusammen als ein veränderliches System betrachtet werden, wie für ein Planetensystem, oder die in keiner Beziehung mehr zu einanderstehenden Theile einer in ihrem Laufe zersprungenen Kugel, u. s. f. Es wird sodann darauf hingewiesen, daß das zweite der genannten Gesetze sich eigentlich nur auf einen augenblicklichen Zustand des Systems bezieht und daß die drehende Bewegung desselben von seinem innern Zustande abhängt; diese Abhängigkeit wird augenfällig durch **die Ableitung der allgemeinen Gleichungen für die äußere drehende Bewegung** eines veränderlichen Systems um drei rechtwinklige **Achsen im Mittelpunkt der Masse,** welche mit dem System selbst in Verbindung stehen und daher selbst eine drehende Bewegung besitzen, und zwar insbesondere **um die augenblicklichen Hauptachsen** in jenem Mittelpunkte, Gleichungen, welche hier wohl zum erstenmal abgeleitet erscheinen und von denen die für die drehende Bewegung eines festen Systems nur einen besondern Fall bilden. Die darauf folgende Erörterung des unter dem Namen: **Princip von der Einhaltung der Oberflächen** bekannten Gesetzes und seine mechanische Interpretation sucht alle hier einschlägigen Punkte zu beleuchten, und wenn auch der nun entwickelte **Lehrsatz von der Aenderung der äußern lebendigen Kraft** eines veränderlichen Systems **durch die äußere Arbeit der äußern Kräfte** keine directe Anwendung in gegebenen Fällen zuläßt, was ja mit den vorhergenannten Gesetzen auch nicht der Fall ist, so dürfte er doch das

Verdienst einer allgemeineren Anschauung haben, da aus ihm wieder für feste Systeme ein anwendbarer Lehrsatz als besonderer Fall hervorgeht.

An diese Erörterung der äußern Bewegungsgesetze eines freien Systems schließt sich die Untersuchung der **äußern Bewegung eines beschränkten veränderlichen Systems**, welche namentlich was die Berücksichtigung der **Reibung bei gleitender und rollender Bewegung** und bei **einer stetigen Reihe von Berührungspunkten** betrifft, durchaus neu ist, und dieser erste Abschnitt schließt dann mit einer **Reihe von Beispielen**, die sich auf die verschiedenen vorgenannten Punkte der beschränkten Bewegung beziehen, zugleich aber auch als Beispiele für die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen dienen können und eine zweckmäßige Vorübung für die Maschinenlehre bilden dürften, welche aber gerade deßhalb dem Vorwurf zu großer Ausführlichkeit schwerlich entgehen werden, weil man solche Untersuchungen in einer rationellen Mechanik zu finden nicht gewohnt ist.

Der zweite Abschnitt behandelt die **innern Zustände** veränderlicher Systeme in vier Kapiteln. Im ersten Kapitel wird zunächst auf den Unterschied hingewiesen, welcher bezüglich der Untersuchung der innern Zustände eines **stetig zusammenhängenden** veränderlichen Systems und eines **nicht stetigen**, aus einer bestimmten Anzahl von materiellen Punkten oder festen Körpern gebildeten Systems besteht, und darnach zerfällt denn auch dieses Kapitel, in welchem **die allgemeinen Gesetze des innern Gleichgewichtes und der innern Bewegung** in größter Allgemeinheit und Vollständigkeit dargestellt sind, in zwei Stücke. Das erste dieser Stücke behandelt die **nicht stetigen Systeme**; es werden darin zuerst die Gleichungen für die innere Bewegung und das innere Gleichgewicht eines **Punktes** in einem **aus einzelnen materiellen Punkten bestehenden System** sowohl in Bezug auf ein parallel fortschreitendes als in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem aufgestellt, und dann ebenso die allgemeinsten Gleichungen für die örtlichen Zustände eines **festen Körpers** in einem aus einer **bestimmten Anzahl solcher Körper bestehenden** System abgeleitet, und zwar sowohl die Gleichungen für die fort=

schreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse eines solchen Körpers, als auch die Gleichungen für die drehende Bewegung desselben um seinen Masse-Mittelpunkt und zwar insbesondere um seine Hauptachsen in diesem Punkte, und für beide Arten von Bewegungen wieder sowohl in Bezug auf ein parallel fortschreitendes als in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem. Zuletzt werden daraus noch die Bedingungen für das innere ruhende Gleichgewicht eines solchen Körpers abgeleitet, und ich glaube so der Untersuchung der innern Zustände eines nicht stetigen Systems eine Allgemeinheit und Vollständigkeit gegeben zu haben, die nichts zu wünschen übrig lassen dürfte.

Die nun folgende Untersuchung **stetiger Systeme** geht von einer Vorstellung aus, welche auch schon im zweiten Buche bei der Betrachtung fester stetiger Systeme zu Grunde gelegt wurde, nämlich von der Vorstellung, daß ein Theil des Systems durch drei zu den Coordinaten-Achsen senkrechte Ebenen ausgeschieden sei, und daß diese Ebenen dann um die kleinen Größen Δx, Δy, Δz verrückt worden seien, um aus den dadurch eintretenden Aenderungen in den für den begrenzten Theil geltenden allgemeinen Beziehungen die entsprechenden allgemeinen Beziehungen für einen beliebigen Punkt des Systems als Uebergangsgesetze dritter Ordnung in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung von x, y und z abzuleiten, was übrigens hier einfach durch dreimaliges Differenziren jener allgemeinen analytischen Beziehungen je nach einer dieser Veränderlichen vorgenommen wird. Bei den veränderlichen Systemen sind aber vor Allem die Aenderungen zu berücksichtigen, welche in jenem begrenzten Theile des Systems mit der Aenderung der Zeit eintreten; es wird daher zuerst die mit der Zeit statthabende **Aenderung des Volumens** untersucht, und daraus die **geometrische Raumausdehnung** für einen beliebigen Punkt des Systems und das Aenderungsgesetz derselben in Bezug auf die Zeit abgeleitet. Ungeachtet dieser Raumänderung muß die Masse des begrenzten Theiles ungeändert bleiben, und diese Bedingung führt zu einer **Gleichung zwischen dem Aenderungsgesetz der geometrischen Dichte und dem der geometrischen Raumausdehnung**, welche man bisher bloß für die flüssigen Systeme aufgestellt und die **Bedingung der Stetigkeit**

genannt hat. Unsere Darstellung macht die wahre Bedeutung und den wahren Ursprung dieser Gleichung klar, und die nachfolgende Untersuchung zeigt, daß dieselbe für jedes stetige veränderliche System erfüllt werden muß, wenn die allgemeinen Bewegungsgesetze darauf Anwendung finden sollen. Um nämlich von den Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse des begrenzten Theiles durch dreimaliges Differenziren je nach x, y und z zu den Gleichungen der Bewegung des Punktes xyz übergehen zu können, müssen auch die Aenderungsgesetze $M\frac{d^2 x}{dt^2}$, $M\frac{d^2 y}{dt^2}$, $M\frac{d^2 z}{dt^2}$ in Function von x, y, z und ihrer Aenderungsgesetze u_x, u_y, u_z ausgedrückt werden, und die betreffende Ableitung zeigt, daß die vorhergehenden Aenderungsgesetze für einen Punkt nur dann in die einfachen $q\frac{d.u_x}{dt}$, $q\frac{d.u_y}{dt}$, $q\frac{d.u_z}{dt}$ übergehen, wenn die vorhin genannte Bedingung der Stetigkeit erfüllt ist; diese Bedingung liegt also schon den Gleichungen der innern Bewegung eines veränderlichen Systems, welche auch für flüssige Systeme gültig sind, selbst zu Grunde.

Um nun diese Gleichungen zu erhalten, wird das begrenzte Stück des Systems, dessen Bewegung offenbar von den in der Vorstellung losgetrennten Theilen modificirt wird, **wie ein in seiner Bewegung beschränktes System** betrachtet, d. h. es werden die aus seiner Verbindung mit den abgeschnitten gedachten Theilen entspringenden Hindernisse oder Förderniſſe seiner Bewegung als unbekannte **Druck- oder Zugkräfte** in die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse eingeführt, und dann aus diesen Gleichungen, nachdem noch die nothwendigen Beziehungen zwischen den physischen und geometrischen Wirkungen erörtert worden sind, durch dreimaliges Differenziren die Gleichungen für die Bewegung des Punktes xyz abgeleitet. Dieses Verfahren ist ein ganz rationelles, jeder Hypothese entbehrendes, und ist frei von den unklaren Einwänden gegen das Integriren um einen Punkt herum, welche zeigen, wie wenig selbst ein Lamé über den Unterschied zwischen der mathematischen und der physikalischen Vorstellung von den Körpern, wie ich ihn im Vorwort zum zweiten Bande angedeutet habe,

zu einer klaren Einsicht gekommen ist. Da es für einen Punkt keine drehende Bewegung gibt, so müssen die Gleichungen für die drehende Bewegung unseres begrenzten Systemtheiles zu denselben nur der Form nach verschiedenen Bewegungsgleichungen führen, und dieser Schluß begründet, der Einfachheit wegen indessen nur mit Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen der drehenden Kräfte, die wesentlichen Beziehungen, durch welche **die neun unbekannten Spannungs-Componenten auf sechs** zurückgebracht werden. Die Gleichgewichtsbedingungen der fördernden Kräfte dienen dann weiter dazu, die allgemeinsten Beziehungen zwischen den Spannungs-Componenten verschiedener Schnitt-Ebenen zu erhalten, und diese Beziehungen werden dann durch das **Ellipsoid** und die **Richtungsfläche der Spannungen** anschaulich dargestellt und nach jeder Richtung hin beleuchtet.

Die Spannungen um einen Punkt herum stehen zu den Aenderungen der Lage dieses Punktes in Bezug auf die ihn zunächst umgebenden in nothwendigen Beziehungen, und die Anwendung der allgemeinen Bewegungsgleichungen erfordert, daß diese Beziehungen wenigstens der Form nach bekannt sind. Wegen der Stetigkeit des Systems müssen wir aber von jenen Aenderungen der relativen Lage eines Punktes x y z in Bezug auf die ihn umgebenden wieder auf die Aenderungs- oder Uebergangsgesetze zurückgehen, welche ich **geometrische Dehnungen** genannt habe, und deren Größen und Richtungen um einen Punkt herum einem ähnlichen allgemeinen, jedoch nicht ganz so einfachen Gesetze folgen, wie die Spannungen, indem die **geometrische Dehnung für irgend eine Uebergangsrichtung** von neun Dehnungen abhängt; diese neun Dehnungen verbinden sich zwar auch sowohl für das **Ellipsoid** als für die **Richtungsfläche der Dehnungen** zu sechs Coefficienten, die Achsen dieser beiden Flächen fallen aber nicht mehr zusammen. Nach ausführlicher Erörterung dieser Eigenschaften wird die Beziehung der **geometrischen Raumausdehnung zu den Hauptdehnungen** abgeleitet und dann untersucht, unter welchen Bedingungen in den Bewegungsgleichungen statt der Aenderungsgesetze der Geschwindigkeits-Componenten in Bezug auf die Zeit die Aenderungsgesetze zweiter Ordnung der Verschiebungen in Bezug auf die Zeit substituirt werden dürfen.

Es bleibt darnach nur noch die Aufstellung der allgemeinen Gleichungen für die innere Bewegung und das innere Gleichgewicht **eines stetigen Systems, welches eine äußere fortschreitende und drehende Bewegung, oder die letztere allein besitzt,** übrig, um eine Lehre abzuschließen, welche bisher in die Lehrbücher der Mechanik noch keinen Eingang gefunden hat, weil die zu Grunde liegende Betrachtung mehr oder weniger mit Hypothesen über die innerhalb der Körper zwischen ihren Theilchen statthabenden Anziehungen verknüpft wurde; ich glaube durch meine Betrachtungsweise gezeigt zu haben, daß dieser Zweig der Mechanik ebenso rationell ist, und ebenso wenig einer Hypothese oder eines Satzes der Erfahrung bedarf, als die Untersuchung des Gleichgewichtes und der Bewegung fester Körper; eine Anwendung auf die elastischen Körper und die Flüssigkeiten dagegen stützt sich allerdings wieder auf Hypothesen oder auf Sätze der Erfahrung, wie die Anwendung der Lehren des zweiten Buches auf die schweren Körper die aus der Erfahrung entnommenen Kenntnisse von der Schwere voraussetzt, und mit demselben Rechte, mit dem homogene schwere Körper als Beispiele für die Anwendung der Lehren des zweiten Buches genommen werden, dürfen auch die homogen-elastischen Körper als Beispiele für die Anwendung unserer allgemeinen Gesetze für die innern Zustände stetiger Systeme behandelt werden, wie dieß im dritten Kapitel geschieht, ohne daß dadurch der Charakter des Buches als eines Handbuches der rationellen Mechanik beeinträchtigt wird.

Das zweite Kapitel ist der **Anwendung der für nicht stetige Systeme abgeleiteten Gesetze** gewidmet und behandelt demgemäß als Beispiele für inneres Gleichgewicht das Seilpolygon, das Knie, die Roberval'sche Wage, und ein Planetensystem als Beispiel für die innere Bewegung. Diese letztere Untersuchung geht vom allgemeinsten Standpunkte aus; sie stellt die allgemeinen Gleichungen für die fortschreitende und drehende Bewegung eines Körpers auf, welcher einem aus einer beliebigen Anzahl von Körpern gebildeten System angehört, geht dann mit Berücksichtigung der bei unserm Planetensystem stattfindenden Verhältnisse zur näherungsweisen Auflösung dieser Gleichungen über, und schließt mit der Ableitung derjenigen Beziehungen, durch welche die

Aenderungen der Elemente der rein-elliptischen Bewegung und der reinen drehenden Bewegung gefunden werden können. Ich glaube darin für ein Handbuch der Mechanik, das nach allen Richtungen hin gleich vollständig sein soll, nicht zu weit gegangen zu sein.

Das dritte Kapitel befaßt sich mit der **Anwendung der für stetige Systeme abgeleiteten Gesetze** auf die elastischen Körper, aber nur auf **homogen-elastische**, d. h. solche, deren Elasticität nach jeder Richtung hin dieselbe ist. Die elastischen stetigen Systeme werden dabei in ähnlicher Weise, wie bei der Bestimmung des Schwerpunktes die schweren festen Systeme unter drei Gesichtspunkten behandelt, als **elastische Linien, elastische Flächen** und als **elastische Körper.** Mit den elastischen Linien als den einfachsten elastischen Systemen beginnend, beschäftigt sich die Untersuchung zunächst mit der **Ermittelung der Beziehung zwischen Spannung und Dehnung** einer solchen Linie, wenn sie die Form einer Geraden hat, und zwar mittels einer physikalischen Betrachtung derselben, geht dann auf die Bestimmung der Gestalt und Spannung einer elastischen Linie über, welche sich unter dem Einflusse einer stetig sich ändernden Kraft im innern Gleichgewichtszustande befinden soll, wobei die Ketten- und Gewölblinie als besonderes Beispiel ausführlich erörtert wird, und behandelt dann die **Bewegung einer elastischen Linie,** welche im Gleichgewichtszustand die Form einer Geraden hat und nur nach ihrer Länge gespannt ist; es wird darin gezeigt, daß die für diesen Fall bisher aufgestellten Bewegungsgleichungen unvollständig, daß **die transversalen Schwingungen von den longitudinalen nicht unabhängig sind,** und dann werden sowohl für besondere wie für allgemeine Fälle die entsprechenden Auflösungen gegeben; ich kann jedoch nicht verhehlen, daß ich von der nach Lamé aufgenommenen Behandlung des Falles mit der angezupften Saite und ähnlicher Fälle nichts weniger als befriedigt bin; denn wie man auch den Versuch ändern mag, sobald die Saite das erstemal durch ihre Gleichgewichtslage gegangen ist, nimmt sie nie mehr die anfängliche Gestalt eines stumpfen Winkels an, wie es nach den betreffenden Gleichungen doch sein müßte.

Zu der Betrachtung der **elastischen Flächen** übergehend, bietet

unsere Untersuchung eine ganz neue Behandlung des innern Gleichgewichtes und der innern Bewegung solcher Flächen. Zuerst werden die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht elastischer Flächen abgeleitet, wobei gezeigt wird, daß sich für diese die Spannungen um einen Punkt herum auf **drei tangentiale Spannungen** zurückführen lassen, und dann werden diese Gleichungen auf einige einfache Fälle angewendet, worunter insbesondere die Bestimmung der **Kuppelgewölbefläche** einiger Beachtung nicht unwerth sein dürfte. Daran reiht sich wieder **eine physikalische Betrachtung eines ebenen Bandes** zur Ermittelung und Veranschaulichung der **Spannungs- und Dehnungs-Verhältnisse** und die mathematische Untersuchung der letztern für eine beliebig gekrümmte Fläche von constanter Elasticität nebst deren Anwendung auf einige einfache Fälle. Diese Beziehungen finden dann auch ihre Anwendung bei den Gleichungen der Bewegung, um aus ihnen die **Spannungen** zu eliminiren und durch die **Dehnungen** zu ersetzen, was indessen nur für ebene Flächen durchgeführt wird und wodurch für diese die Differentialgleichungen für die sehr kleinen innern longitudinalen und transversalen Bewegungen hervorgehen. Diese Gleichungen werden auf die beiden Fälle, wo eine elastische Membrane in einen rechteckigen und in einen kreisförmigen Rahmen eingespannt ist, angewendet und mittels derselben die Gestalt der Membrane für einen beliebigen Zeitpunkt bestimmt.

Zuletzt richtet sich unsere Untersuchung auf die elastischen Körper selbst und leitet zunächst für Körper von **constanter Elasticität** die **Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen** um einen Punkt herum einfach durch die Drehung der Coordinaten-Achsen ab, da diese Beziehungen bei einer nach jeder Richtung constanten Elasticität für jede Richtung der Achsen dieselben bleiben müssen. Diese Beziehungen werden sodann wieder vorerst auf einige einfache Fälle angewendet, dann werden mit denselben die **allgemeinsten Gleichungen für den innern Gleichgewichtszustand elastischer Körper** abgeleitet, nämlich die Beziehungen, welche zwischen den äußern Kräften und den Dehnungen oder vielmehr zwischen jenen und den aus diesen Dehnungen durch die Elasticität entspringenden innern Kräften im Zustande des

Gleichgewichtes statthaben müssen, und zuletzt wird die **allgemeinste Form der Functionen** bestimmt, welche **zur Lösung jener Gleichungen führen können.** Endlich werden die genannten Beziehungen zwischen den geometrischen Dehnungen und Spannungen in die Gleichungen für die innere Bewegung bei äußerem Gleichgewichtszustand eingeführt, und diese Gleichungen nach den constanten **Coefficienten** in drei Klassen geschieden, von denen sich die erste als diejenigen einfachen Bewegungen umfassend kennzeichnet, bei welchen die oscillatorische Bewegung eines Punktes im Sinne der Fortpflanzung derselben von einem Punkte zum andern gerichtet ist, die zweite als diejenigen einfachen Bewegungen begreifend, bei welchen die Schwingungen eines Punktes senkrecht zur Fortpflanzungs-Richtung sind, und die dritte Klasse alle übrigen Bewegungen, die nur aus diesen beiden einfachen zusammengesetzt sein können. Schließlich wird dann auch hier **die allgemeinste Form der Functionen** bestimmt, welche **zur Lösung der Bewegungsgleichungen geeignet** erscheinen.

Das vierte Kapitel behandelt die **Uebertragung der Bewegung** im Allgemeinen und den **Stoß** als wichtigsten Fall derselben insbesondere. In Betreff der allgemeineren Betrachtung wird durch das Beispiel einer Uebertragung durch **Reibung** und einer durch einen **elastischen Faden** gezeigt, wie solche Fälle zu behandeln sind und welchen Einfluß die Art der Uebertragung der Bewegung auf die innere Bewegung eines veränderlichen Systems haben kann. **Die Lehre vom Stoße** wird mit aller Ausführlichkeit stufenweise vorgetragen, indem sie mit dem einfachsten Falle des centralen Stoßes beginnt, nämlich mit der Voraussetzung, daß die beiden sich stoßenden Körper keine drehende Bewegung besitzen, daß die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte nach der Verbindungslinie dieser Punkte gerichtet sind und daß diese Verbindungslinie zugleich im ersten Berührungspunkte beider Körper normal zu denselben ist. Es wird sodann auf den allgemeinen Fall übergegangen, wo **die Geschwindigkeiten beider Körper vor dem Stoß beliebige Richtungen haben,** diese aber noch keine drehende Bewegung besitzen, und für diesen Fall wie für alle folgenden Fälle das Carnot'sche Princip direct nachgewiesen. Auf der folgenden Stufe

wird die **drehende Bewegung** mit in die Betrachtung gezogen, und zwar unter der Voraussetzung, daß ein freier Körper auf einen um eine feste Achse drehbaren stößt und daß alle übrigen Verhältnisse möglichst einfach sind, und dann zur **Untersuchung des allgemeinsten Falles zweier sich stoßenden Körper** fortgeschritten; die Ergebnisse dieser Untersuchung dürften wohl ebenso neu als beachtenswerth sein. Zuletzt werden dann noch drei weitere Fälle kurz berührt, nämlich der **Stoß bei beschränkter Bewegung** des gestoßenen Körpers, der **gleichzeitige Stoß mehrerer Körper** und der **Stoß mit Berücksichtigung der Reibung**, und es wird für den letztern Fall darauf hingewiesen, daß man die Wirkung der Reibung bei dem Stoß bisher ebenso unrichtig aufgefaßt hat, wie bei der gezwungenen Bewegung rollender Körper, indem diese Wirkung nur bei der drehenden Bewegung der sich stoßenden Körper auftritt und zwar dadurch, daß die Drehungsachsen derselben durch den Reibungswiderstand in den Berührungspunkt verlegt werden, wie in dem Falle, wo man sich beide Körper mit gerippten Oberflächen versehen denkt.

Der dritte Abschnitt endlich erörtert die beiden Lehrsätze, welche den innern und äußern Zustand eines Systems zugleich umfassen, nämlich das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten** und den **Lehrsatz von der Aenderung der lebendigen Kraft**, in ihrer allgemeinsten Fassung; sie weist nach, wie beschränkt und unrichtig man auch diese Lehrsätze aufgestellt und begründet hat, und bestimmt die Fälle, für welche die bisherige, auf die äußern Kräfte beschränkte Fassung derselben richtig ist.

Mit dieser Darlegung des im vorliegenden Bande behandelten Lehrstoffes und der Art der Behandlung glaube ich zur Genüge angedeutet zu haben, daß hier eine ganz neue und consequent durchgeführte Auffassung der Mechanik veränderlicher Systeme geboten wird, und füge daher nur den Wunsch bei, daß dieses Vorwort dazu veranlassen möge, den Inhalt des Werkes selbst näher zu würdigen.

Augsburg im October 1858.

G. Decher.

Inhalt
des dritten Bandes.

Drittes Buch.
Mechanik veränderlicher Systeme.

Einleitende Betrachtungen.

Erster Abschnitt.
Aeußere Zustände eines veränderlichen Systems.

I. Augenblickliche Gesammtwirkung der äußern und innern Kräfte.

II. Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems.

III. Allgemeine Gesetze der äußern Bewegung eines veränderlichen Systems.

Zweiter Abschnitt.

Innere Zustände eines veränderlichen Systems.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze des innern Gleichgewichts und der innern Bewegung.

Zweites Kapitel.

Beispiele nicht stetiger veränderlicher Systeme. Seilpolygon, Knie, Roberval'sche Wage, Planeten-System.

Drittes Buch.

Mechanik veränderlicher Systeme.



Einleitende Betrachtungen.

§. 1.

Alle Körper in der Natur und umsomehr alle Verbindungen von Körpern sind bezüglich der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile oder allgemeiner der einzelnen materiellen Punkte, aus welchen sie bestehen, der *Veränderung* fähig und derselben unterworfen, sobald in den gegenseitigen Verhältnissen der an ihnen thätigen Kräfte eine Aenderung eintritt. Die Ergebnisse der Untersuchungen des vorhergehenden Buches stimmen daher mit den in der Natur zu beobachtenden Erscheinungen nur insofern überein, als wir von diesen Veränderungen, welche für die der festen Aggregatform angehörigen Körper meistens sehr gering sind, Umgang nehmen. Wir begegnen in der Natur aber auch Systemen von materiellen Punkten oder von Körpern, bei welchen die Veränderungen in der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile sehr wesentlich und für uns selbst wichtiger sind, als die Gesetze der Bewegung, welche ein solches System als ein zusammengehörendes Ganze erhält, und wir besitzen in unsern Maschinen viele Verbindungen fester Körper, welche ihre gegenseitige Lage fortwährend ändern und von denen auch manche ihre Gestalt wesentlich ändern; die Untersuchung dieser Veränderungen und der Gesetze nach welchen sie stattfinden führt uns demnach zur allgemeinsten Aufgabe der Mechanik, welche darin besteht, die *Bedingungen für das Gleichgewicht und die Gesetze der Bewegung eines veränderlichen Systems von materiellen Punkten festzustellen.*

Der Auflösung dieser Aufgabe soll das gegenwärtige Buch gewidmet sein; es sollen jedoch darin insbesondere nur solche Systeme in's Auge gefaßt werden, bei welchen die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte oder auch größerer Theile weder fest und unwandelbar bestimmt ist,

wie bei den festen Systemen, noch auch bis in die kleinsten Theile willkürlich veränderlich, wie bei den flüssigen Systemen, bei welchen vielmehr diese gegenseitige Lage auf irgend eine Weise bedingt ist, indem sie entweder von bestimmten Kräften abhängt, die innerhalb des Systems thätig sind, oder sich nach gegebenen Bedingungen richten muß, welche geometrisch immer dadurch vorgestellt werden können, daß man bestimmte Punkte des Systems der Beschränkung unterwirft, sich auf gegebenen Flächen oder Curven zu bewegen. Es gehören demnach hieher einmal alle der festen Aggregatform angehörigen Körper, insofern sie als dehn= oder zusammendrückbar, als biegsam und elastisch, u. s. f. zu betrachten sind, also solche stetige Systeme von materiellen Punkten, welche immer eine bestimmte äußere Gestalt an= und einen bestimmten Raum einnehmen, wenn die zwischen den einzelnen Punkten thätigen Kräfte entweder unter sich oder mit den von Außen wirkenden Kräften in's Gleichgewicht gekommen sind, welche aber beides bald mehr bald weniger ändern, sobald dieses Gleichgewicht gestört wird. Ferner gehören hieher alle Verbindungen von festen Körpern, welche verschiedenartige Bewegungen annehmen, aber in solcher Abhängigkeit stehen, daß die Bewegung eines derselben die Bewegungen aller übrigen bedingt und bestimmt, wie dies bei allen Maschinen der Fall ist. Endlich müssen aber auch solche Systeme von festen Körpern hieher gerechnet werden, welche zwar in ihren Bewegungen fast gänzlich unbeschränkt und nur insofern von einander abhängig sind, als zwischen ihnen noch Kräfte wirksam bleiben, die einen Einfluß auf die Bewegungen der einzelnen Theile ausüben, welche aber der Zahl und Größe oder Masse nach bestimmt sind, und zusammen als ein Ganzes, als ein System betrachtet werden können, wie ein Planeten= oder Sonnensystem, oder wie eine Kugel und die Kanone, aus welcher sie abgeschossen wurde, oder zwei Kugeln, welche durch gegenseitigen Stoß ihre Bewegungen ändern, u. s. f.

Allgemein und genauer betrachtet würden auch die Flüssigkeiten unter die veränderlichen Systeme einzureihen, und nur als eine besondere Klasse derselben zu untersuchen sein, da sie sich von der zuletzt genannten Klasse veränderlicher Systeme nur dadurch unterscheiden, daß sie bis zu den kleinsten Theilchen willkürlich veränderlich und als stetige Systeme von materiellen Punkten zu betrachten sind, von denen man weder die Zahl noch die einzelnen Größen oder Massen kennt. Aber gerade dieser letztere Umstand, mit welchem auch der zusammenhängt, daß es in einem solchen System für die Beobachtung fast unmöglich ist, die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, der sich in Nichts von den übrigen unterscheidet,

zu verfolgen, gibt hier der Untersuchung eine ganz andere Richtung und bestimmt derselben meistens ein wesentlich anderes Ziel, als dies bei den übrigen veränderlichen Systemen der Fall ist; es werden deßhalb die flüssigen Systeme in dem folgenden Buche einer besondern Betrachtung unterzogen werden.

§. 2.

Bei einem veränderlichen System kann im Allgemeinen nicht mehr von einer Gesammtwirkung der Kräfte die Rede sein, wenigstens nicht in demselben Sinne, wie bei einem festen System, d. h. es kann dort die von verschiedenen Kräften hervorgebrachte Wirkung nicht mehr einer einzigen Kraft zugeschrieben oder von einer einzigen Kraft erzeugt gedacht werden, weil bei einem veränderlichen System jeder Angriffspunkt einer Kraft eine eigene, wenn auch nicht völlig unabhängige Bewegung erhält oder doch erhalten kann. Beachtet man aber, daß auch bei einem festen System die Gesammtwirkung immer nur eine augenblickliche ist, und daß man auch ein veränderliches System in jedem Augenblicke als ein zusammengehörendes Ganze betrachten kann, welches gegen andere Systeme oder materielle Punkte seine Lage ändert oder in Bewegung begriffen ist, während innerhalb desselben die gegenseitigen Bewegungen der einzelnen Theile vor sich gehen, so wird allerdings auch in jedem Augenblicke von einer Gesammtwirkung der Kräfte in Bezug auf die Aenderung in dem örtlichen Zustande des ganzen Systems die Rede sein können.

Wir werden uns nämlich, um dieß geometrisch darzustellen, durch einen beliebigen Punkt des Systems ein Coordinatensystem gelegt denken und für irgend einen Augenblick, für welchen wir den Zustand des veränderlichen Systems untersuchen wollen, alle materiellen Punkte desselben mit jenem Coordinatensystem fest verbunden annehmen, das System in diesem Augenblicke also als ein festes betrachten, und können dann die augenblicklich fördernde und drehende Gesammtwirkung aller Kräfte in Bezug auf dieses als fest gedachte System oder in Bezug auf das mit ihm fest verbundene Coordinatensystem wie bei einem festen System berechnen. Mittels dieser Gesammtwirkung, für welche, wie man leicht einsehen wird, alle innerhalb des Systems, d. h. zwischen den einzelnen Theilen oder materiellen Punkten desselben thätigen Kräfte ohne Einfluß bleiben müssen, wird man wie bei einem festen System die Gesetze für die fortschreitende und für die drehende Bewegung unseres Coordinatensystems oder die Bedingungen für das Gleichgewicht desselben ableiten, und es wird sich dann für die vollständige Kenntniß

des Zustandes unseres veränderlichen Systems nur noch darum handeln, die Gesetze der relativen Bewegungen seiner einzelnen Punkte in Bezug auf jenes Coordinatensystem oder die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser einzelnen Punkte unter sich darzustellen, wobei natürlich die innern Kräfte vorzüglich maßgebend sein werden, und jeder einzelne Punkt oder feste Theil des Systems für sich betrachtet werden muß.

So wie wir also in dem vorhergehenden Buche die Bewegung eines festen Systems in der Vorstellung in eine fortschreitende und in eine drehende zerlegt und diese als gegenseitig unabhängig von einander betrachtet haben, um uns die Vorstellung derselben zu erleichtern, so werden wir durch die obige Betrachtung dahingeführt, die örtlichen Zustände eines veränderlichen Systems abermals unter zwei verschiedenen, in der Vorstellung unter sich unabhängigen Gesichtspunkten aufzufassen, nämlich ein solches System einmal als ein zusammengehörendes Ganze zu betrachten und die Aenderung seiner Lage in Bezug auf außerhalb desselben liegende Punkte oder in Bezug auf ein festes Coordinatensystem zu untersuchen, und dann blos die Aenderungen zu berücksichtigen, welche innerhalb desselben vor sich gehen. Wir wollen daher dieser Vorstellung gemäß diejenigen Beziehungen, welche die Lage eines veränderlichen Systems, insofern es als ein zusammengehörendes Ganze betrachtet wird, in Bezug auf ein festes Coordinatensystem ausdrücken, **die äußern örtlichen Zustände** des Systems nennen, und diejenigen Beziehungen, welche die innerhalb des Systems vor sich gehenden Aenderungen darstellen, mit dem Namen: **Innere örtliche Zustände** desselben bezeichnen. Die Mechanik veränderlicher Systeme wird darnach in zwei Abschnitte zerfallen, von denen der eine die Untersuchung der äußern, der andere die der innern örtlichen Zustände des Systems zum Gegenstande hat, und von denen der erste durchaus auf die Mechanik der festen Systeme gestützt werden kann, da beide, was die äußere Form der Gesetze der Bewegung und der Bedingungen des Gleichgewichtes betrifft, ganz übereinstimmen, während der zweite Abschnitt im Allgemeinen die Mechanik des materiellen Punktes und insbesondere die Gesetze der relativen Bewegung eines materiellen Punktes zur Anwendung bringt.

So einfach nach dieser Anschauungsweise die Untersuchung der örtlichen Zustände eines veränderlichen Systems auf den ersten Anblick zu sein scheint, so wird man bei näherer Erwägung bald erkennen, wie sehr sich die Schwierigkeiten für diese Untersuchungen im Allgemeinen häufen, da die von Außen wirkenden Kräfte genau genommen immer

auch von der Lage der einzelnen materiellen Punkte innerhalb des Systems abhängen, also gleichzeitig Functionen der Coordinaten sind, durch welche die Lage des beweglichen Anfangspunktes in Bezug auf ein unverrückbares Coordinatensystem festgestellt wird, der Coordinaten-Winkel, welche die Lage der beweglichen Achsen in Bezug auf die festen Coordinaten-Achsen bestimmen, und der Coordinaten, durch welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems in Bezug auf die beweglichen Achsen bestimmt werden. Dazu kommt noch, daß wenn im jetzigen Falle die Untersuchung der drehenden Bewegung der beweglichen Achsen dadurch vereinfacht werden sollte, daß man die Hauptachsen des einen Augenblick als fest gedachten Systems als diese beweglichen Coordinaten-Achsen nimmt, diese im Allgemeinen eine veränderliche Lage im Systeme haben, welche wieder von den innerhalb des Systems stattfindenden Aenderungen abhängt und in jedem Augenblicke sehr schwierig zu bestimmen wäre. Auf der andern Seite ist indessen ersichtlich, daß wegen dieser Veränderlichkeit des Systems die Richtung der beweglichen Coordinaten-Achsen im Allgemeinen sehr unbestimmt ist, wenn man nicht gerade jene augenblicklichen Hauptachsen dafür annimmt, daß es also in den meisten Fällen das Zweckmäßigste sein dürfte, diesen beweglichen Achsen entweder nur eine einfache drehende Bewegung vorzuschreiben, oder ihnen blos eine fortschreitende Bewegung zu geben, so daß sie zu den festen Coordinaten-Achsen immer parallel bleiben, und zwar um so mehr, als in diesem Falle auch die Gleichungen für die relativen Bewegungen der einzelnen Punkte oder Theile des Systems viel einfacher werden und leichter zu behandeln sind.

In den wenigen Fällen, welche wir in dieser Beziehung besonders zu erörtern haben werden, ist auch der Einfluß, welcher eine Aenderung der Lage eines materiellen Punktes innerhalb des Systems oder in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem auf die Intensität der von außen her auf ihn wirkenden Kraft hat, so gering, daß er ohne fühlbaren Fehler vernachlässigt werden darf, wodurch dann die Untersuchung des äußern örtlichen Zustandes wesentlich erleichtert wird.

§. 3.

Die Untersuchung dieser äußern örtlichen Zustände hat indessen für die veränderlichen Systeme mehr einen wissenschaftlichen Werth, insoferne nämlich dadurch die Mechanik aller Systeme von materiellen Punkten denselben allgemeinen Gesetzen unterstellt wird; auf einzelne Fälle findet dieselbe hier nur sehr wenig Anwendung, da wir bei der Untersuchung veränderlicher Systeme gerade die Veränderungen im Innern

derselben, in der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile oder Punkte, oder die Veränderungen in der Gestalt des Systems kennen zu lernen wünschen, und dabei von einer Aenderung in der Lage des Systems gegen andere Punkte oder Systeme meistens gänzlich Umgang nehmen, wie z. B. bei der Betrachtung unseres Planetensystems, oder weil wir in dem System einen oder mehrere feste Punkte voraussetzen, durch welche dasselbe als Ganzes betrachtet im Zustande des äußern ruhenden Gleichgewichtes erhalten wird, während dasselbe seine Gestalt fortwährend ändert, also im Innern in Bewegung ist, wie eine schwingende Feder, welche an einem Ende, oder eine schwingende Saite, welche an zwei Enden befestigt ist, oder jede feststehende Maschine, insofern sie als ein Ganzes betrachtet wird.

In allen diesen Fällen werden immer nur die Gesetze für die innerhalb des Systems vor sich gehenden Veränderungen gesucht, und es sind dann auch die innerhalb des Systems, zwischen seinen einzelnen Theilen gegenseitig thätigen Kräfte und die Art der Verbindung der einzelnen Punkte desselben in's Auge zu fassen. Die Untersuchung der innern Zustände eines veränderlichen Systems wird daher wesentlich durch die Natur desselben bedingt und eine andere sein, je nachdem die Masse und die Anzahl der einzelnen Theile des Systems und die Intensität der zwischen ihnen wirkenden Kräfte gegeben ist, oder nicht. Wenn ein System aus einer bestimmten Anzahl materieller Punkte oder fester Körper besteht, welche nach einem bekannten Gesetze auf einander wirken, wie es bei einem Planetensystem oder unsern Maschinen der Fall ist, so ist es nicht schwer für irgend eine Anordnung des Systems die Gesammtwirkung aller auf einen jener Punkte oder Körper thätigen Kräfte zu bestimmen, d. h. in Function der Coordinaten der einzelnen Angriffspunkte auszudrücken, und die ersten Abschnitte der beiden vorhergehenden Bücher geben dazu die nöthige Anleitung. Wenn dagegen das veränderliche System aus einer unbekannten Anzahl von Atomen besteht und zwischen diesen Kräften thätig sind, für welche die Beziehung zwischen ihrer Intensität und der Lage ihrer Angriffspunkte nicht gegeben ist, so läßt sich die Gesammtwirkung aller innern Kräfte in Bezug auf eines jener Atome nicht mehr so bestimmt angeben und es kommt dann darauf an die unbekannten Größen auf die kleinste Anzahl zurückzuführen und zweckmäßig auszudrücken, um ihre Werthe für besondere Fälle mittels einiger bestimmter Veränderungen des Systems, welche durch gegebene Kräfte in demselben hervorgerufen und beobachtet wurden, berechnen zu können. Dieser zweite Fall bezieht sich, wie man leicht fühlen wird, insbesondere auf die Körper der festen Aggregatform, insofern dieselben

in der Gestalt veränderlich und mehr oder weniger elastisch sind. Es wird demnach für diese die Untersuchung des innern Zustandes einen ganz andern Gang einschlagen müssen, als für die zuerst genannten Systeme, und deßwegen in Betreff dieser Untersuchung zwischen stetig veränderlichen und theilweise veränderlichen Systemen zu unterscheiden sein.

§. 4.

Für die Untersuchung der allgemeinen Bewegungsgesetze oder Gleichgewichtsbedingungen macht es keinen Unterschied, ob wir ein veränderliches System als ein aus einzelnen getrennten materiellen Punkten bestehendes betrachten, oder uns dasselbe als ein stetig zusammenhängendes vorstellen, und wir werden deßhalb für die allgemeinen Betrachtungen immer die den nicht stetigen Systemen entsprechende Form der analytischen Ausdrücke beibehalten. Für die spezielle Untersuchung stetiger Systeme dagegen haben wieder die in §. 146 des vorhergehenden Buches niedergelegten Bemerkungen Platz zu greifen; die Kräfte, welche nun auf einen durch seine Coordinaten bestimmten geometrischen Punkt des Systems wirken, oder genauer ausgedrückt die analytischen Maaße dieser Kräfte werden wieder geometrische Kräfte und sind die Aenderungsgesetze der analytischen Maaße für die entsprechenden physischen Kräfte, welche auf ein dem Coordinatensystem entsprechend begrenzten Theil des Systems wirken in Bezug auf die Aenderung dieser Begrenzung oder in Bezug auf die Aenderung des Volums dieses begrenzten Theiles, und in den Fällen, wo die physischen Kräfte, welche auf einen isolirten materiellen Punkt wirken, Functionen von der Masse des letztern sind, werden unsere geometrischen Kräfte wieder entsprechende Functionen der geometrischen Dichte ihres Angriffspunktes. Für die stetigen veränderlichen Systeme von materiellen Punkten treten aber noch einige neue Kräfte auf, welche bei den festen Systemen nicht vorgekommen sind und hier sogleich erwähnt werden sollen.

Die eine dieser Kräfte ist der geometrische Druck in einem durch seine Coordinaten bestimmten Punkt eines solchen Systems. Bei einem festen System haben wir den Druck auf eine feste Fläche, also auf ein anderes festes System nur in einzelnen Punkten und deßhalb immer als physischen betrachtet; denn für ein festes System läßt sich der Druck nur dann bestimmt angeben, wenn sich dasselbe auf ein anderes mit höchstens drei Punkten stützt, bei einer größern Anzahl von Stütz- oder Berührungspunkten hat die Untersuchung über die Vertheilung des Druckes nur dann einen bestimmten Sinn und Zweck, wenn man das eine oder

beide sich berührende Systeme als biegsam, also als veränderlich betrachtet. Folgen in diesem letztern Falle aber die Berührungspunkte stetig auf einander, so daß sie eine stetige Berührungscurve oder Berührungsfläche bilden, so wird sich auch der Druck stetig auf diese Curve oder Fläche vertheilen und es hat keinen Sinn mehr von einem physischen Drucke in einem bestimmten Punkte derselben zu reden, da man sich in diesem Falle immer eine bestimmte Länge oder Fläche hinzudenken muß, auf welche der Druck ausgeübt wird. Das analytische Maaß für den Druck in einem durch seine Coordinaten bestimmten geometrischen Punkte der Berührungslinie oder Fläche, welches als eine stetig veränderliche Function dieser Coordinaten erscheint, immer nur für einen einzigen Punkt gilt und für jeden noch so nahe liegenden Punkt einen andern Werth erhält, muß daher wieder als **geometrischer Druck** betrachtet werden, und ist das **Aenderungsgesetz** des analytischen Maaßes für den **physischen Druck**, welcher auf einen in jenem Punkte begrenzten Theil der Berührungslinie oder Fläche ausgeübt wird, in Bezug auf die Aenderung der **Länge** oder des **Flächeninhaltes**. Wenn dieser geometrische Druck in der ganzen Ausdehnung der Berührungslinie oder Fläche oder eines Theiles derselben der gleiche ist, so ergibt sich das Maaß des darauf ausgeübten physischen Druckes als Product aus dem geometrischen Druck in die entsprechende Länge oder den entsprechenden Flächeninhalt, und dieser geometrische Druck ist in diesem Falle auch das Maaß für den auf die Längen- oder Flächen-Einheit ausgeübten physischen Druck, wie das constante geometrische Gewicht in einem Punkte eines Körpers auch das Maaß für das physische Gewicht der Volumen-Einheit desselben ausdrückt.

Bei den veränderlichen Systemen kommt aber nicht blos ein äußerer Druck in Betrachtung, nämlich ein solcher, welcher auf äußere das System in seiner Bewegung beschränkende Hindernisse ausgeübt wird, sondern auch ein innerer, welcher zwischen den einzelnen Theilen des Systems selbst stattfindet und je nach der Bildung des Systems anders beurtheilt werden muß. Wenn das System ein theilweise veränderliches oder aus bestimmten festen Systemen zusammengesetzt ist, so ist der innere Druck wie der äußere als normal zu den der Form nach bestimmten und bekannten Berührungsflächen dieser festen Systeme wirkend zu betrachten; ist dagegen das System ein stetig veränderliches, so kann man sich innerhalb desselben beliebige Berührungsflächen denken und wird deßhalb dazu am einfachsten ebene Schnitte wählen. Es wird dann aber im Allgemeinen der Druck, welcher die

beiden durch einen solchen ebenen oder auch einen andern Schnitt gesonderten Theile des Systems in irgend einem Punkte dieser Schnittfläche auf einander ausüben, nicht mehr normal zu der Schnittfläche sein, da nun dieser innere Druck auch das Bestreben in sich begreift, die beiden Theile längs der Schnittfläche auf einander zu verschieben, und muß daher als Resultirende einer normalen und einer tangentialen Wirkung, als Resultirende eines eigentlichen normalen Druckes und eines tangentialen Schubes betrachtet werden.

Die andere der obengenannten Kräfte, welche aber nur bei veränderlichen Systemen der festen Aggregatform zur Untersuchung kommt, und dem Druck der Bedeutung nach entgegengesetzt ist, ist die Spannung oder der Zug, d. i. die Kraft, welche zwei materielle Punkte oder zwei Theile eines solchen Systems zu trennen strebt, und welcher die Cohäsion und die Elastizität entgegenwirken, welche also niemals größer werden darf, als die Cohäsionskraft des betreffenden Stoffes, wenn nicht eine wirkliche Trennung erfolgen soll. Die analytischen und geometrischen Beziehungen sind für den Zug ganz dieselben wie für den Druck, nur in so fern einfacher, als man sich beim Zuge immer nur Punkte in einer Ebene, in einem ebenen Schnitte denkt, auf welche diese Kraft unmittelbar wirkt. Die physische Zugkraft, welche den Körper nach einem solchen Schnitte zu trennen strebt, vertheilt sich wieder auf alle Punkte des Schnittes oder der Schnittfläche und gibt für jeden derselben eine in Function seiner Coordinaten ausgedrückte geometrische Zugkraft, welche analytisch betrachtet das Aenderungsgesetz jener physischen Kraft ist in Bezug auf die Aenderung der Fläche des Schnittes.

Auch dieser geometrische Zug ist im Allgemeinen nicht normal zu der Schnittebene gerichtet und zerlegt sich wie der innere Druck in den eigentlichen normal gerichteten Zug und einen längs der Ebene wirkenden Schub, und man wird überhaupt einsehen, daß ein innerer Druck und Zug nur in unserer Vorstellung wesentlich verschieden sind, daß sie sich dagegen für die analytische Untersuchung nur durch den Sinn ihrer Wirkung, also durch die Zeichen der Cosinus ihrer Richtungswinkel unterscheiden. Wir werden daher für die analytischen Beziehungen Zug und Druck als gleichbedeutend nehmen und unter demselben Zeichen begreifen; unter beiden dann aber auch insbesondere nur die normalen Wirkungen verstehen, welche zwei durch eine beliebige Schnittebene getrennten Theile eines stetigen Systems auf einander ausüben, und den längs dieses Schnittes wirkenden Schub als eine besondere Kraft besonders bezeichnen. Diese Zerlegung wird es einleuch-

tend machen, daß auch der Schub in einem bestimmten Punkte der Schnittebene nur als geometrischer Schub zu betrachten ist und das Aenderungsgesetz des physischen Schubes, welcher längs eines dem Coordinatensystem entsprechend begrenzten Theiles der Schnittebene wirksam ist, in Bezug auf die Aenderung der Fläche vorstellt. Während aber der normale Zug oder Druck durch die Lage der Schnittebene der Richtung nach vollständig bestimmt ist, ist es die Richtung des Schubes nur insofern, als dieselbe jener Ebene selbst angehören muß.

In dem besondern Falle, wo der Schnitt immer eine Gerade ist, werden die obengenannten geometrischen Kräfte die Aenderungsgesetze der entsprechenden physischen Kräfte in Bezug auf die Aenderung der Länge, und in diesem Falle ist dann auch die Richtung des Schubes, welcher nur längs des Schnittes stattfinden kann, vollständig bestimmt. Kommt endlich der Schnitt auf einen Punkt zurück, so gibt es keinen Schub mehr und der Zug oder Druck in diesem Punkte kann dann nur ein physischer sein.

Das Nähere hierüber wollen wir dem Orte vorbehalten, wo diese Kräfte zur Anwendung kommen, und ihre Wirkungen insbesondere untersucht werden.

Erster Abschnitt.

Aeußere Zustände eines veränderlichen Systems.

I. Augenblickliche Gesammtwirkung der äußern und innern Kräfte.

§. 5.

Mit dem Namen: Aeußere Zustände haben wir diejenigen Beziehungen bezeichnet, in denen ein veränderliches System von materiellen Punkten zu andern außerhalb desselben liegenden materiellen oder geometrischen Punkten steht, wenn es als ein zusammengehörendes Ganze betrachtet wird, und die Veränderungen in seinem Innern unberücksichtigt bleiben. In dieser Weise genommen wird die uns noch unbekannte Ortsveränderung unseres ganzen Planetensystems im Weltraume die äußere Bewegung desselben sein; eine glühend abgeschossene Kugel wird während ihrer äußern Bewegung sich abkühlen, und daher innerlich eine Bewegung besitzen, von welcher man bei der Betrachtung jener äußern gänzlich Umgang nimmt; eine Feder, welche, während sie vertikal herabfällt, in Schwingung begriffen ist, besitzt eine äußere und eine innere Bewegung; betrachten wir die Fallbewegung oder die äußere, so nehmen wir in Gedanken von den Schwingungen oder von der innern Bewegung Umgang; nehmen wir dagegen auf diese besonders Rücksicht, so sehen wir in der Vorstellung von jener äußern Bewegung ab, oder wir denken uns die Feder im Zustande des äußern Gleichgewichtes.

Um demnach diese in der Vorstellung begründete Trennung der äußern und innern Zustände eines veränderlichen Systems auch in der geometrischen Betrachtung sowie in der analytischen Untersuchung klar durchzuführen, nehmen wir in dem System einen beliebigen Punkt 0, dessen Lage in Bezug auf ein unverrückbares Coordinatensystem der x, y, z am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z bestimmt sei, als Anfang zweier beweglichen Coordinatensysteme der x', y', z' und

der ξ, η, ζ an, von denen das erste seine Achsen immer parallel zu den festen Achsen gerichtet hat, während die des zweiten entweder eine vorausbestimmte drehende Bewegung besitzen, oder immer eine bestimmte Lage im System haben, so daß sie entweder in jedem Augenblicke mit den drei Hauptachsen des in diesem Zeitpunkt als fest betrachteten Systems für den Punkt O zusammen fallen, oder so, daß zwei derselben immer in einer im System der Lage nach bestimmten Ebene liegen und eine von ihnen durch einen bestimmten Punkt dieser Ebene geht. Bezeichnen wir sodann die in einem bestimmten Augenblicke oder am Ende der Zeit t von außen auf die Punkte M_1, M_2, M_3, etc., wirkenden Kräfte mit P_1, P_2, P_3, etc.; die zwischen den Punkten M_1 und M_2, M_1 und M_3, M_2 und M_3, u. s. f. stattfindenden gegenseitigen innern Wirkungen, welche gleichzeitig an jedem der beiden betreffenden Punkte angreifen, mit $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, $J_{2,3}$, etc.; bezeichnen wir ferner die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, etc. mit den festen Achsen der x, y, z einschließen, wie früher mit $\widehat{P_1 x}$, $\widehat{P_1 y}$, $\widehat{P_1 z}$, $\widehat{P_2 x}$, $\widehat{P_2 y}$, $\widehat{P_2 z}$, u. s. f., die Winkel, welche die Richtung der in M_1 angreifenden innern Kraft $J_{1,2}$ mit denselben Achsen bildet, mit $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$; ebenso mit $\alpha_{1,3}$, $\beta_{1,3}$, $\gamma_{1,3}$ die Winkel, welche die Richtung der an M_1 angreifenden Kraft $J_{1,3}$ mit denselben Achsen macht, mit $\alpha_{2,3}$, $\beta_{2,3}$, $\gamma_{2,3}$ diejenigen zwischen diesen Achsen und der Richtung der an dem Punkte M_2 angreifenden Kraft $J_{2,3}$, u. s. f., so daß die an M_2 angreifende Kraft $J_{1,2}$ die Winkel $\pi-\alpha_{1,2}$, $\pi-\beta_{1,2}$, $\pi-\gamma_{1,2}$, die an M_3 angreifende Kraft $J_{1,3}$ die Winkel $\pi-\alpha_{1,3}$, $\pi-\beta_{1,3}$, $\pi-\gamma_{1,3}$, die an M_3 angreifende Kraft $J_{2,3}$ die Winkel $\pi-\alpha_{2,3}$, $\pi-\beta_{2,3}$, $\pi-\gamma_{2,3}$, u. s. f. mit den festen Coordinaten-Achsen einschließt, so erhalten wir für die zu den festen Achsen parallelen Componenten der fördernden Wirkung, welche von sämmtlichen Kräften des Systems auf den Punkt M_1 ausgeübt wird, die Werthe:

$$X_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 x} + J_{1,2} \cos \alpha_{1,2} + J_{1,3} \cos \alpha_{1,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Y_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 y} + J_{1,2} \cos \beta_{1,2} + J_{1,3} \cos \beta_{1,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Z_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 z} + J_{1,2} \cos \gamma_{1,2} + J_{1,3} \cos \gamma_{1,3} + \text{etc.} \;;$$

für den Punkt M_2 hat man in gleicher Weise die Ausdrücke:

$$X_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 x} + J_{1,2} \cos (\pi-\alpha_{1,2}) + J_{2,3} \cos \alpha_{2,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Y_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 y} + J_{1,2} \cos (\pi-\beta_{1,2}) + J_{2,3} \cos \beta_{2,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Z_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 z} + J_{1,2} \cos (\pi-\gamma_{1,2}) + J_{2,3} \cos \gamma_{2,3} + \text{etc.} \;;$$

für den Punkt M_3 findet man

$$X_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 x} + J_{1,3} \cos(\pi - \alpha_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \alpha_{2,3}) + \text{etc.} ,$$

$$Y_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 y} + J_{1,3} \cos(\pi - \beta_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \beta_{2,3}) + \text{etc.} ,$$

$$Z_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 z} + J_{1,3} \cos(\pi - \gamma_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \gamma_{2,3}) + \text{etc.} ,$$

und so fort für die übrigen Punkte des Systems.

Denkt man sich dann in dem betreffenden Augenblicke alle diese Punkte unter sich und mit dem festen Coordinatensystem der x, y, z oder auch mit dem beweglichen der x', y', z' oder der ξ, η, ζ fest verbunden, und zerlegt die vorhergehenden Componenten in ihre fördernden und drehenden Wirkungen in Bezug auf den Anfangspunkt der festen Coordinaten, so ergeben sich als entsprechende Componenten der fördernden Gesammtwirkung aller Kräfte die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . X &= P_1 \cos \widehat{P_1 x} + P_2 \cos \widehat{P_2 x} + P_3 \cos \widehat{P_3 x} + \text{etc.} = \Sigma . P \cos \widehat{P x} \\ \Sigma . Y &= P_1 \cos \widehat{P_1 y} + P_2 \cos \widehat{P_2 y} + P_3 \cos \widehat{P_3 y} + \text{etc.} = \Sigma . P \cos \widehat{P y} \\ \Sigma . Z &= P_1 \cos \widehat{P_1 z} + P_2 \cos \widehat{P_2 z} + P_3 \cos \widehat{P_3 z} + \text{etc.} = \Sigma . P \cos \widehat{P z} \end{aligned}\right\} , (1.$$

also dieselben Werthe, wie für ein festes System, da sich die fördernden Wirkungen aller innern Kräfte je zwei aufheben, und demnach keinen Einfluß auf die augenblickliche fördernde Gesammtwirkung haben.

§. 6.

Ebenso wird man sich leicht überzeugen, daß die innern Kräfte auch auf die drehende Gesammtwirkung keinen Einfluß haben können; denn sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M_1 am Ende der Zeit t in Bezug auf das unverrückbare Coordinatensystem, x_2, y_2, z_2 die des Punktes M_2, und so fort, so hat man für die drehenden Componenten M_z', M_y', M_x' des Punktes M_1 in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} M_z' = {} & P_1 (x_1 \cos \widehat{P_1 y} - y_1 \cos \widehat{P_1 x}) + J_{1,2} (x_1 \cos \beta_{1,2} - y_1 \cos \alpha_{1,2}) \\ & + J_{1,3} (x_1 \cos \beta_{1,3} - y_1 \cos \alpha_{1,3}) + \text{etc.} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y' = {} & P_1 (z_1 \cos \widehat{P_1 x} - x_1 \cos \widehat{P_1 z}) + J_{1,2} (z_1 \cos \alpha_{1,2} - x_1 \cos \gamma_{1,2}) \\ & + J_{1,3} (z_1 \cos \alpha_{1,3} - x_1 \cos \gamma_{1,3}) + \text{etc.} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x' = {} & P_1 (y_1 \cos \widehat{P_1 z} - z_1 \cos \widehat{P_1 y}) + J_{1,2} (y_1 \cos \gamma_{1,2} - z_1 \cos \beta_{1,2}) \\ & + J_{1,3} (y_1 \cos \gamma_{1,3} - z_1 \cos \beta_{1,3}) + \text{etc.} ; \end{aligned}$$

für den Punkt M_2 werden diese Componenten

$$M_Z'' = P_2(x_2 \cos \widehat{P_2 y} - y_2 \cos \widehat{P_2 x}) + J_{1,2}\Big(x_2 \cos(\pi - \beta_{1,2}) - y_2 \cos(\pi - \alpha_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(x_2 \cos \beta_{2,3} - y_2 \cos \alpha_{2,3}) + \text{etc.},$$

$$M_Y'' = P_2(z_2 \cos \widehat{P_2 x} - x_2 \cos \widehat{P_2 z}) + J_{1,2}\Big(z_2 \cos(\pi - \alpha_{1,2}) - x_2 \cos(\pi - \gamma_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(z_2 \cos \alpha_{2,3} - x_2 \cos \gamma_{2,3}) + \text{etc.},$$

$$M_X'' = P_2(y_2 \cos \widehat{P_2 z} - z_2 \cos \widehat{P_2 y}) + J_{1,2}\Big(y_2 \cos(\pi - \gamma_{1,2}) - z_2 \cos(\pi - \beta_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(y_2 \cos \gamma_{2,3} - z_2 \cos \beta_{2,3}) + \text{etc.};$$

für den Punkt M_3 findet man

$$M_Z''' = P_3(x_3 \cos \widehat{P_3 y} - y_3 \cos \widehat{P_3 x}) + J_{1,3}\Big(x_3 \cos(\pi - \beta_{1,3}) - y_3 \cos(\pi - \alpha_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(x_3 \cos(\pi - \beta_{2,3}) - y_3 \cos(\pi - \alpha_{2,3})\Big) + \text{etc.},$$

$$M_Y''' = P_3(z_3 \cos \widehat{P_3 x} - x_3 \cos \widehat{P_3 z}) + J_{1,3}\Big(z_3 \cos(\pi - \alpha_{1,3}) - x_3 \cos(\pi - \gamma_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(z_3 \cos(\pi - \alpha_{2,3}) - x_3 \cos(\pi - \gamma_{2,3})\Big) + \text{etc.},$$

$$M_X''' = P_3(y_3 \cos \widehat{P_3 z} - z_3 \cos \widehat{P_3 y}) + J_{1,3}\Big(y_3 \cos(\pi - \gamma_{1,3}) - z_3 \cos(\pi - \beta_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(y_3 \cos(\pi - \gamma_{2,3}) - z_3 \cos(\pi - \beta_{2,3})\Big) + \text{etc.},$$

und so fort für die übrigen Punkte des Systems.

Die entsprechenden Componenten der augenblicklichen drehenden Gesammtwirkung werden demnach

$$\Sigma . M_Z = \Sigma . P(x \cos \widehat{P y} - y \cos \widehat{P x})$$
$$+ J_{1,2}\Big((x_1 - x_2) \cos \beta_{1,2} - (y_1 - y_2) \cos \alpha_{1,2}\Big)$$
$$+ J_{1,3}\Big((x_1 - x_3) \cos \beta_{1,3} - (y_1 - y_3) \cos \alpha_{1,3}\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big((x_2 - x_3) \cos \beta_{2,3} - (y_2 - y_3) \cos \alpha_{2,3}\Big) + \text{etc.},$$

$$\Sigma . M_Y = \Sigma . P(z \cos \widehat{P x} - x \cos \widehat{P z})$$
$$+ J_{1,2}\Big((z_1 - z_2) \cos \alpha_{1,2} - (x_1 - x_2) \cos \gamma_{1,2}\Big)$$
$$+ J_{1,3}\Big((z_1 - z_3) \cos \alpha_{1,3} - (x_1 - x_3) \cos \gamma_{1,3}\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big((z_2 - z_3) \cos \alpha_{2,3} - (x_2 - x_3) \cos \gamma_{2,3}\Big) + \text{etc.},$$

$$\Sigma . M_x = \Sigma . P(y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py})$$
$$+ J_{1,2}\left((y_1 - y_2)\cos\gamma_{1,2} - (z_1 - z_2)\cos\beta_{1,2}\right)$$
$$+ J_{1,3}\left((y_1 - y_3)\cos\gamma_{1,3} - (z_1 - z_3)\cos\beta_{1,3}\right)$$
$$+ J_{2,3}\left((y_2 - y_3)\cos\gamma_{2,3} - (z_2 - z_3)\cos\beta_{2,3}\right) + \text{etc.}$$

beachtet man aber, daß wenn man durch

$l_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ die Entfernung der Punkte M_1 u. M_2

$l_{1,3} = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}$ „ „ „ „ M_1 u. M_3

$l_{2,3} = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}$ „ „ „ „ M_2 u. M_3

u. s. f.

bezeichnet, die Beziehungen:

$$\cos\alpha_{1,2} = \frac{x_1 - x_2}{l_{1,2}}, \quad \cos\beta_{1,2} = \frac{y_1 - y_2}{l_{1,2}}, \quad \cos\gamma_{1,2} = \frac{z_1 - z_2}{l_{1,2}},$$

$$\cos\alpha_{1,3} = \frac{x_1 - x_3}{l_{1,3}}, \quad \cos\beta_{1,3} = \frac{y_1 - y_3}{l_{1,3}}, \quad \cos\gamma_{1,3} = \frac{z_1 - z_3}{l_{1,3}},$$

$$\cos\alpha_{2,3} = \frac{x_2 - x_3}{l_{2,3}}, \quad \cos\beta_{2,3} = \frac{y_2 - y_3}{l_{2,3}}, \quad \cos\gamma_{2,3} = \frac{z_2 - z_3}{l_{2,3}},$$

u. s. f.

stattfinden, und daß demnach die Factoren

$(x_1-x_2)\cos\beta_{1,2} - (y_1-y_2)\cos\alpha_{1,2}$, $(x_1-x_3)\cos\beta_{1,3} - (y_1-y_3)\cos\alpha_{1,3}$,
$(x_2-x_3)\cos\beta_{2,3} - (y_2-y_3)\cos\alpha_{2,3}$, $(z_1-z_2)\cos\alpha_{1,2} - (x_1-x_2)\cos\gamma_{1,2}$,
u. s. f.

Null werden und zwar für jede beliebige Lage des Coordinatensystems, so wird man leicht finden, daß die vorhergehenden Ausdrücke für die Componenten $\Sigma . M_z$, $\Sigma . M_y$, $\Sigma . M_x$ der augenblicklichen drehenden Gesammtwirkung aller Kräfte auf die einfachen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . M_z &= \Sigma . P(x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) \\ \Sigma . M_y &= \Sigma . P(z \cos \widehat{Px} - x \cos \widehat{Pz}) \\ \Sigma . M_x &= \Sigma . P(y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py}) \end{aligned}\right\} \quad (2.$$

zurückkommen und demnach wieder dieselben sind, wie bei einem festen System, bei welchem die innerhalb des Systems thätigen Kräfte in

unserer Vorstellung durch starre unbiegsame und undehnbare Verbindungslinien ersetzt werden.

Man wird aus diesen Ableitungen ferner leicht erkennen, daß die fördernde Gesammtwirkung auch hier dieselbe bleibt für jeden Punkt innerhalb oder außerhalb des Systems, den man als Coordinaten-Anfang annimmt, also namentlich auch in Bezug auf unsern Punkt 0 und daß die drehende Gesammtwirkung in Bezug auf diesen beweglichen Coordinaten-Anfang und in Bezug auf die beweglichen Achsen aus den vorhergehenden Werthen (2) hervorgeht, wenn man statt der Coordinaten x, y, z eines dem System angehörenden Punktes in Bezug auf die festen Coordinaten-Achsen, dessen Coordinaten x′, y′, z′ oder ξ, η, ζ in Bezug auf eines der beweglichen Achsensysteme, und statt der Winkel $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ oder $\widehat{Px'}$, $\widehat{Py'}$, $\widehat{Pz'}$, welche von der Richtung der Kraft P mit den festen oder den sich parallel fortbewegenden Achsen gebildet werden, die Winkel $\widehat{P\xi}$, $\widehat{P\eta}$, $\widehat{P\zeta}$ zwischen derselben Richtung und den sich drehenden Achsen einführt, je nachdem man die Ausdrücke für die drehenden Componenten $\Sigma.M_Z$, $\Sigma.M_Y$, $\Sigma.M_X$, um die parallel fortschreitenden Achsen der z′, y′ und x′, oder die Momente $\Sigma.M_{Z}$, $\Sigma.M_{H}$, $\Sigma.M_{\Xi}$ um die in drehender Bewegung begriffenen Achsen der ζ, η und ξ darstellen will.

Für den einfacheren Fall, wo die Richtungen aller Kräfte parallel sind, und unabhängig von der Form des Systems parallel bleiben, hat man daher für die fördernden Componenten

$$\Sigma.X = \cos\widehat{Px}.\Sigma P \quad , \quad \Sigma Y = \cos\widehat{Py}.\Sigma P \quad , \quad \Sigma Z = \cos\widehat{Pz}.\Sigma P$$

und daher für die fördernde Resultirende R einfach

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2} = \Sigma P \; .$$

Die drehenden Componenten dagegen nehmen in diesem Falle nur dann eine einfachere Form an, wenn man eine der Achsen, z. B. die der x, parallel zur Richtung der Kräfte voraussetzt; sie werden so

$$\Sigma.M_Z = -\Sigma.Py \quad , \quad \Sigma.M_Y = \Sigma.Pz \quad , \quad \Sigma.M_X = 0$$

und geben als resultirendes Moment

$$M_R = \sqrt{(\Sigma.Py)^2 + (\Sigma.Pz)^2} \; .$$

Es wird aber nun, wie man sich leicht überzeugen wird, für jede beliebige Lage der Achsen die Bedingungsgleichung:

$$\Sigma X.\Sigma.M_X + \Sigma Y.\Sigma.M_Y + \Sigma Z.\Sigma.M_Z = 0$$

für das Vorhandensein einer allgemeinen Resultirenden befriedigt (vgl. N. B.,

§. 82.), und man hat zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Angriffspunktes dieser Resultirenden $R = \Sigma . P$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (R\mathfrak{X} - \Sigma . \widehat{Px}) \cos Py - (R\mathfrak{Y} - \Sigma . \widehat{Py}) \cos Px = 0 \\ (R\mathfrak{Z} - \Sigma . \widehat{Pz}) \cos Px - (R\mathfrak{X} - \Sigma . \widehat{Px}) \cos Pz = 0 \\ (R\mathfrak{Y} - \Sigma . \widehat{Py}) \cos Pz - (R\mathfrak{Z} - \Sigma . \widehat{Pz}) \cos Py = 0 \end{array}\right\}$$

welche unabhängig von der Lage des Coordinatensystems befriedigt werden, wenn man

$$R\mathfrak{X} = \Sigma . Px \quad , \quad R\mathfrak{Y} = \Sigma . Py \quad , \quad R\mathfrak{Z} = \Sigma . Pz \qquad (3.$$

setzt und daraus die Werthe zieht

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma P} \quad , \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma P}$$

Es gibt also auch bei einem veränderlichen System einen Mittelpunkt paralleler Kräfte und daher bei einem schweren veränderlichen System einen Schwerpunkt; die Lage dieser Punkte, von denen der letztere auch mit dem Mittelpunkte der Masse zusammenfällt, hängt aber von der Gestalt des Systems ab, und ist, wenn innere Veränderungen stattfinden, im Allgemeinen in jedem Augenblicke eine andere.

II. Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems.

§. 7.

Ein veränderliches System befindet sich im Zustande des äußeren Gleichgewichtes, wenn sich in demselben ein Coordinatensystem bestimmen läßt, welchem in Bezug auf ein festes Coordinatensystem weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung durch die an dem System thätigen äußern Kräfte ertheilt werden kann, wenn in irgend einem Augenblicke alle Punkte desselben unter sich und mit jenem ersten Coordinatensystem fest verbunden gedacht werden. Ein Coordinaten-System ist aber in seiner Lage durch eine Ebene oder durch drei Punkte bestimmt; es genügt demnach für das Erkennen des äußeren Gleichgewichtes, daß entweder drei Punkte des Systems in Ruhe bleiben, oder daß zwei Punkte in Ruhe sind, und daß die Ebene, welche durch diese und einen dritten Punkt des Systems gelegt wird, immer dieselbe Lage behält, oder daß ein Punkt in Ruhe ist und die Ebene,

welche durch ihn und zwei andere bestimmte Punkte des Systems gelegt werden kann, immer unverrückt bleibt. Natürlich ist bei dieser Vorstellung nur von dem ruhenden äußeren Gleichgewicht die Rede, und in dem Falle, wo an dem System auch Widerstände, wie die Reibung, thätig sind, von der Grenze des ruhenden Gleichgewichtes, da auch hier, wie bei einem festen System sich die fördernde und drehende Gesammtwirkung der Kräfte in Bezug auf die mit dem System fest verbundenen Coordinaten-Achsen fortwährend Null sein kann, während diese vermöge einer früher mitgetheilten Geschwindigkeit in einer gleichförmigen fortschreitenden oder drehenden Bewegung begriffen sind. Das ruhende Gleichgewicht setzt also einerseits nicht blos Gleichgewicht der Kräfte, sondern auch noch die Bedingung voraus, daß dem System keine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt worden ist, und auf der anderen Seite ist dasselbe umsomehr gesichert, je mehr die Widerstände ihre durch die Grenze des Gleichgewichtes bestimmte Größe überschreiten.

Was nun die Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte betrifft, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß diese der Form nach dieselben sein müssen, wie bei den festen Systemen; bezieht man also die fördernde und drehende Gesammtwirkung aller Kräfte auf den Anfangspunkt des Coordinatensystems der ξ, η, ζ, welches mit dem veränderlichen System in jedem Augenblicke als fest verbunden gedacht wird, und bezeichnet die fördernde Gesammtwirkung mit R, die drehende mit M_R, so sind

$$R = 0 \quad , \quad M_R = 0$$

die nothwendigen und genügenden Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines freien veränderlichen Systems. Beide lösen sich wieder in drei weitere Bedingungsgleichungen auf, nämlich R = 0 in die Bedingungen:

$$4.) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma . \Xi = \Sigma . P \cos \widehat{P\xi} = 0 \quad , \quad \Sigma . H = \Sigma . P \cos \widehat{P\eta} = 0 \, , \\ \Sigma . Z = \Sigma . P \cos \widehat{P\zeta} = 0 \, , \end{array} \right.$$

von denen jede das Gleichgewicht längs einer der Achsen der ξ, η und ζ verbürgt, und $M_R = 0$ in die Bedingungen:

$$5.) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma . M_Z = \Sigma . P (\xi \cos \widehat{P\eta} - \eta \cos \widehat{P\xi}) = 0 \, , \\ \Sigma . M_H = \Sigma . P (\zeta \cos \widehat{P\xi} - \xi \cos \widehat{P\zeta}) = 0 \, , \\ \Sigma . M_\Xi = \Sigma . P (\eta \cos \widehat{P\zeta} - \zeta \cos \widehat{P\eta}) = 0 \, , \end{array} \right.$$

von denen jede das Gleichgewicht um eine jener Achsen sichert.

Man schließt aus diesen Gleichungen, daß wenn die Kräfte P selbst sich nicht wesentlich mit der Lage ihrer Angriffspunkte im System ändern, das Gleichgewicht längs der drei Achsen oder das Gleichgewicht der fördernden Kräfte unabhängig ist von der Gestalt des Systems, daß aber das Gleichgewicht um die Coordinaten-Achsen oder das Gleichgewicht der drehenden Kräfte immer wesentlich durch die Gestalt des Systems bedingt wird und daher bald für alle Gestaltungen, die es, in einer bestimmten innern Bewegung begriffen, nach einander annimmt, oder nur für einzelne derselben stattfinden kann. Man kann daher bei einem veränderlichen System, wie bei einem in seiner Bewegung beschränkten materiellen Punkte zwischen dauerndem und augenblicklichem oder vorübergehendem Gleichgewicht unterscheiden. Der materielle Punkt befindet sich im Zustande des dauernden Gleichgewichtes (den Begriff: Gleichgewicht im allgemeinsten Sinn genommen), wenn die bewegende Kraft immer normal zu der Curve oder Fläche ist, auf welche er sich bewegt, oder was auf dasselbe hinauskommt (vergl. I. B. §§. 93 u. 108), wenn er sich gleichförmig bewegt; ist dagegen die bewegende Kraft nur in einzelnen Punkten der Bahn des Bewegten normal zu der festen Curve oder Fläche, so findet in diesen Punkten augenblickliches und vorübergehendes Gleichgewicht statt. Ebenso wird das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems ein dauerndes sein, wenn die Gleichgewichtsbedingungen (5) für alle Formen, welche dasselbe bei seiner innern Bewegung annimmt, befriedigt werden; ein augenblickliches dagegen, wenn sie nur für einzelne dieser Gestaltungen befriedigt werden. Im ersten Falle kann das äußere Gleichgewicht des veränderlichen Systems zugleich ruhendes Gleichgewicht sein, im letztern nur dann, wenn bei der entsprechenden Gestalt des Systems auch inneres ruhendes Gleichgewicht stattfindet. In jedem Falle wird ein freies veränderliches System sich im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befinden, wenn keine äußern Kräfte P an demselben angreifen. So würden zwei oder mehrere Körper, z. B. ein Planetensystem, als im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindlich zu betrachten sein, wenn sie, blos ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen, ganz allein im Raume vorhanden wären. Im Uebrigen bietet sich für die Untersuchung der Bedingungen des äußern Gleichgewichtes bei einem freien veränderlichen System bis jetzt fast gar keine Anwendung dar, weßwegen ich auch darauf nicht weiter eingehen werde.

Wenn die Kräfte P der Richtung nach alle parallel sind, also alle Winkel $\widehat{P\xi}$, $\widehat{P\eta}$, $\widehat{P\zeta}$ gleich werden, so kommen die drei ersten

Bedingungsgleichungen (4) wieder auf die einzige

6.) $$\Sigma . P = R = 0\,,$$

zurück, und die drei folgenden können durch die einfacheren

7.) $$\Sigma . P\xi = 0\,, \quad \Sigma . P\eta = 0\,, \quad \Sigma . P\zeta = 0$$

ersetzt werden, welche selbst wieder auf zwei, wie

$$\Sigma . P\eta = 0\,, \quad \Sigma . P\zeta = 0\,,$$

zurückkommen, wenn eine der Achsen, z. B. die der ξ parallel zur Richtung der Kräfte angenommen wird, wie es aus dem, was am Ende des vorigen Paragraphen über die Gesammtwirkung paralleler Kräfte gesagt wurde, leicht zu schließen ist, und für die festen Systeme im II. Abschnitt des II. Buches ausführlich erörtert wurde.

§. 8.

Die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines in seiner äußern Bewegung beschränkten veränderlichen Systems werden im Allgemeinen wieder am sichersten dadurch abgeleitet werden, daß man die für jene Beschränkungen nothwendigen Widerstände in die Gleichungen (4) und (5) einführt, und dabei die Gestalt des Systems als gegeben oder zwischen gewissen Grenzen veränderlich annimmt, wenn dieselbe Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen erhält.

Nehmen wir sogleich als Beispiel die in §. 132 des II. Buches behandelte einfache Aufgabe mit der Abänderung, daß die Gerade eine veränderliche und in Schwingungen begriffen sei, und sprechen wir jene Aufgabe nun so aus.

Eine schwere elastische Gerade BC, Fig. 1, stützt sich mit ihren Endpunkten an die Schenkel AX und AY eines rechten Winkels; von denen AY mit der Richtung der Schwere parallel ist; alle Punkte derselben sind in Schwingungen begriffen, welche in der Ebene des Winkels XAY liegen und ihr in irgend einem Augenblicke eine Gestalt geben, die in Bezug auf die Gerade BC als Abscissenachse und den Punkt B als Anfangspunkt durch die Gleichung:

$$\eta = h \sin \pi \frac{\xi}{l}$$

ausgedrückt werde, so daß h die augenblickliche Ausweichung der Mitte D von BC und l die augenblickliche Länge der Geraden BC bezeichnet; es soll unter Berücksichtigung der Reibung die Intensität

der längs der Geraden AX gerichteten Kraft P gesucht werden, welche die Gerade BC, wenn sie mit der AX den Winkel φ bildet, am Ausgleiten hindert, also im Gleichgewicht erhält.

Die äußern Kräfte, welche an der Geraden BC thätig sind, sind die gesuchte Kraft P, die Widerstände N_1 und N_2 der Geraden AX und AY und das Gewicht Q der Geraden BC, welches immer im Schwerpunkt derselben angreift, für welches also dieser letztere zunächst zu bestimmen ist. Die Gleichung:

$$\eta = h \sin \pi \frac{\xi}{l}$$

gibt das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pi \frac{h}{l} \cos \pi \frac{\xi}{l}$$

und damit die Länge $l_{,}$ der gebogenen Linie BDC durch das Integral:

$$l_{,} = \int_0^l d\xi \,.\, \sqrt{1 + \frac{\pi^2 h^2}{l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}} \,.$$

Setzt man dann voraus, daß h gegen l immer hinreichend klein bleibe, um das Glied $\frac{\pi^4 h^4}{l^4} \cos^4 \pi \frac{\xi}{l}$ und die folgenden mit hinreichender Annäherung vernachlässigen zu können, so erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{\pi^2 h^2}{l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}} = 1 + \frac{\pi^2 h^2}{2 l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}$$

und damit

$$l_{,} = l \left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{4 l^2}\right).$$

Daraus folgt dann umgekehrt

$$l = \frac{l_{,}^3}{4 l_{,}^2 + \pi^2 h^2}$$

als augenblickliche Länge der Geraden BC, weil man nun mit gleicher Annäherung in dem Nenner des Bruches $\frac{\pi^2 h^2}{l^2}$ die $l_{,}$ für die l setzen kann.

Man hat dann ferner, indem man die Coordinaten des Schwerpunktes der Curve BD'C mit $\xi_{,}$ und $\eta_{,}$ bezeichnet, und unter derselben Voraussetzung in Bezug auf h und l

$$l\xi_1 = \int_0^l d\xi\,.\,\xi\sqrt{1+\frac{\pi^2h^2}{l^2}\cos^2\pi\frac{\xi}{l}} = \frac{1}{2}\,l^2\left(1+\frac{\pi^2h^2}{4l^2}\right)$$

und daraus, wie ohnehin einleuchtet,

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\,l\,.$$

Ebenso ergibt sich nach und nach

$$l\eta_1 = \int_0^l d\xi\,.\,\eta\sqrt{1+\frac{\pi^2h^2}{l^2}\cos^2\pi\frac{\xi}{l}} = h\int_0^l d\xi\,.\sin\pi\frac{\xi}{l}\left(1+\frac{\pi^2h^2}{2l^2}\cos^2\frac{\pi\xi}{l}\right)$$

$$= h\mathop{\Delta}_l^0\left(\frac{l}{\pi}\cos\pi\frac{\xi}{l}+\frac{\pi h^2}{6l}\cos^3\pi\frac{\xi}{l}\right)$$

$$= \frac{h}{3\pi l}\left(6l^2+\pi^2h^2\right)$$

und daraus folgt mit dem Werthe von l,

$$\eta_1 = \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6l^2+\pi^2h^2}{4l^2+\pi^2h^2}$$

Dieser Werth bezieht sich insbesondere auf die Ausbiegung BDC im Sinne der positiven η, für die Ausbiegung BDC wird h, also auch η_1 negativ. Wandeln wir nun diese Coordinaten ξ_1 und η_1 des Schwerpunktes der gebogenen Linie BD′C in Bezug auf BC als Achse der ξ in die Coordinaten X und Y in Bezug auf die AX und AY als Achsen der x und y um, so erhalten wir für eine solche Lage der Geraden BC, daß sie mit der AX den Winkel φ bildet, die Werthe:

$$X = \tfrac{1}{2}l\cos\varphi - \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6l^2+\pi^2h^2}{4l^2+\pi^2h^2}\sin\varphi\,,$$

$$Y = \tfrac{1}{2}l\sin\varphi - \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6l^2+\pi^2h^2}{4l^2+\pi^2h^2}\cos\varphi\,.$$

Im Uebrigen bleibt Alles, wie in §. 132 des II. Buches; man hat daher mit derselben Bezeichnung wie dort für das äußere Gleichgewicht folgende Bedingungen:

$$\Sigma.P\cos\widehat{Px} = N' - fN - P = 0$$

$$\Sigma.P\sin\widehat{Px} = -Q + N + fN' = 0$$

$$\Sigma.P(x\sin\widehat{Px} - y\cos\widehat{Px}) = -QX + Nl\cos\varphi - N'l\sin\varphi = 0\,.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben wieder die Werthe von N und N' nämlich:

$$N = \frac{Q - f'P}{1 + ff'} , \quad N' = \frac{P + fQ}{1 + ff'}$$

und damit folgt aus der dritten, wenn man für X zur Abkürzung

$$X = \tfrac{1}{2} l \cos\varphi - \eta, \sin\varphi$$

einführt, die gesuchte Beziehung zwischen P und Q:

$$Q(1 + ff')(\eta, \sin\varphi - \tfrac{1}{2} l \cos\varphi) + (Q - f'P) l \cos\varphi$$
$$- (P + fQ) l \sin\varphi = 0$$

oder in Bezug auf P aufgelöset:

$$P = \tfrac{1}{2} Q \frac{l \cos\varphi(1 - ff') + 2\eta, \sin\varphi(1 + ff') - 2fl \sin\varphi}{l(\sin\varphi + f' \cos\varphi)} \quad \ldots \ldots (a.$$

Setzen wir zuerst die Reibung an beiden Geraden gleich Null voraus, so wird

$$P = \tfrac{1}{2} Q \left(\cot\varphi + \frac{2\eta,}{l}\right)$$

und es kann daraus entweder die Kraft P bestimmt werden, welche die biegsame Linie in einer gegebenen Lage und bei einer bestimmten Biegung im Gleichgewicht erhält, oder der Werth von $\eta,$ und damit der von h, also die Ausbiegung in der Mitte des Stabes, welche für eine gegebene Kraft P stattfinden darf. Für eine veränderliche Biegung müßte auch die Kraft P veränderlich sein, und eine constante Kraft könnte die Linie BD'C nicht im Zustand des dauernden und ruhenden Gleichgewichtes erhalten, während sie schwingt.

Mit Hülfe der Reibung kann jedoch dieses Gleichgewicht bei kleinen Schwingungen stattfinden und eine constante Kraft P bestimmt werden, oder die Lage der Geraden BC, für welche dasselbe stattfindet, wenn man für h diejenige größte Ausweichung nimmt, für welche die Kraft P oder der Winkel φ den größern Werth haben muß; denn man wird leicht einsehen, daß dann für jede andere Ausweichung ebenfalls das Gleichgewicht bestehen wird, weil die Unterschiede in der Größe der Kraft P oder des Winkels φ bei kleinen Schwingungen nicht so groß werden, daß sie nicht durch die nach jeder Seite hin wirkende Reibung ausgeglichen würden.

Um dieß weiter auszuführen, wollen wir insbesondere nur den Fall betrachten, in welchem P = 0 sein und die schwere Linie durch die

Reibung allein im Gleichgewicht bleiben soll. Man hat dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$l \cos\varphi (1 - f f') + 2\eta_{,} \sin\varphi (1 + f f') - 2 f l \sin\varphi = 0$$

und zieht daraus für den Winkel φ den Ausdruck:

$$\cot\varphi = \frac{2 f l - 2\eta_{,}(1 + f f')}{l(1 - f f')}$$

oder für $f' = f$

b.) $$\cot\varphi = \frac{2 f l - 2\eta_{,}(1 + f^2)}{l(1 - f^2)}.$$

Dieser Werth zeigt, daß φ den größten Werth erhalten muß, wenn $\eta_{,}$ also auch h den größten positiven Werth hat oder nach unserer Lage der Achsen der ξ und η, wenn die Linie BC gegen den Anfangspunkt A convex ist; es ist daher zu untersuchen, ob und unter welchen Verhältnissen das Gleichgewicht besteht, für den entsprechenden größten negativen Werth von h, für welchen die Grenze des Gleichgewichtes stattfinden würde, wenn φ den der Gleichung:

c.) $$\cot\varphi = \frac{2 f l + 2\eta_{,}(1 + f^2)}{l(1 - f^2)}$$

entsprechenden Werth erhält.

Das Gleichgewicht findet jedenfalls statt, sobald der Reibungscoeffizient größer ist, als es die Bedingung für die Grenze des Gleichgewichtes erfordert. Aus der Bedingung (c) für ein negatives $\eta_{,}$ folgt aber

$$f^2 (l \cot\varphi - 2\eta_{,}) + 2 f l = l \cot\varphi + 2\eta_{,}$$

und

$$f = \frac{\sqrt{l^2 + (l \cot\varphi - 2\eta_{,})(l \cot\varphi + 2\eta_{,})} - l}{l \cot\varphi + 2\eta_{,}};$$

aus der Bedingung (b) dagegen zieht man für ein positives $\eta_{,}$

$$f = \frac{\sqrt{l^2 + (l \cot\varphi + 2\eta_{,})(l \cot\varphi - 2\eta_{,})} - l}{l \cot\varphi - 2\eta_{,}},$$

und dieser Werth ist für dasselbe φ immer größer als der erste, so lange $\cot\varphi$ nicht negativ wird, was nach den hier stattfindenden Bedingungen nicht eintreten kann. Der größte mögliche Werth von φ ist $\frac{1}{2}\pi$ und für diesen wird mit einem positiven $\eta_{,}$

$$f = \frac{\sqrt{l^2 - 4\eta_{,}^2} - l}{-2\eta_{,}} = \frac{l\left(1 - \frac{2\eta_{,}^2}{l^2}\right) - l}{-2\eta_{,}} = \frac{\eta_{,}}{l};$$

für ein negatives η, wird demnach auch f negativ, weil für eine solche Ausbiegung BD'C Fig. 2 die Reibung die Richtung und das Zeichen wechseln muß.

Aehnliche Verhältnisse ergeben sich dann auch, wenn die Kraft P nicht Null ist, und es wird mittels der Reibung immer Gleichgewicht bestehen, wenn es für die größte positive Ausweichung h stattfindet.

§. 9.

Im Allgemeinen werden die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines in seiner Bewegung beschränkten veränderlichen Systems die Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma . \Xi - \Sigma . N \cos \widehat{N\xi} = 0 \quad , \quad \Sigma . H - \Sigma . N \cos \widehat{N\eta} \\ \Sigma . Z - \Sigma . N \cos \widehat{N\zeta} \end{array}\right\}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma . M_Z - \Sigma . N (\xi \cos \widehat{N\eta} - \eta \cos \widehat{N\xi}) = 0 \\ \Sigma . M_H - \Sigma . N (\zeta \cos \widehat{N\xi} - \xi \cos \widehat{N\zeta}) = 0 \\ \Sigma . M_\Xi - \Sigma . N (\eta \cos \widehat{N\zeta} - \zeta \cos \widehat{N\eta}) = 0 \end{array}\right\},$$

worin N einen der für jene Beschränkung nothwendigen Widerstände vorstellt, und $\widehat{N\xi}$, $\widehat{N\eta}$, $\widehat{N\zeta}$ die Winkel sind, welche die Richtung desselben mit den Achsen der ξ, η und ζ einschließt.

Es wird demnach äußeres Gleichgewicht stattfinden, wenn aus diesen Gleichungen die unbekannten N eliminirt werden können, und die durch diese Elimination sich ergebenden Gleichungen durch die äußern Kräfte befriedigt werden; diese Gleichungen werden ferner lehren, ob ein dauerndes äußeres Gleichgewicht stattfinden kann, oder nur ein vorübergehender Gleichgewichtszustand, und sie werden im letztern Falle zugleich dazu dienen, die Gestalt des Systems zu bestimmen, für welche ein solcher Zustand eintritt, mit welcher also das System im Zustand des innern Gleichgewichtes verharren muß, wenn das äußere Gleichgewicht auf die Dauer bestehen soll.

Im Allgemeinen wird hier aber auch der Fall eintreten, daß mit der äußern Bewegung auch die innere beschränkt wird, daß also unter den Widerständen N auch solche vorkommen, welche von der Beschränkung der innern Bewegung herrühren und daher nur eliminirt werden können, wenn man die innern und äußern Zustände des Systems neben einander betrachtet. Es leuchtet ein, daß in einem solchen Falle

nur dann dauerndes äußeres Gleichgewicht bestehen kann, wenn auch inneres Gleichgewicht stattfindet, wenigstens in Bezug auf diejenigen Theile des Systems, welche durch die äußern Hindernisse eine Beschränkung in ihrer Bewegung erleiden. Beispiele für solche Fälle bieten insbesondere die fortschaffenden Maschinen oder Locomotiven und überhaupt alle durch innere Kräfte mittels äußerer Hindernisse sich fortbewegende Systeme, also namentlich Menschen und Thiere.

Die ebengenannten Beispiele zeigen ferner, daß die Beschränkung der innern Bewegung auch blos in der Reibung bestehen kann, welche durch die aus der äußern Beschränkung entstehenden Druckkräfte N zwischen entsprechenden Punkten des Systems und der die Bewegung beschränkenden Flächen, auf welchen sich diese Punkte gleitend bewegen können, hervorgerufen wird. In allen diesen wie in den vorher berührten Fällen können aber die Bedingungen für das Gleichgewicht nur durch die Aufstellung der Gleichungen für die äußere und die innere Bewegung des Systems vollständig ermittelt werden, weßhalb es zwecklos wäre, hier in eine weitere Erörterung darüber einzugehen.

Ebensowenig kann hier auf die Bestimmung der Druckkräfte N für die einzelnen in ihrer Bewegung beschränkten Punkte des Systems näher eingegangen werden, da diese Bestimmung im Allgemeinen die Kenntniß des innern Zustandes voraussetzt, namentlich dann, wann das System längs einer Linie oder in der ganzen Ausdehnung eines Flächentheiles mit einer festen Fläche in Berührung steht.

In einigen besondern Fällen lassen sich indessen wie bei den festen Systemen (II. Buch, §. 137) die Gleichgewichtsbedingungen ohne unmittelbare Anwendung der unbekannten Druckkräfte N erkennen, und es liegt uns hier nur ob, indem wir diese Fälle kurz wiederholen, einige Beispiele bei veränderlichen Systemen anzuführen.

1) Wenn das System einen festen Punkt enthält, so wird man diesen als Anfangspunkt des festen und des beweglichen Coordinaten-Systems wählen, und in Bezug auf ihn die augenblickliche fördernde und drehende Wirkung aller Kräfte für eine beliebige Gestalt des Systems untersuchen. Die fördernde Resultirende R wird durch den Widerstand des festen Punktes, von welchem vorausgesetzt wird, daß er wenigstens ebenso groß sei, als R, unwirksam gemacht; es sind daher nur noch die drehenden Wirkungen M_X, M_Y, M_Z oder $M_{\mathfrak{X}}$, M_H, $M_{\mathfrak{Z}}$ zu berücksichtigen, d. h. es ist zu untersuchen, ob die Gleichungen:

$$\Sigma . M_X = 0 \quad ; \quad \Sigma . M_Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0$$

oder

$$\Sigma . M_{\mathfrak{X}} = 0 \quad , \quad \Sigma . M_H = 0 \quad , \quad \Sigma . M_{\mathfrak{Z}} = 0$$

für jede Gestalt des Systems, oder für welche Gestaltungen desselben sie befriedigt werden; im ersten Falle wird das äußere Gleichgewicht unabhängig von dem innern Zustande des Systems stattfinden und dasselbe daher auch ein ruhendes Gleichgewicht sein; im zweiten Falle wird das Gleichgewicht nur ein augenblickliches oder vorübergehendes Gleichgewicht der Kräfte sein, wenn das System in innerer Bewegung begriffen ist.

So wird sich ein schwerer elastischer Stab, welcher in seinem Schwerpunkt unterstützt ist, im Zustande des dauernden und ruhenden äußern Gleichgewichtes befinden, während seine beiden Hälften in Schwingungen begriffen sind; ebenso eine cylindrische Spiralfeder, deren Achse wagrecht oder lothrecht gerichtet und deren Schwerpunkt unterstützt ist und während der parallel zur Achse stattfindenden Schwingungen ihrer Windungen unterstützt bleibt.

2) Wenn das System zwei feste Punkte enthält oder mehrere, welche in derselben Geraden liegen, so wird man die Verbindungslinie dieser beiden Punkte als eine der Coordinatenachsen nehmen, z. B. als die der z und ζ; die fördernde Resultirende R wird dann durch den Widerstand jener festen Punkte unwirksam gemacht, ebenso wie die Momente $\Sigma . M_X$ und $\Sigma . M_Y$ oder $\Sigma . M_\Xi$ und $\Sigma . M_H$, welche das System um die zu der festen Achse der z oder ζ senkrechten Achsen der x und y oder ξ und η drehen wollen. Es bleibt also das äußere Gleichgewicht nur noch von dem Momente $\Sigma . M_Z$ oder $\Sigma . M_Z$ abhängig, und wird durch die einzige Gleichung:

$$\Sigma . M_Z = 0$$

verbürgt. Die fördernden Componenten $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$ und $\Sigma . Z$ oder die entsprechenden für die Achsen der ξ, η und ζ dienen aber in Verbindung mit den vorhergenannten Momenten, welche auf das Gleichgewicht selbst keinen Einfluß haben, dazu, das Maaß des kleinsten Widerstandes zu bestimmen, welchen die beiden festen Punkte zusammen zu leisten haben, damit jene fördernde Wirkung auf die Dauer unwirksam bleibt. Bei der Betrachtung veränderlicher Systeme wird es aber in den meisten Fällen nothwendig sein, diese Widerstände für jeden der festen Punkte einzeln zu bestimmen, oder mit andern Worten die drei fördernden Kräfte $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$, $\Sigma . Z$ in parallele Componenten zu zerlegen, deren Angriffspunkte jene festen Punkte sind, und zwar um so mehr, als hier auch noch Widerstände hinzukommen, welche jene Punkte gegen die Wirkungen der innern Kräfte zu leisten haben, und die meistens von einem jeden derselben in einer andern Richtung zu leisten sind, sei es, daß sich das System im Zustande des innern Gleichgewichtes

befindet oder nicht. Für die Bestimmung des Widerstandes, welchen jeder einzelne Stützpunkt zu leisten hat, ist daher die Kenntniß der innern Zustände des Systems unentbehrlich.

Ein Beispiel für diesen Fall gibt uns eine an zwei Endpunkten in lothrechter Lage befestigte und gespannte ihrer Länge nach elastische Linie (eine Saite), welche sich im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befindet, während ihre Theile nach beliebigen Richtungen schwingen; eine in wagrechter Lage gespannte Saite dagegen wird, wenn sie schwer ist, strenggenommen nur dann den Zustand des dauernden äußern Gleichgewichtes besitzen, wenn ihre Schwingungen in lothrechter Richtung stattfinden, weil bei wagrechten Schwingungen durch ihr Gewicht eine veränderliche drehende Wirkung eintritt, welche der Schwingungsebene eine lothrechte Lage zu geben strebt. Auf gleiche Weise verhält es sich mit einer senkrecht zu ihrer Länge elastischen Linie (einem sehr dünnen elastischen Stabe), welcher in zwei an dem einen Ende liegenden Punkten loth- oder wagrecht befestigt ist, und sich in Folge dessen im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, während dessen anderes Ende frei schwingt; diese Schwingungen dürfen bei lothrechter Befestigung wieder nach jeder Richtung hin stattfinden, bei wagrechter Befestigung aber nur in einer lothrechten Ebene, wenn der Stab schwer ist und sich, wie dieß bei zwei festen Punkten immer vorausgesetzt wird, um deren Verbindungslinie drehen läßt *). Endlich kann man eine in lothrechter Lage aufgestellte Kanone, aus welcher eine Kugel abgeschossen wird, als hieher gehörendes Beispiel betrachten, wenn man von der Umdrehung der Erde Umgang nimmt und die Luft unbewegt voraussetzt, so daß sich der Mittelpunkt der abgeschossenen Kugel immer in der Verlängerung der geometrischen Achse der Kanone bewegt. Ganz rationell betrachtet kann dieses System selbst als Beispiel für den vorhergehenden Fall dienen, da es für das Gleichgewicht genügt, daß der Schwerpunkt der Kanone unterstützt ist und dazu nur ein einziger fester Punkt im System erfordert wird. Nimmt man die lothrechte Achse der Kanone als Achse der z, so werden nach unseren Voraussetzungen immer die drei Gleichungen:

$$\Sigma . M_x = 0 \quad , \quad \Sigma . M_y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_z = 0$$

befriedigt und daher das System immer im Zustande des äußern Gleichgewichtes sein.

*) Ein Widerstand gegen das Drehen kann nur stattfinden, wenn noch ein dritter fester Punkt vorhanden ist, welcher außerhalb der Verbindungslinie der beiden ersten liegt.

3) Wenn ein System drei feste Punkte enthält, welche nicht in derselben Geraden liegen, so befindet sich dasselbe nach der im §. 7 gegebenen Erklärung immer im Zustande des äußern Gleichgewichtes, weil diese drei Punkte immer die Lage eines Coordinatensystems bestimmen, welches durch die äußern Kräfte nicht verrückt werden kann, wenn man sich in irgend einem Augenblicke alle Theile des Systems fest verbunden denkt.

In diesem Falle befindet sich demnach jede feststehende Maschine, ob sie in Bewegung oder in Ruhe ist; ein in beliebiger Lage fest eingeklemmter elastischer Stab, welcher im Zustande des innern Gleichgewichtes oder in schwingender Bewegung begriffen sein kann, u. s. f. Es gehört hieher aber auch eine in irgend einer Lage befestigte Kanone mit der daraus abgeschossenen Kugel, und die Bewegung der letztern ist ebenso, wie die verschiedenen Bewegungen der einzelnen Theile einer Maschine als innere Bewegung derselben zu betrachten.

4) Wenn ein System sich auf eine feste Ebene stützt und zwar mit einem einzigen Punkte, so kann jene als eine der Coordinaten-Ebenen z. B. die der xy, dieser als Coordinaten-Anfang genommen werden, und es wird dauerndes Gleichgewicht bestehen, wenn die zur festen Ebene parallelen fördernden Wirkungen $\Sigma.X$ und $\Sigma.Y$, und alle drehenden Wirkungen für jede Gestalt des Systems Null sind, wofür sich die fünf Bedingungen ergeben:

$$\Sigma.X = 0 \quad , \quad \Sigma.Y = 0$$
$$\Sigma.M_X = 0 \quad , \quad \Sigma.M_Y = 0 \quad , \quad \Sigma.M_Z = 0 .$$

Die fördernde Componente $\Sigma.Z$ ist zugleich allgemeine Resultirende und gibt das Maaß des kleinsten Widerstandes, welchen die feste Ebene zu leisten hat, damit das Gleichgewicht auf die Dauer besteht.

Beispiele für diesen Fall bieten sich nur wenige dar. Ein elastischer schwerer Kreis, welcher sich so auf eine wagrechte Ebene stützt, daß seine Ebene zur Richtung der Schwere parallel ist, wird sich im Zustande des äußeren Gleichgewichtes befinden, während er in einer schwingenden Bewegung begriffen sein kann, bei welchen sein höchster Punkt sich immer in lothrechter Richtung auf und niederbewegt, und die Endpunkte seines horizontalen Durchmessers immer in gleichen Abständen von der durch den Stützpunkt, den Mittelpunkt und den höchsten Punkt gelegten lothrechten Geraden bleiben. Ferner ist hieher zu rechnen eine homogene schwere Kugel, welche sich auf eine horizontale Ebene stützt und im Abkühlen begriffen ist oder welche überhaupt ihre Temperatur ändert. Eine nicht homogene Kugel, deren Schwerpunkt außerhalb

des Mittelpunktes liegt, wird auch mittels der Reibung auf einer geneigten Ebene im Gleichgewicht sein, wenn der Reibungscoeffizient größer ist als die Tangente des spitzen Winkels α, welchen die Normale zu dieser geneigten Ebene mit einer lothrechten Geraden einschließt, und wenn der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte größer ist als $r \sin \alpha$ (wo r den Halbmesser der Kugel bezeichnet), und zwar in einer solchen Lage, daß der Schwerpunkt lothrecht über dem Stützpunkte liegt (vergl. II. B. §. 128). Dieses äußere Gleichgewicht wird aber im Allgemeinen nur stattfinden, wenn zugleich inneres Gleichgewicht besteht; eine Aenderung der Temperatur z. B. wird auch eine Aenderung in der Lage des Schwerpunktes in Bezug auf den Mittelpunkt und in Bezug auf den Stützpunkt zur Folge haben und eine kleine Drehung der Kugel bewirken, welche selbst wieder durch die Reibung ein Fortwälzen derselben veranlaßt, und die Kugel wird so eine doppelte äußere Bewegung erhalten, eine fortschreitende und eine drehende.

5) Ganz ähnliche Verhältnisse finden auch statt, wenn sich das System mit zwei oder mehreren Punkten, welche in gerader Linie liegen auf die feste Ebene stützt; man kann diese Gerade als Achse der x nehmen und wird dadurch die fünf Bedingungsgleichungen des vorhergehenden Falles auf vier reduziren, nämlich:

$$\Sigma . X = 0 \;,\quad \Sigma . Y = 0 \;,\quad \Sigma . M_X = 0 \;,\quad \Sigma . M_Z = 0 \;,$$

wobei noch vorausgesetzt wird, daß das Moment $\Sigma . M_Y$ nur eine solche Drehung erzeugen will, welche durch den Widerstand der Ebene und die förderndе Componente $\Sigma . Z$ unwirksam gemacht wird, eine Voraussetzung, welche darauf hinaus kommt, daß die dieser fördernden Kraft $\Sigma . Z$ gleiche und parallele allgemeine Resultirende aller Kräfte die Achse der x noch zwischen den äußersten Stützpunkten trifft und, was sich ohnehin versteht, das System gegen die Ebene drückt.

Auch für diesen Fall sind die Beispiele nicht zahlreich; wir finden übrigens leicht einige, wenn wir den schweren Kreis und die Kugel der vorhergehenden Aufgabe durch einen elastischen Ring und einen vollen oder hohlen Cylinder ersetzen.

6) Stützt sich endlich das System mit drei oder mehreren nicht in derselben Geraden liegenden Punkten auf eine Ebene, welche die der xy sei, so genügen die drei Gleichungen:

$$\Sigma . X = 0 \;,\quad \Sigma . Y = 0 \;,\quad \Sigma . M_Z = 0$$

um das äußere Gleichgewicht desselben zu sichern, wenn man sich vorher überzeugt hat, daß die drehenden Wirkungen $\Sigma . M_X$ und $\Sigma . M_Y$ auch wirklich durch den Widerstand der Ebene und die fördernde Kraft $\Sigma . Z$

unwirksam gemacht werden, oder daß die Richtung der dieser letztern gleiche und parallele allgemeine Resultirende die feste Ebene in einem Punkte schneidet, welcher innerhalb des durch die geradlinige Verbindung der einzelnen Stützpunkte entstehenden Drei= oder Vieleckes liegt.

Beachtenswerthe, wenn auch nur bedingte Beispiele zu diesem Falle liefern uns die fortschaffenden Maschinen (Locomotiven), entweder auf einer horizontalen Ebene unter der Voraussetzung, daß keine Reibung vorhanden ist, oder auf einer geneigten Ebene, für welche der Reibungs-Coefficient nicht größer ist als die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die wagrechte Ebene, und auf welcher die Locomotive sich aufwärts bewegen will. In beiden Fällen wird sich die Locomotive ungeachtet sie in innerer Bewegung begriffen ist, im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befinden, und man wird daraus klar erkennen, daß für die Bewegung auf horizontaler Ebene allein die Reibung, für die aufsteigende Bewegung auf einer geneigten Ebene dagegen der Unterschied zwischen der Reibung und der zur geneigten Ebene parallelen Componenten des Gewichtes der Locomotive als die eigentliche fortbewegende äußere Kraft des Systems zu betrachten ist. Ich werde darauf später ausführlicher zurückkommen.

Für die Bestimmung des Druckes, welchen die feste Ebene in den einzelnen Stützpunkten zu erleiden hat, ist in Betreff der beiden letzten Fälle noch zu bemerken, daß sich derselbe, wie bei einem festen System, nur dann ohne Rücksicht auf die innere Beschaffenheit des Systems bestimmen läßt, wenn im fünften Falle nur zwei oder im letzten nur drei Stützpunkte vorhanden sind; bei einer größern Anzahl von Stützpunkten ist, wie schon beim zweiten Falle bemerkt wurde, die Kenntniß der innern Zustände des Systems erforderlich, wenn für jeden einzelnen der Druck bestimmt angegeben werden soll. Um so mehr wird diese Kenntniß nothwendig sein, wenn nicht mehr in einzelnen getrennten Punkten, sondern in einer stetig auf einander folgenden Reihe von Punkten Druck stattfindet.

§. 10.

Die vorhergehenden Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems lassen sich, wie bei einem festen System wieder in einer einzigen zusammenfassen, welche durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgesprochen wird. Dazu muß dasselbe aber der Unterscheidung zwischen innerem und äußerem Gleichgewicht entsprechend enger gefaßt werden, als dies in Bezug auf veränderliche Systeme gewöhnlich geschieht; denn es ist leicht einzusehen, daß

der Lehrsatz von der lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems in seiner allgemeinsten Fassung, wenn man unter dieser lebendigen Kraft die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen materiellen Punkte des Systems versteht, ebenso wenig einen Unterschied macht zwischen innerer und äußerer Bewegung dieser letztern als derselbe Lehrsatz für ein festes System einen Unterschied zwischen fortschreitender und drehender Bewegung macht; daß also auch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches von jenem Lehrsatze nur den besondern Fall darstellt, wo die anfängliche Geschwindigkeit eines jeden dieser Punkte Null ist und keiner derselben eine Bewegung nach irgend einer Seite hin erhalten kann, in seiner allgemeinsten Fassung keinen Unterschied zwischen innerem und äußerem Gleichgewicht machen, sondern das ganze Gleichgewicht also inneres und äußeres gleichzeitig umfassen wird. Bei dieser allgemeinsten Fassung dieser Lehrsätze dürfen dann aber auch nicht, wie man bisher meistens gethan hat, nur die äußern Kräfte des Systems in Rechnung gebracht werden; sondern es müssen nun für jeden materiellen Punkt desselben alle an demselben thätigen Kräfte, sowohl die inneren, zwischen ihm und den andern dem System angehörigen Punkten wirkenden Kräfte, als die äußern, von Punkten, welche dem veränderlichen System nicht angehören, ausgehenden Wirkungen berücksichtigt werden, und in dieser allgemeinsten Fassung wollen wir die genannten Lehrsätze am Schlusse des gegenwärtigen Buches einer besondern Erörterung unterziehen.

Für jetzt wollen wir unserer Unterscheidung zwischen innern und äußern Zuständen eines veränderlichen Systems gemäß auch zwischen innern und äußern virtuellen Geschwindigkeiten und später ebenso zwischen innerer und äußerer lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems unterscheiden, und hier zunächst unter äußerer virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes in einem veränderlichen System den kleinen Weg verstehen, der von diesem Punkte in einer sehr kleinen Zeit zurückgelegt wird, vermöge einer sehr kleinen neuen äußern Kraft und unter der Voraussetzung, daß derselbe während dieser kleinen Zeit mit allen übrigen Punkten des Systems und folglich auch mit dem Coordinatensystem der ξ, η und ζ fest verbunden bleibe. Diese Voraussetzung dient hauptsächlich dazu der Vorstellung über die anfängliche Richtung der virtuellen Bewegung zu Hülfe zu kommen; denn das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bezieht sich zwar streng genommen nur auf den Anfang der virtuellen Bewegung, also auf einen augenblicklichen Zustand des Systems, bei diesem augenblicklichen Zustande ist aber doch ein Bewegenwollen nach einer bestimmten Richtung

mit inbegriffen und diese anfängliche Richtung wird durch die obige Voraussetzung auf die einer äußern Bewegung beschränkt.

Mit Benützung der schon in §. 33 des ersten Buches gegebenen Erklärung von dem virtuellen Momente einer Kraft werden wir daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems so aussprechen:

Wenn sich ein veränderliches System im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet und demselben durch eine oder mehrere sehr kleine neue Kräfte, welche von außen auf das System wirken, irgend eine äußere virtuelle Bewegung mitgetheilt wird, d. h. eine solche, bei welcher alle Punkte des Systems in derselben gegenseitigen Lage bleiben, so ergibt sich für das Verhältniß zwischen der Summe der virtuellen Momente aller ursprünglich an dem System thätigen äußern Kräfte und der virtuellen Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes im System immer der Anfangswerth Null.

Umgekehrt wird ein veränderliches System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befinden, wenn das Verhältniß zwischen der Summe der virtuellen Momente aller an dem System thätigen äußern Kräfte und der virtuellen Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes desselben den Anfangswerth Null erhält für jede äußere virtuelle Bewegung, welche dem für eine sehr kleine Zeit als fest gedachten System durch eine oder mehrere sehr kleine neue äußere Kräfte ertheilt werden können.

Bezeichnen wir demnach wie früher eine der äußern Kräfte mit $P_{,}$, die äußere virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes mit $\Delta s_{,}$, ihren virtuellen Weg mit $\Delta p_{,}$ und mit Δs die äußere virtuelle Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes im System, so haben wir die Gleichung:

$$\text{Anf:} \frac{\Sigma . P_{,} \Delta p_{,}}{\Delta s} = \Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s_{,}} \frac{\delta s_{,}}{\delta s} = 0 \quad (86)$$

als einzige nothwendige und genügende Bedingungsgleichung für das äußere Gleichgewicht, und dieses wird wieder ein dauerndes sein, wenn die vorstehende Gleichung für jede innere Gestaltung und jede beliebige äußere virtuelle Bewegung des Systems befriedigt wird; ein vorübergehendes dagegen, wenn dieses nur für eine oder die andere Gestalt desselben stattfindet.

Die Begründung des obigen Princips muß offenbar ganz dieselbe sein, wie für ein festes System, da während der äußern virtuellen Bewegung das System als unveränderlich oder fest vorausgesetzt wird, weßwegen sowohl in dieser Beziehung als auch in Betreff der aus jenem Princip zu ziehenden Folgerungen, sowie rücksichtlich seiner Anwendung einfach auf die §§. 140—146 des II. Buches verwiesen werden kann.

III. Allgemeine Gesetze der äußern Bewegung eines veränderlichen Systems.

§. 11.

Die vorhergehende Erörterung über das äußere Gleichgewicht liefert uns auch die Kennzeichen für den Zustand der äußern Bewegung; ein veränderliches System von materiellen Punkten ist demnach in äußerer Bewegung begriffen, wenn sich in demselben kein solches Coordinaten-System bestimmen läßt, welches fortwährend gegen feste von dem materiellen System ganz unabhängige Coordinaten-Achsen eine unveränderliche Lage behaupten kann, und dieß wird immer der Fall sein, entweder wenn die Bedingungsgleichungen (4) und (5) durch die äußern Kräfte (beschränkende Hindernisse mit eingerechnet) nicht befriedigt werden, oder wenn diesen Genüge gethan wird, aber schon eine noch von frühern äußern Wirkungen herrührende anfängliche äußere Geschwindigkeit vorhanden ist. Es wird einleuchten, daß dieser letztere Fall nur die gleichförmige äußere Bewegung des Systems in sich begreift.

Die allgemeinen Gesetze dieser äußern Bewegung sind daher wieder ganz dieselben, wie bei den festen Systemen und können auch auf demselben Wege abgeleitet werden, wie es für die wichtigsten derselben im letzten Kapitel des vorhergehenden Buches geschehen ist. Es dürfte indessen keine zwecklose Wiederholung sein, wenn wir hier die betreffenden Gesetze noch unter einem andern, den veränderlichen Systemen im Allgemeinen besser entsprechenden Gesichtspunkte ableiten, dabei Gelegenheit nehmen, einige Beispiele für ihre Anwendung bei veränderlichen Systemen aufzuführen, und dann davon die Ableitung einiger andern allgemeinen Gesetze, deren an dem genannten Orte bereits erwähnt worden ist, anzureihen.

Betrachten wir zuerst ein ganz freies System und bezeichnen mit

die Coordinaten eines Punktes M desselben, dessen Masse m sei, in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem am Ende der Zeit t mit x, y, z, die eines zweiten M', dessen Masse m' sei, in demselben Augenblicke mit x', y', z', die eines dritten M'' von der Masse m'' mit x'', y'', z'', u. s. f. Ferner seien wie bisher $X = \Sigma . P \cos \widehat{Px}$, $Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py}$, $Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$ die zu denselben Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der Resultirenden aller an dem Punkte M angreifenden äußern Kräfte P, d. h. der Kräfte, welche von äußern, dem System nicht angehörenden Punkten ausgehen und den Punkt M diesen zu nähern oder von ihnen zu entfernen streben; ebenso seien X', Y', Z' die entsprechenden Componenten der Resultirenden aller äußern Kräfte P', welche an dem Punkte M' angreifen, u. s. f. Endlich sollen J_1, J_2, J_3, etc. die innern Kräfte bezeichnen, welche zwischen dem Punkte M und den übrigen Punkten M', M'', etc. des Systems thätig sind und an M angreifend gedacht werden, J', J_2', J_3', etc. die zwischen dem Punkte M' und allen übrigen M, M'', M''', etc. thätigen und an M' angreifenden Kräfte, u. s. f., und in gleicher Weise sollen F_1, G_1, H_1 die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der Kraft J_1, dann F_2, G_2, H_2 die der Kraft J_2, etc., F', G', H' die der Kraft J', dann F_2', G_2', H_2' die der Kraft J_2', u. s. f. vorstellen.

Es ist nun offenbar, daß die Bewegung, welche einer der Punkte des Systems annehmen wird und muß, keine andere sein kann, als diejenige, welche er, frei und für sich allein im Raume vorhanden, unter denselben anfänglichen Umständen annehmen würde, wenn er, wie jetzt in seiner Verbindung mit dem System, denselben Kräften P und J unterworfen wäre, von denen die letztern eben seine Abhängigkeit von allen übrigen Punkten des ganzen Systems ausdrücken, da sonst weiter keine Ursache für eine Aenderung seines örtlichen Zustandes vorhanden ist. Die Gesetze der Bewegung des Punktes M werden demnach (Buch I., §. 64) durch die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + F_1 + F_2 + F_3 + \text{etc.} \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + G_1 + G_2 + G_3 + \text{etc.} \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + H_1 + H_2 + H_3 + \text{etc.} \end{aligned} \right\}, \quad (a.$$

ausgedrückt; die des Punktes M' ebenso durch die Gleichungen:

$$\text{b.)}\quad \begin{cases} m' \dfrac{d^2x'}{dt^2} = X' + F' + F_2' + F_3' + \text{etc.} \\ m' \dfrac{d^2y'}{dt^2} = Y' + G' + G_2' + G_3' + \text{etc.} \\ m' \dfrac{d^2z'}{dt^2} = Z' + H' + H_2' + H_3' + \text{etc.}\,, \end{cases}$$

die des Punktes M'' durch die Gleichungen:

$$\text{c.)}\quad \begin{cases} m'' \dfrac{d^2x''}{dt^2} = X'' + F'' + F_1'' + F_3'' + \text{etc.} \\ m'' \dfrac{d^2y''}{dt^2} = Y'' + G'' + G_1'' + G_3'' + \text{etc.} \\ m'' \dfrac{d^2z''}{dt^2} = Z'' + H'' + H_1'' + H_3'' + \text{etc.}\,, \end{cases}$$

und so durch entsprechende Gleichungen die aller übrigen Punkte des Systems. Beachtet man dann, daß wie in §. 5 erörtert wurde,

$$\begin{array}{lll} F_1 = -F' \,, & G_1 = -G' \,, & H_1 = -H' \\ F_2 = -F'' \,, & G_2 = -G'' \,, & H_2 = -H'' \\ F_2' = -F_1'' \,, & G_2' = -G_1'' \,, & H_2' = -H_1'' \end{array}$$

u. s. f.,

und summirt nun die von den Gleichungen (a), (b), (c), u. s. f., welche derselben Coordinaten-Achse entsprechen, so findet man die neuen Gleichungen:

$$\text{g.)}\quad \begin{cases} \Sigma.m \dfrac{d^2x}{dt^2} = \Sigma.X \,, \quad \Sigma.m \dfrac{d^2y}{dt^2} = \Sigma.Y \,, \\ \Sigma.m \dfrac{d^2z}{dt^2} = \Sigma.Z \,, \end{cases}$$

als diejenigen, welche die allgemeinsten Gesetze der fortschreitenden äußern Bewegung eines freien veränderlichen Systems enthalten, und welche dieselben sind, wie die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung eines festen Systems (Buch II., §. 202).

Verfährt man ferner mit den Gleichungen (a), (b), (c), u. s. f. in Bezug auf jeden der einzelnen materiellen Punkte des Systems, wie es im ersten Buche, §. 71 geschehen ist, um die Gleichungen für die drehende Bewegung eines materiellen Punktes um den Anfangspunkt der Coordinaten oder um deren Achsen abzuleiten, d. h. multiplizirt

man die erste der Gleichungen (a) mit y, die zweite mit x, und zieht dieses Product von jenem ab, u. s. w. so ergeben sich für den Punkt M die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=(xY-yX)+(xG_1-yF_1)+(xG_2-yF_2)+\text{etc.}\\ m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=(zX-xZ)+(zF_1-xH_1)+(zF_2-xH_2)+\text{etc.}\\ m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=(yZ-zY)+(yH_1-zG_1)+(yH_2-zG_2)+\text{etc.}\end{aligned}\right\},\ (a'.$$

für den Punkt M' die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m'\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)&=(x'Y'-y'X')+(x'G'-y'F')+(x'G_2'-y'F_2')+\text{etc.}\\ m'\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2}-x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)&=(z'X'-x'Z')+(z'F'-x'H')+(z'F_2'-x'H_2')+\text{etc.}\\ m'\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)&=(y'Z'-z'Y')+(y'H'-z'G')+(y'H_2'-z'G_2')+\text{etc.}\end{aligned}\right\}(b'.$$

und ähnliche für die übrigen Punkte, und man wird leicht einsehen, daß die eingeklammerten Glieder der rechten Seiten die drehenden Wirkungen der Kräfte P und J um die entsprechende Coordinaten-Achse ausdrücken. Summirt man daher alle diejenigen von den Gleichungen (a'), (b'), u. s. f., welche sich auf dieselbe Achse beziehen, so muß man auf der rechten Seite die entsprechende Componente der resultirenden drehenden Wirkung aller äußern Kräfte P und die aller innern Kräfte J erhalten. Das resultirende Moment dieser letzten Kräfte ist aber, wie in §. 6 gezeigt wurde, immer Null, wie auch das Coordinatensystem in Bezug auf das veränderliche System liegen mag; denn die Glieder $xG_1 - yF_1$ und $x'G' - y'F'$ in den ersten der Gleichungen (a') und (b') geben durch Summation mit der Bedingung: $F' = -F_1$, $G' = -G_1$, ein neues Glied von der Form:

$$(x-x')G_1-(y-y')F_1,$$

welches nach dieser Form eine Componente der drehenden Wirkung der an M angreifenden Kraft J_1 in Bezug auf den Punkt M', dessen Coordinaten x', y', z' sind, also in Bezug auf einen Punkt ausdrückt, der in der Richtung der genannten Kraft liegt und für welchen deren drehende Wirkung nur Null sein kann; auf gleiche Weise verhält es sich aber mit allen übrigen Gliedern der Gleichungen (a'), (b') u. s. f., welche

drehenden Wirkungen der innern Kräfte J aufheben, wenn sie entsprechend paarweise summirt werden.

Die Summe aller Gleichungen (a'), (b'), u. s. f. gibt demnach drei neue Gleichungen, in welchen wieder alle innern Kräfte verschwunden sind und welche wie die entsprechenden für feste Systeme gefundenen unter der Form:

$$10.)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma . m\left(x\dfrac{d^2 y}{d t^2} - y\dfrac{d^2 x}{d t^2}\right) = \Sigma . (xY - yX) = \Sigma . M_Z \\[2ex] \Sigma . m\left(z\dfrac{d^2 x}{d t^2} - x\dfrac{d^2 z}{d t^2}\right) = \Sigma . (zX - xZ) = \Sigma . M_Y \\[2ex] \Sigma . m\left(y\dfrac{d^2 z}{d t^2} - z\dfrac{d^2 y}{d t^2}\right) = \Sigma . (yZ - zY) = \Sigma . M_X \end{array} \right.$$

das allgemeinste Gesetz der äußern drehenden Bewegung des Systems in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen darstellen.

§. 12.

Daß die vorhergehenden Gleichungen sich nur auf den äußern Zustand des Systems beziehen, geht nicht nur daraus hervor, daß darin blos die äußern Kräfte als wirksam erscheinen, sondern besonders daraus, daß sich diese Gleichungen in andere umwandeln lassen, welche nur für den äußern Zustand des Systems Bedeutung haben. Legen wir nämlich durch einen beliebigen Punkt des Systems, dessen Coordinaten am Ende der Zeit t in Bezug auf die festen Achsen mit $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ bezeichnet seien, ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen fortwährend parallel zu den festen Achsen bleiben und in Bezug auf welches in demselben Zeitpunkte die Lage irgend eines dem System angehörenden Punktes M von der Masse m durch $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, die eines zweiten M', dessen Masse m' sei, durch $x_{,}'$, $y_{,}'$, $z_{,}'$, u. s. f. ausgedrückt werden, so haben wir in jedem Augenblicke zwischen den Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die festen und in Bezug auf die beweglichen Achsen die Gleichungen:

$$x = \mathbf{x} + x_{,}\,,\qquad y = \mathbf{y} + y_{,}\,,\qquad z = \mathbf{z} + z_{,}\,,$$

ebenso für den Punkt M' die Gleichungen:

$$x' = \mathbf{x} + x_{,}'\,,\qquad y' = \mathbf{y} + y_{,}'\,,\qquad z' = \mathbf{z} + z_{,}'\,,$$

u. s. f. für die übrigen Punkte des Systems. Führt man dann die Aenderungsgesetze zweiter Ordnung in Bezug auf t in die Gleichungen (9) ein und beachtet, daß in jedem Augenblicke die Werthe von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$

für alle Punkte des Systems gemeinschaftlich sind, daß also die Summenglieder

$$\Sigma . m \frac{d^2 x}{dt^2} , \quad \Sigma . m \frac{d^2 y}{dt^2} , \quad \Sigma . m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

auch die Formen:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} , \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} , \quad M \frac{d^2 z}{dt^2} ,$$

annehmen können, wenn man die Masse $\Sigma . m$ des ganzen Systems durch M bezeichnet, so werden die genannten Gleichungen (9) in folgende verwandelt:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 x_,}{dt^2} &= \Sigma . X \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 y_,}{dt^2} &= \Sigma . Y \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 z_,}{dt^2} &= \Sigma . Z \end{aligned} \right\} , \quad (11.$$

welche die Gesetze der fortschreitenden Bewegung des beweglichen Coordinaten-Anfangs ausdrücken. Wählt man endlich diesen letztern immer so in dem System, daß der Mittelpunkt der Masse des Systems in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen immer dieselbe Lage behält, daß man also für jeden Zeitpunkt die Bedingungen hat

$$\Sigma . m x_, = M a , \quad \Sigma . m y_, = M b , \quad \Sigma . m z_, = M c ,$$

oder

$$\Sigma . m \frac{d^2 x_,}{dt^2} = 0 , \quad \Sigma . m \frac{d^2 y_,}{dt^2} = 0 , \quad \Sigma . m \frac{d^2 z_,}{dt^2} = 0 ,$$

so nehmen die vorstehenden Gleichungen (11) die einfache Form an:

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma . X \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma . Y \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma . Z \end{aligned} \right\} , \quad (12,$$

unter welcher sie nun die Gesetze der äußern fortschreitenden Bewegung des gleichsam in einem Punkte vereinigten Systems darstellen, indem sie aussprechen, daß das Gesetz der fortschreitenden Bewegung

eines veränderlichen Systems der äußern Form nach von den innerhalb desselben stattfindenden Wirkungen und Veränderungen unabhängig und in jedem Augenblicke dieselbe ist wie das der fortschreitenden Bewegung eines materiellen Punktes, welcher dieselbe Masse besitzt, wie das ganze System und an welchem die fördernde Resultirende aller an dem System thätigen äußern Kräfte angreift.

Dabei ist indessen nicht zu übersehen, daß im Allgemeinen doch insoferne eine Abhängigkeit von dem innern Zustande des Systems stattfindet, als sich bei ganz strenger Betrachtung die äußern Kräfte immer auch mit der Lage ihrer Angriffspunkte im Systeme ändern, die Componenten X, Y, Z also auch Functionen der Coordinaten x_1, y_1, z_1 sind. Jene Unabhängigkeit findet jedoch in den meisten Fällen wenigstens annähernd statt, weil man für die erste Annäherung an die Wahrheit den Einfluß der innern Aenderungen des Systems auf die Intensität der äußern Kräfte vernachlässigen kann und wegen der Unzulänglichkeit unserer Analysis vernachlässigen muß.

Am einfachsten wird man den Mittelpunkt der Masse selbst als jenen Punkt annehmen, welcher das ganze System vorstellt, wodurch dann die Gleichungen (12) die besondere Form erhalten:

$$12^a.)\quad \left\{ \begin{aligned} M\frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma . X, \\ M\frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma . Y, \\ M\frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma . Z, \end{aligned} \right.$$

nur muß man dabei beachten, daß hier bei veränderlichen Systemen dieser Punkt nicht mehr ein für allemal bestimmt ist, wie bei den festen Systemen, sondern in jedem Augenblicke eine andere Lage im System hat, daß daher die Gleichungen (12) für veränderliche Systeme nicht mehr ebenso gut anwendbar sind, wie für feste, oder die fortschreitende Bewegung nicht mehr ebenso anschaulich und bestimmt angeben, wie dort, abgesehen davon, daß strenggenommen auch die Kräfte X, Y, Z, u. s. f. durch die Aenderung der Gestalt des Systems andere Werthe erhalten können.

Betrachten wir z. B. die Erde mit ihrem Monde als ein veränderliches System, so schließen wir aus dem Vorhergehenden, daß der

Mittelpunkt der Masse dieser beiden Körper, welcher im Mittel etwa um $\frac{69}{78}$ eines Erdhalbmessers von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist, die in §§. 85—87 des ersten Buches untersuchte elliptische Bewegung um die Sonne annehmen würde, wenn an denselben keine andere Kraft thätig wäre, als die zwischen ihnen selbst stattfindende anziehende Wirkung, welche hier als innere Kraft unberücksichtigt bleibt und die zwischen ihnen und der Sonne thätigen anziehenden Kräfte, welche die äußern bewegenden Kräfte bilden, und unter der fernern Voraussetzung, daß die Veränderungen in der anziehenden Wirkung zwischen der Sonne und der Erde und dem Monde, welche davon herrühren, daß diese beiden Körper einzeln bald mehr bald weniger von dem Mittelpunkte der Sonne entfernt sind, als der Mittelpunkt ihrer beiden Massen, vernachlässigt werden dürfen.

Ebenso bildet die Sonne selbst mit den sie umgebenden Planeten und deren Satelliten ein veränderliches System, dessen Massenmittelpunkt wahrscheinlich den Gesetzen der elliptischen Bewegung um einen mächtigen Centralkörper folgt, unbeirrt durch die Bewegungen, welche innerhalb des Systems selbst vor sich gehen.

Ein anderes für die theoretische Anschauung beachtenswerthes Beispiel bietet sich uns dar in einer Kugel, welche während ihres Laufes durch eine innere Explosion in mehrere Stücke zersprengt wird. Wenn die Schwere constant und kein Luftwiderstand vorhanden wäre, würde der Mittelpunkt der Masse aller einzelnen Stücke denselben Weg und mit derselben Geschwindigkeit verfolgen, wie der Schwerpunkt einer gleichen unzersprengten Kugel unter gleichen anfänglichen Umständen.

In dem einfacheren Falle, wo an dem System keine äußeren fördernden Kräfte thätig sind, oder diese sich in jedem Augenblicke das Gleichgewicht halten, wird der Mittelpunkt der Masse des Systems immer eine gleichförmige geradlinige Bewegung annehmen, da für diesen Fall die Gleichungen (12^a) in

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \;, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \;, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

übergehen. Zwei Kugeln, welche sich auf einer horizontalen Ebene ohne Reibung mit constanten Geschwindigkeiten bewegen, und in ihrer Bewegung auf einandertreffen, werden gegenseitig die Richtungen und Geschwindigkeiten ihrer Bewegungen durch den Stoß ändern; die Bewegung des Mittelpunktes ihrer Masse wird aber nach dem Stoße wie vor demselben eine gleichförmige geradlinige sein und nach wie vor dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

Man hat dem durch die Gleichungen (12a) ausgesprochenen Satze den Namen: **Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes** (Mittelpunktes der Masse) beigelegt.

§. 13.

Nehmen wir nun mit den Gleichungen (10) ähnliche Umformungen vor, wie mit den Gleichungen (9), indem wir wieder die Lage der einzelnen Punkte des Systems auf ein zu den festen Achsen parallel fort sich bewegendes Coordinatensystem der $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ beziehen, dessen Anfangspunkt durch die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in Bezug auf die festen Achsen bestimmt, über welchen aber noch keine besondere Wahl getroffen ist, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (11) zuerst folgende Gleichungen für die äußere drehende Bewegung des Systems:

$$13.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma.m\left(x_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-y_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\Sigma.mx_{,}-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\Sigma.my_{,}=\Sigma(x_{,}Y-y_{,}X),\\
&\Sigma.m\left(z_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}-x_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\Sigma.mz_{,}-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\Sigma.mx_{,}=\Sigma(z_{,}X-x_{,}Z),\\
&\Sigma.m\left(y_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}-z_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\Sigma.my_{,}-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\Sigma.mz_{,}=\Sigma(y_{,}Z-z_{,}Y),
\end{aligned}\right.$$

und unter der weitern Voraussetzung, daß der Anfangspunkt der beweglichen Coordinatenachsen entweder **eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt** oder mit dem **Mittelpunkte der Masse** des Systems zusammenfällt, daß man also entweder

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}=0\quad,\quad\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}=0\quad,\quad\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}=0$$

hat oder

$$\Sigma.mx_{,}=0\quad,\quad\Sigma.my_{,}=0\quad,\quad\Sigma.mz_{,}=0\;,$$

nehmen diese letztern Gleichungen wieder die einfache Form an:

$$14.)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Sigma.m\left(x_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}-y_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{z_{,}},\\
&\Sigma.m\left(z_{,}\frac{d^2x_{,}}{dt^2}-x_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{y_{,}},\\
&\Sigma.m\left(y_{,}\frac{d^2z_{,}}{dt^2}-z_{,}\frac{d^2y_{,}}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{x_{,}},
\end{aligned}\right.$$

worin $\Sigma . M_z$, $\Sigma . M_y$, und $\Sigma . M_x$, die in den Gleichungen (13) ausführlich bezeichneten Componenten des resultirenden Momentes aller äußern Kräfte in Bezug auf den beweglichen Anfangspunkt vorstellen.

Unter dieser Form, in welcher die Coordinaten x, y, z des beweglichen Coordinaten-Anfangs ganz verschwunden sind, sprechen unsere Gleichungen für die äußere drehende Bewegung je nachdem man die eine oder die andere der beiden vorhergehenden Bedingungen zu Grunde legt, einmal aus,

daß die äußere drehende Bewegung eines freien veränderlichen Systems in Bezug auf parallel-bewegliche Coordinaten-Achsen, deren Anfangspunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, dieselbe ist, als wenn dieser Punkt fest gedacht wird; dann sagen sie aber auch,

daß jedes freie veränderliche System während der nach irgend einem Gesetze fortschreitenden Bewegung des Mittelpunktes seiner Masse sich vermöge des resultirenden Momentes der an ihm thätigen äußern Kräfte um diesen Punkt, wie um einen festen Punkt herumdreht, oder genauer und für die Anschauung klarer ausgedrückt, daß das jeweilige augenblickliche resultirende Moment aller äußern Kräfte dem in diesem Augenblicke als unveränderlich gedachten System in Bezug auf drei durch den Mittelpunkt der Masse gelegte Achsen dieselben Winkelbeschleunigungen zu ertheilen strebt, als wenn diese Achsen fest oder unverrückbar wären. Denn es dürfte unserm Vorstellungsvermögen im Allgemeinen etwas zu viel zugemuthet sein, sich diese drehende Bewegung selbst und nicht blos einen augenblicklichen Zustand derselben, klar zu machen; da uns in diesem Falle nicht nur die deutliche Kenntniß von der veränderlichen Lage des Mittelpunktes der Masse in dem Systeme fehlt, wie in dem vorhergehenden Falle, sondern auch die klare Vorstellung von der gleichfalls veränderlichen Lage bestimmter das System selbst ersetzender Achsen, deren drehende Bewegungen eigentlich durch die obigen Gleichungen dargestellt werden. Bei den festen Systemen haben uns dazu die Hauptachsen im Schwerpunkt gedient und die Vorstellung wesentlich erleichtert, weil diese ihre Lage im System fortwährend unverändert beibehalten, und daher, einmal bestimmt oder bekannt, das System selbst vertreten und gleichsam die Grundlage bilden, auf welcher sich das System in jedem Augenblicke aufbauen läßt, während bei den veränderlichen Systemen erst die Veränderungen im Innern bekannt sein müssen und jene Achsen für irgend eine Gestaltung desselben besonders

zu bestimmen sind, wozu hier noch kommt, daß wegen der Veränderlichkeit in der Gestalt auch die Massenmomente des Systems in Bezug auf die genannten Achsen veränderlich sind, und daher die äußere drehende Bewegung desselben in Bezug auf diese Achsen im Allgemeinen nicht unabhängig von der innern betrachtet werden kann, wenn man auch von den durch die Aenderung der Gestalt des Systems hervorgerufenen Aenderungen der Intensität der Kräfte Umgang nimmt.

§. 14.

Diese Abhängigkeit der äußern drehenden Bewegung von der innern wird deutlicher ausgesprochen, wenn wir die Gleichungen (14) wie bei den festen Systemen wieder in andere umwandeln, welche sich auf drei Achsen beziehen, die selbst eine drehende Bewegung besitzen und für die man dann auch, insofern es sich blos um die äußere Form der Gesetze der drehenden Bewegung des Systems handelt, die augenblicklichen Hauptachsen im Mittelpunkte der Masse desselben nehmen kann, da man diese für den genannten Zweck ebenso als bekannt voraussetzen darf, wie den Mittelpunkt der Masse bei der Betrachtung der fortschreitenden Bewegung. Bezeichnen wir dazu die Coordinaten eines Punktes M, dessen Masse m sei, in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen einfach mit x, y, z, in Bezug auf die sich drehenden Achsen, welche mit jenen den Anfangspunkt gemeinschaftlich haben, mit ξ, η, ζ, so finden zwischen diesen Größen wieder die Beziehungen statt (vergl. Buch II., §. 184 [a]):

$$
\text{a.)}\quad \begin{cases} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta\,, \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta\,, \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta\,, \end{cases}
$$

worin die Coeffizienten a, b, c, etc. die an dem genannten Orte angegebene Bedeutung haben. Bei einem veränderlichen System sind aber die Coordinaten ξ, η, ζ nicht mehr unabhängig von der Zeit, sondern veränderlich und die vorhergehenden Beziehungen geben daher folgende Aenderungsgesetze in Bezug auf t:

$$
\text{b.)}\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a\dfrac{d\xi}{dt} + a'\dfrac{d\eta}{dt} + a''\dfrac{d\zeta}{dt} + \xi\dfrac{da}{dt} + \eta\dfrac{da'}{dt} + \zeta\dfrac{da''}{dt}\,, \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = b\dfrac{d\xi}{dt} + b'\dfrac{d\eta}{dt} + b''\dfrac{d\zeta}{dt} + \xi\dfrac{db}{dt} + \eta\dfrac{db'}{dt} + \zeta\dfrac{db''}{dt}\,, \\[2ex] \dfrac{dz}{dt} = c\dfrac{d\xi}{dt} + c'\dfrac{d\eta}{dt} + c''\dfrac{d\zeta}{dt} + \xi\dfrac{dc}{dt} + \eta\dfrac{dc'}{dt} + \zeta\dfrac{dc''}{dt}\,, \end{cases}
$$

als Beziehungen zwischen den zu den Achsen der x, y, z parallelen Componenten $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ der relativen Geschwindigkeit v des Punktes M in Bezug auf diese parallel fortschreitenden Achsen, den Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ seiner Geschwindigkeit in Bezug auf die sich drehenden Achsen und den Winkeländerungen dieser letztern Achsen gegen die ersten.

Multiplizirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach zuerst mit a, b, c, dann mit a′, b′, c′, ebenso mit a″, b″, c″ und summirt jedesmal die Producte, so ergeben sich mit Beachtung der zwischen den Cosinus a, b, c, etc. stattfindenden Bedingungsgleichungen und ihren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t (vergl. Buch II., §. 184) die neuen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + q\zeta - r\eta \\ a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} + r\xi - p\zeta \\ a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} &= \frac{d\zeta}{dt} + p\eta - q\xi \end{aligned}\right\} \quad (c.$$

in welchen die Coeffizienten p, q, r die in §. 185 daselbst angegebene Bedeutung haben. Man wird ferner leicht einsehen, daß die linken Seiten der Gleichungen (c) die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten u_ξ, u_η, u_ζ der Geschwindigkeit v des Punktes M, welche von den Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ wohl zu unterscheiden sind, vorstellen und daß folglich die Differenzen:

$$\left.\begin{aligned} \widehat{u_\xi} &= a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \\ \widehat{u_\eta} &= a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \\ \widehat{u_\zeta} &= a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (d.$$

die zu den Achsen der ξ, η und ζ parallelen Componenten $\widehat{u_\xi}$, $\widehat{u_\eta}$, $\widehat{u_\zeta}$ einer Geschwindigkeit $\widehat{v}$ sind, welche der Punkt M in Bezug auf das Coordinatensystem der x, y, z besitzen würde, wenn er vom Ende der

Zeit t an mit den Achsen der ξ, η, ζ fest verbunden bliebe, und welche man seine äußere relative Geschwindigkeit in Bezug auf die erstern Achsen nennen kann, während $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ die Componenten seiner innern relativen Geschwindigkeit in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ ausdrücken. Mit der angedeuteten Bezeichnung nehmen also die Gleichungen (e) die Form an:

$$
\text{e)} \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{\frown}{u}_\xi &= \mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta , \\ \overset{\frown}{u}_\eta &= \mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta , \\ \overset{\frown}{u}_\zeta &= \mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi , \end{aligned} \right.
$$

und geben dann zwischen den Componenten $\overset{\frown}{u}_\xi$, $\overset{\frown}{u}_\eta$, $\overset{\frown}{u}_\zeta$ und den Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ dieselben Beziehungen, wie wir sie für die Componenten u_ξ, u_η, u_ζ bei einem festen System erhalten haben (Buch II., §. 186, u. f. f.).

Bezeichnen wir ferner, wie am genannten Orte, mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die zu den Achsen der x, y, z parallelen Componenten $m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$ der Kraft $\mathfrak{P}$, welche dem Punkte M, wenn er für sich allein vorhanden wäre, unter denselben anfänglichen Umständen dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie in seiner Verbindung mit dem System besitzt, mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Componenten derselben Kraft, parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ genommen, und mit $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$ ihre drehenden Wirkungen um die genannten Achsen, so erhalten wir zuerst durch die Beziehungen:

$$
\left\{ \begin{aligned} u_x &= a u_\xi + a' u_\eta + a'' u_\zeta \\ u_y &= b u_\xi + b' u_\eta + b'' u_\zeta \\ u_z &= c u_\xi + c' u_\eta + c'' u_\zeta \end{aligned} \right.
$$

für die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Werthe:

$$
\text{f)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= m\left(a\frac{du_\xi}{dt} + a'\frac{du_\eta}{dt} + a''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{da}{dt} + u_\eta\frac{da'}{dt} + u_\zeta\frac{da''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Y} &= m\left(b\frac{du_\xi}{dt} + b'\frac{du_\eta}{dt} + b''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{db}{dt} + u_\eta\frac{db'}{dt} + u_\zeta\frac{db''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Z} &= m\left(c\frac{du_\xi}{dt} + c'\frac{du_\eta}{dt} + c''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{dc}{dt} + u_\eta\frac{dc'}{dt} + u_\zeta\frac{dc''}{dt}\right); \end{aligned} \right.
$$

Wir haben aber auch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}' &= a\,\mathfrak{X} + b\,\mathfrak{Y} + c\,\mathfrak{Z}\\ \mathfrak{Y}' &= a'\mathfrak{X} + b'\mathfrak{Y} + c'\mathfrak{Z}\\ \mathfrak{Z}' &= a''\mathfrak{X} + b''\mathfrak{Y} + c''\mathfrak{Z}\end{aligned}\right\},$$

und diese nehmen durch Einführung der vorhergehenden Werthe für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und mit Beachtung der erwähnten Bedingungsgleichungen zwischen den Cosinus a, b, c, und deren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t die Form an:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}' &= m\left(\frac{du_\xi}{dt} + \mathfrak{q}\,u_\zeta - \mathfrak{r}\,u\right)\\ \mathfrak{Y}' &= m\left(\frac{du_\eta}{dt} + \mathfrak{r}\,u_\xi - \mathfrak{p}\,u_\zeta\right)\\ \mathfrak{Z}' &= m\left(\frac{du_\zeta}{dt} + \mathfrak{p}\,u_\eta - \mathfrak{q}\,u_\xi\right)\end{aligned}\right\} \qquad \text{(g.}$$

Zuletzt haben wir dann wieder für die drehenden Wirkungen der Kraft $\mathfrak{P}$ die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_\Xi = \mathfrak{Z}'\eta - \mathfrak{Y}'\zeta\,, \qquad \mathfrak{M}_H = \mathfrak{X}'\zeta - \mathfrak{Z}'\xi\,,$$
$$\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{Y}'\xi - \mathfrak{X}'\eta$$

oder mit den vorhergehenden Werthen (h.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_\Xi &= m\left(\eta\frac{du_\zeta}{dt} - \zeta\frac{du_\eta}{dt}\right) - m u_\xi(\mathfrak{q}\,\eta + \mathfrak{r}\,\zeta) + m\,\mathfrak{p}\,(\eta u_\eta + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_H &= m\left(\zeta\frac{du_\xi}{dt} - \xi\frac{du_\zeta}{dt}\right) - m u_\eta(\mathfrak{p}\,\xi + \mathfrak{r}\,\zeta) + m\,\mathfrak{q}\,(\xi u_\xi + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_Z &= m\left(\xi\frac{du_\eta}{dt} - \eta\frac{du_\xi}{dt}\right) - m u_\zeta(\mathfrak{p}\,\xi + \mathfrak{q}\,\eta) + m\,\mathfrak{r}\,(\xi u_\xi + \eta u_\eta)\end{aligned}\right\}.$$

Im jetzigen Falle geben aber die Gleichungen (c) die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_\xi}{dt} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathfrak{q}\frac{d\zeta}{dt} - \mathfrak{r}\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\\ \frac{du_\eta}{dt} &= \frac{d^2\eta}{dt^2} + \mathfrak{r}\frac{d\xi}{dt} - \mathfrak{p}\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\\ \frac{du_\zeta}{dt} &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \mathfrak{p}\frac{d\eta}{dt} - \mathfrak{q}\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\end{aligned}\right\},$$

und mit diesen erhält man nun, wenn sie in die Gleichungen (h) eingeführt werden, nachstehende Werthe für die drehenden Wirkungen $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$:

$$\text{i.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{M}_\Xi = {} & m(\eta^2+\zeta^2)\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + 2m\mathfrak{p}\left(\eta\frac{d\eta}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right) - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} \\
& - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - m(\mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
& + m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta)\,, \\
\mathfrak{M}_H = {} & m(\xi^2+\zeta^2)\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + 2m\mathfrak{q}\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right) - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\
& - m\eta\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - m(\mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
& + m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{r}\zeta)\,, \\
\mathfrak{M}_Z = {} & m(\xi^2+\eta^2)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + 2m\mathfrak{r}\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}\right) - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\
& - m\zeta\eta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - m(\mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
& + m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta)\,.
\end{aligned}\right.$$

Vereinigen wir endlich die drehenden Wirkungen aller Kräfte $\mathfrak{P}$, deren so viele sind, als es materielle Punkte im System gibt, in Bezug auf dieselbe Achse zu einem resultirenden Moment, und bezeichnen die nun veränderlichen Massenmomente des Systems in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ, wie im vorhergehenden Buche mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so daß man hat

$$\mathfrak{A} = \Sigma . m(\eta^2+\zeta^2),\quad \mathfrak{B} = \Sigma . m(\xi^2+\zeta^2),\quad \mathfrak{C} = \Sigma . m(\xi^2+\eta^2),$$

ferner die Summen:

$$\Sigma . m\xi\zeta\,,\quad \Sigma . m\xi\zeta\,,\quad \Sigma . m\eta\zeta$$

der Reihe nach mit

$$\mathfrak{F}\,,\quad \mathfrak{G}\,,\quad \mathfrak{H}$$

indem wir dabei beachten, daß die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ allen Punkten des Systems gemeinschaftlich sind, da sie blos von den Cosinus a, b, c, etc., also von der augenblicklichen Lage der Achsen der ξ, η, ζ gegen die Achsen der x, y, z abhängen, so ergeben sich durch Vergleichung dieser drehenden Gesammtwirkungen der Kräfte $\mathfrak{P}$ mit den Componenten $\Sigma.M_{\Xi}$, $\Sigma.M_{H}$, $\Sigma.M_{Z}$ des resultirenden Momentes aller äußern Kräfte P, da die resultirenden Wirkungen der innern Kräfte J auch in Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ Null sind, folgende Gleichungen für die äußere drehende Bewegung des Systems:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \Sigma.M_{\Xi} + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{q}\mathfrak{r} \\
&\quad - \mathfrak{p}(\mathfrak{F}\mathfrak{r} - \mathfrak{E}\mathfrak{q}) + \mathfrak{D}(\mathfrak{q}^2 - \mathfrak{r}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) \\
\frac{d.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \Sigma.M_{H} + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}\mathfrak{r} \\
&\quad - \mathfrak{q}(\mathfrak{D}\mathfrak{p} - \mathfrak{F}\mathfrak{r}) + \mathfrak{E}(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{p}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) \\
\frac{d.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{dt} - \mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{D}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \Sigma.M_{Z} + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{p}\mathfrak{q} \\
&\quad - \mathfrak{r}(\mathfrak{E}\mathfrak{q} - \mathfrak{D}\mathfrak{p}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta)
\end{aligned}\right\} \quad (15.$$

Mit diesen Gleichungen, welche man durch die beiden letzten Glieder einer jeden den Einfluß der innern Veränderungen auf die äußere drehende Bewegung darthun, sind aber noch die Beziehungen zu verbinden zwischen den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten und den Functionen der Winkel, welche von den Achsen der ξ, η, ζ und den Achsen der x, y, z gebildet werden oder welche die Lage jener Achsen gegen diese bestimmen, nämlich mit den Gleichungen:

$$16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p} = -\frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\cos\psi + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{q} = \frac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\sin\psi - \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{r} = -\frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\psi}{dt}\,, \end{cases}$$

die hier ganz auf dieselbe Weise sich ergeben, wie bei der Untersuchung der drehenden Bewegung eines festen Systems (Buch II., §. 187.).

Die Gleichungen (15) beziehen sich noch auf beliebige Achsen der ξ, η und ζ; will man also die augenblicklichen Hauptachsen des Systems für diese Coordinatenachsen nehmen, so hat man mit denselben die Bedingungen

$$17.)\quad \mathfrak{F} = \Sigma.m\xi\eta = 0\,,\quad \mathfrak{G} = \Sigma.m\xi\zeta = 0\,,\quad \mathfrak{H} = \Sigma.m\eta\zeta = 0$$

zu verbinden, wodurch dieselben zwar die einfache Form:

$$18.)\quad \begin{cases} \frac{d.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \Sigma.M_{\Xi} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta)\,, \\ \frac{d.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \Sigma.M_{H} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta)\,, \\ \frac{d.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \Sigma.M_{Z} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta)\,, \end{cases}$$

annehmen, für die weitere Untersuchung besonderer Fälle aber wegen der Veränderlichkeit der Größen ξ, η, ζ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, wegen der neuen Bedingungen (17) und wegen der Schwierigkeit, welche die Bestimmung der augenblicklichen Lage der Hauptachsen darbietet, kaum geeignet sein dürften. Man wird in den meisten Fällen viel besser thun, wenn man den Achsen der ξ, η, ζ eine entsprechende drehende Bewegung vorschreibt, also die Winkel ω, ψ und ϑ in Function der Zeit bestimmt, daraus mittels der Gleichungen (16) die Werthe von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ableitet und dann die Gleichungen (15) dazu anwendet, um die Gesetze der inneren Bewegung des Systems in Bezug auf jene

Achsen zu untersuchen. Durch dieses Verfahren wird die äußere drehende Bewegung des Systems eine willkürlich angenommene, welche man aber doch so wählen wird, daß sie sich der Bewegung des Systems soviel wie möglich anschließt.

Bemerken wir schließlich noch, daß einerseits die Gleichungen (18) in die Gleichungen (133) des vorhergehenden Buches (§. 190) übergehen, wenn man ξ, η, ζ unveränderlich nimmt, das System also ein festes wird, und daß anderseits die Gleichungen (15), wenn die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ Null werden, d. h. wenn man bestimmt, daß die Achsen der ξ, η, ζ keine drehende Bewegung besitzen sollen, die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \left(\eta \frac{d^2 \zeta}{d t^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{d t^2}\right) &= \Sigma . M_\xi \\ \Sigma . m \left(\zeta \frac{d^2 \xi}{d t^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{d t^2}\right) &= \Sigma . M_\eta \\ \Sigma . m \left(\xi \frac{d^2 \eta}{d t^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{d t^2}\right) &= \Sigma . M_\zeta \end{aligned}\right\} ,$$

in welcher sie wieder ganz mit den Gleichungen (14) übereinkommen, wie dieses nach jener Voraussetzung offenbar der Fall sein muß.

§. 15.

In dem einfacheren Falle, wo die Momente der an einem veränderlichen System thätigen äußern Kräfte Null sind in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen, läßt sich das Gesetz der drehenden Bewegung dieses Systems in Bezug auf das genannte Coordinatensystem wie bei einem einzigen materiellen Punkte in mehrfacher Weise aussprechen oder deuten.

Der genannte Fall tritt insbesondere ein, einmal wie beim materiellen Punkte (Buch I., §. 71), 1) wenn die Resultirende der an demselben Punkte angreifenden äußern Kräfte für alle Punkte des Systems Null ist; 2) wenn die Richtung dieser Resultirenden für alle Punkte des Systems fortwährend durch einen und denselben Punkt geht und dieser als Anfang des unbeweglichen Coordinatensystems genommen wird, und dann allgemeiner 3) wenn alle an dem System thätigen äußern Kräfte immer eine einzige Resultirende haben und die Richtung dieser immer durch den Anfang der festen Coordinaten geht (Buch II., §§. 83 und 87).

In allen diesen Fällen hat man in Bezug auf die festen Achsen

$$\Sigma.(xY-yX)=0\ ,\quad \Sigma.(zX-xZ)=0\ ,\quad \Sigma.(yZ-zY)=0$$

und die Gleichungen (10) werden dadurch einfach

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0\ ,\\ &\Sigma.m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0\ ,\\ &\Sigma.m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0\ ;\end{aligned}\right.$$

es läßt sich nun jedes einzelne Summenglied für sich integriren und man findet so die Gleichungen:

$$19.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma.c_1\ ,\\ &\Sigma.m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma.c_2\ ,\\ &\Sigma.m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma.c_3\ ,\end{aligned}\right.$$

worin c_1 den anfänglichen Werth des Gliedes $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, c'_1 den des Gliedes $m'\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)$, u. s. f., $\Sigma.c_1$ also die Summe der anfänglichen Werthe aller in $\Sigma.m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ enthaltenen Glieder bedeutet, und $\Sigma.c_2$ und $\Sigma.c_3$ die entsprechenden Bedeutungen für die Summenglieder der zweiten und dritten Gleichung besitzen. Die Bedeutung dieser Gleichungen selbst kann wieder wie bei dem materiellen Punkte (Buch I., §§. 72 u. 73) auf verschiedene Weise ausgesprochen werden.

Zuerst kann man dieselben wie am genannten Orte unter die Form bringen:

$$18.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Sigma.mr_1^2\frac{d\omega_1}{dt}=\Sigma.c_1\ ,\qquad \Sigma.mr_2^2\frac{d\omega_2}{dt}=\Sigma.c_2\ ,\\ &\qquad\qquad \Sigma.mr_3^2\frac{d\omega_3}{dt}=\Sigma.c_3\ ,\end{aligned}\right.$$

indem man mit r_1, r_1', r_1'', etc. die Projectionen der von dem festen Anfangspunkte zu den einzelnen Punkten des Systems gezogenen Fahrstrahlen auf die Ebene der xy, und mit ω_1, ω_1', ω_1'', etc. die Winkel bezeichnet, welche diese projicirten Fahrstrahlen mit der Achse der x einschließen; ebenso mit r_2, r_2', r_2'', etc. die Projectionen derselben Fahrstrahlen auf die Ebene der xz und mit ω_2, ω_2', ω_2'', etc. die Winkel zwischen diesen Projectionen und der Achse der z, endlich mit r_3, r_3', r_3'', etc. die Projectionen jener Fahrstrahlen auf die Ebene der yz und mit ω_3, ω_3', ω_3'', etc. die Winkel der letztern Projectionen mit der Achse der y. Dabei ist noch zu beachten, daß die genannten Winkel ebenso wie ihre Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit: $\frac{d\omega_1}{dt}$, u. s. f. positiv zu nehmen sind, wenn die Bewegung der Projection des entsprechenden materiellen Punktes in der betreffenden Coordinaten-Ebene von der darauf stehenden positiven Achse aus angesehen im Sinne eines Uhrzeigers vor sich geht, im entgegengesetzten Falle werden sie negativ.

Betrachtet man dann den Ausdruck $r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt}$ als Aenderungsgesetz der doppelten Oberfläche O_1 des von dem projicirten Fahrstrahl r_1 in der Ebene der xy beschriebenen Sectors in Bezug auf die Zeit, so daß man hat

$$r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} = 2 \frac{dO_1}{dt},$$

ebenso für die übrigen Projectionen

$$r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} = 2 \frac{dO_2}{dt}, \quad r_3^2 \frac{d\omega_3}{dt} = 2 \frac{dO_3}{dt},$$

und dehnt diese Betrachtung und Bezeichnung auf alle Punkte des Systems aus, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\Sigma . m \frac{dO_1}{dt} = \tfrac{1}{2} C_1, \quad \Sigma . m \frac{dO_2}{dt} = \tfrac{1}{2} C_2, \quad \Sigma . m \frac{dO_3}{dt} = \tfrac{1}{2} C_3,$$

worin die Summen $\Sigma . c_1$, $\Sigma . c_2$, $\Sigma . c_3$ einfach durch C_1, C_2, C_3 ersetzt sind, und aus welchen man durch Integration in Bezug auf t die neuen Gleichungen:

$$\Delta . \Sigma . mO_1 = \tfrac{1}{2} C_1 t, \quad \Delta . \Sigma . mO_2 = \tfrac{1}{2} C_2 t, \quad \Delta . \Sigma . mO_3 = \tfrac{1}{2} C_3 t, \quad (19.$$

und den Schluß zieht:

Unter den im Eingang dieses Paragraphen ausgesprochenen Voraussetzungen wird die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems eine solche, daß die Änderung der Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte desselben in die von den Projectionen ihrer Fahrstrahlen in jeder der drei Coordinaten-Ebenen beschriebenen Sectorflächen der Zeit proportional sind; wobei aber zu beachten ist, daß diese Sectorflächen alle von demselben Zeitpunkte an zu rechnen und als positive oder negative Größen zu betrachten sind, deren Zeichen sich nach dem des entsprechenden Winkels ω richtet. Die Constanten C_1, C_2, C_3 bezeichnen dann offenbar die Summen der genannten Producte für die doppelte Zeiteinheit.

Man wird daraus leicht weiter schließen, daß weil diese Eigenschaft der Bewegung für drei unter sich rechtwinkliche Ebenen statt hat, sie überhaupt für jede andere Ebene besteht, daß man also auch sagen kann:

Unter jenen Voraussetzungen ändert sich die Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte eines veränderlichen Systems in die von den Projectionen ihrer Fahrstrahlen in irgend einer Ebene beschriebenen Sectorflächen der Zeit proportional.

Diese Eigenschaft der drehenden Bewegung besteht aber nicht nur in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen, sondern wie man sich leicht durch die Gleichungen (14) überzeugen wird, auch für ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Achsen sich immer parallel bleiben, und dessen Anfangspunkt entweder eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt oder mit dem Mittelpunkte der Masse des Systems zusammenfällt, immer unter denselben Voraussetzungen wie oben, daß entweder die äußern Kräfte an jedem einzelnen Punkte im Gleichgewichte sind, in welchem Falle der Mittelpunkt der Masse selbst eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, oder daß die Richtung der Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems beständig durch den beweglichen Anfangspunkt geht. Denn man hat in diesen beiden Fällen, von denen der letztere wieder als besondern Fall den einschließt, wo alle Kräfte gegen den beweglichen Anfangspunkt gerichtet sind, in den Gleichungen (14)

$$\Sigma . M_{Z,} = \Sigma . (x_, Y - y_, X) = 0 , \quad \Sigma . M_{Y,} = \Sigma . (z_, X - x_, Z) = 0 ,$$

$$\Sigma . M_{X,} = \Sigma . (y_, Z - z_, Y) = 0$$

und zieht damit aus diesen Gleichungen ganz dieselben Folgerungen, wie sie vorher aus den Gleichungen (10) in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen gezogen wurden.

Die vorhergehende Bedingung, daß die Resultirende aller äußern Kräfte des Systems immer durch den beweglichen Coordinaten-Anfang gehen muß, wird in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse offenbar insbesondere dann befriedigt werden, wenn jene Kräfte fortwährend unter sich parallel bleiben und den Massen ihrer Angriffspunkte proportional sind. Die oben erklärte Eigenschaft der drehenden Bewegung wird daher in Bezug auf jedes sich frei bewegende schwere System von nicht zu großer Ausdehnung an der Oberfläche der Erde statt haben, wenn dasselbe in Bezug auf seine drehende Bewegung blos der Wirkung der Schwere unterworfen vorausgesetzt, wenn also dafür von dem Luftwiderstand Umgang genommen wird.

§. 16.

Der vorhergehende Satz, welcher wie bei dem materiellen Punkte den Namen: Princip von der Einhaltung der Oberflächen führt, hat durch nachfolgende Betrachtung eine besondere Wichtigkeit für die Theorie des Weltgebäudes und die Astronomie erlangt.

Unter den unendlich vielen Ebenen, auf welche man die Bewegungen aller einzelnen Punkte des Systems projiciren kann, muß es eine geben, für welche die Summe der Producte aus den Massen jener Punkte in die von ihren projicirten Fahrstrahlen während einer bestimmten Zeit, z. B. in der doppelten Zeiteinheit beschriebenen Sectorflächen, einen größten Werth hat. Bezeichnen wir diese Summe mit C, und die Winkel, welche die Normale der zu bestimmenden Ebene mit den drei festen Achsen der x, y, z einschließt, mit λ, μ, ν, so hat man einmal die Bedingung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

und dann die Beziehung:

$$C = C_1 \cos\lambda + C_2 \cos\mu + C_3 \cos\nu ,$$

worin zwei Winkel, z. B. λ und μ als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind, während der dritte gemäß der vorhergehenden Bedingungsgleichung als Function dieser beiden auftritt. Man zieht daraus die Aenderungsgesetze:

$$\begin{cases} \cos\lambda \sin\lambda + \cos\nu \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\lambda} = 0 \,, \\ \cos\mu \sin\mu + \cos\nu \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\mu} = 0 \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{d\lambda} = - C_1 \sin\lambda - C_3 \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\lambda} = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\nu}(C_3 \cos\lambda - C_1 \cos\nu) \\ \dfrac{dC}{d\mu} = - C_2 \sin\mu - C_3 \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{\sin\mu}{\cos\nu}(C_3 \cos\mu - C_2 \cos\nu) \end{cases}$$

und die beiden letztern geben für einen größten Werth von C die beiden Bedingungen:

$$C_3 \cos\lambda - C_1 \cos\nu = 0 \quad , \quad C_3 \cos\mu - C_2 \cos\nu = 0 \,.$$

Damit findet man leicht für die Winkel λ, μ, ν die Functionen:

$$20.) \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \quad \cos\mu = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \\ \cos\nu = \dfrac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \end{cases}$$

aus welchen hervorgeht, daß die Lage dieser Ebene eine unveränderliche ist, da sie nur von den constanten Größen C_1, C_2, C_3 abhängt, daß sie daher, einmal während der Bewegung des Systems bestimmt, für die ganze Dauer derselben bekannt sein wird.

Wenn demnach eine solche Ebene für ein veränderliches System vorhanden ist, so wird es das Einfachste sein, diese Ebene selbst als eine der Coordinaten-Ebenen, z. B. als die der xy zu nehmen, wobei eine der beiden andern noch eine beliebige Lage um die Achse der z erhalten kann. Man hat dann aber in Bezug auf das neue Coordinatensystem

$$\lambda = \mu = \tfrac{1}{2}\pi \quad ; \quad \cos\lambda = \cos\mu = 0 \,,$$

mithin auch

$$C_1 = 0 \quad , \quad C_2 = 0 \,,$$

und schließt daraus, daß für jede Ebene, welche zu der Ebene der größten Flächensumme, wie wir sie kurz bezeichnen wollen, senkrecht ist, die Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte in die von den projicirten Fahrstrahlen beschriebenen Sectorflächen Null wird.

Laplace, welcher zuerst diese Eigenschaften der betreffenden Ebene entdeckte, hat ihr den Namen: unveränderliche Ebene (plan invariable) gegeben, und darauf in Bezug auf die Theorie der Bewegungen unsers Planetensystems die Hoffnung gegründet, daß es mittelst dieser Ebene möglich sein werde, die Beobachtungen vergangener und künftiger Jahrhunderte genau mit einander zu vergleichen, indem man dieselben auf ein Coordinatensystem beziehe, dessen eine Ebene mit jener unveränderlichen Ebene zusammenfalle. Untersuchen wir also, in wiefern die Voraussetzungen, auf welchen das Dasein einer unveränderlichen Ebene beruht, in unserem Planetensystem gegeben sind, indem wir davon Umgang nehmen, daß die jeweilige Bestimmung ihrer Lage immer nur eine angenäherte sein kann, weil zu einer genauen Bestimmung in irgend einem Augenblicke alle Massen des Systems, deren Entfernungen von einem festen oder von einem gleichförmig-geradlinig sich fortbewegenden Punkte und deren Geschwindigkeiten parallel zu festen oder mit diesem Punkte parallel, sich fortbewegenden Coordinaten-Achsen genau bekannt sein müßten.

Als erste Annäherung und daher für nicht große Zeiträume kann man zugeben, daß der Mittelpunkt der Masse unseres Planetensystems eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitze, und demgemäß in Bezug auf diesen Punkt die Producte aus den Massen der Planeten in die von ihren projicirten Fahrstrahlen beschriebenen Sectorflächen berechnen, um die Lage der Ebene der größten Flächensumme zu bestimmen. Es wird auch vor der Hand diese Art der Bestimmung die einzig mögliche bleiben, weil uns außerhalb unseres Planetensystems kein Punkt gegeben ist, welchen wir mit größerem Rechte als Anfang eines festen oder beweglichen Coordinatensystems annehmen könnten, um darauf die äußere Bewegung unseres Planetensystems zu beziehen. Es ist aber durchaus nicht nothwendig, dieser Bestimmung der unveränderlichen Ebene die sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich habende Annahme einer gleichförmigen-geradlinigen Bewegung für den Mittelpunkt der Masse unseres Planetensystems zu Grunde zu legen; wir können uns dazu mit viel größerer Annäherung und für viel größere Zeiträume geltend auf die bei weitem wahrscheinlichere Voraussetzung stützen, daß sich jener Mittelpunkt unseres Planetensystems in ähnlicher Weise um eine Central-Sonne bewegt, wie der Massemittelpunkt von Erde und Mond oder der des Systems, welches Jupiter mit seinen vier Trabanten bildet, um unsere Sonne, indem zwischen jener Central-Sonne und den einzelnen Körpern unseres Planetensystems das allgemeine Gesetz der Massen-Anziehung besteht.

Wenn diese Voraussetzung gegründet ist, so müßten wir streng-

genommen den Mittelpunkt jener Central-Sonne als Anfang eines festen oder, mit hinreichender Wahrscheinlichkeit und Annäherung, eines parallel und geradlinig-gleichförmig fortschreitenden Coordinatensystems annehmen, das Princip der Flächen würde auch noch unter diesen Bedingungen seine volle Gültigkeit haben und es folglich auch hier eine der Lage nach unveränderliche Ebene geben, da wir nun ein System haben, worin die äußern Kräfte alle gegen einen festen Punkt oder doch gegen einen gleichförmig-geradlinig sich fortbewegenden Coordinaten-Anfang gerichtet sind. Die bis jetzt noch unbekannte Lage und Entfernung jener Central-Sonne macht es uns indessen unmöglich, die Lage der unveränderlichen Ebene in Bezug auf sie als Coordinaten-Anfang zu berechnen, und zwingt uns, bei der zuerst angegebenen Art der Bestimmung jener Ebene zu bleiben, welche sich dann auch unter der jetzigen Voraussetzung mit sehr großer Annäherung rechtfertigen läßt, wenn man beachtet, daß die Entfernung jener Central-Sonne jedenfalls sehr groß ist gegen die Ausdehnung unseres Planetensystems, daß also der Mittelpunkt der Anziehung für jede Gestaltung des Systems sehr nahe mit dem Mittelpunkte seiner Masse zusammenfällt (Buch II., §§. 97 u. 108). Dieser Punkt kann demnach mit sehr großer Annäherung jederzeit als Angriffspunkt der Resultirenden und folglich auch als Anfang eines parallel sich bewegenden Coordinatensystems genommen werden, um das Princip der Erhaltung der Flächen zur Bestimmung der Ebene der größten Flächensumme anzuwenden. Ja es wird diese Bestimmung auch dann noch gültig bleiben, wenn auf unser Planeten-System nicht blos die anziehende Kraft der Central-Sonne wirkt, sondern auch die beliebig vieler andern Sonnen, obgleich durch diese die rein elliptische Bewegung des Mittelpunktes unseres Systems um jene Central-Sonne wesentlich beeinträchtigt werden mag, weil wegen der sehr großen Entfernung aller dieser Weltkörper die Mittelpunkte der von ihnen ausgehenden anziehenden Wirkungen immer sehr nahe mit dem Mittelpunkte der Masse unseres Planetensystems zusammenfallen und dieser daher immer sehr nahe der gemeinschaftliche Angriffspunkt aller dieser Kräfte, folglich auch der ihrer Resultirenden bleibt.

§. 17.

Den Gleichungen (17), welche die Gesetze der drehenden Bewegung für den Fall ausdrücken, wo das System eine allgemeine Resultirende hat, welche entweder Null ist, oder deren Richtung durch den Anfangspunkt der festen Coordinaten geht, läßt sich nun auch noch eine andere

als die geometrische Bedeutung, welche zu dem Princip von der Einhaltung der Flächen führte, unterlegen.

Bezeichnen wir nämlich mit P eine Kraft, welche die augenblickliche Bewegungsgröße mv des materiellen Punktes, dessen Masse = m, und dessen Geschwindigkeit und Coordinaten am Ende der Zeit t durch v, x, y, z vorgestellt sind, in der Einheit der Zeit zu erzeugen vermöchte (Buch I., §. 41) und welche dieselbe Richtung hat, wie die Geschwindigkeit dieses Punktes, so werden

$$m\frac{dx}{dt} = mu_x, \quad m\frac{dy}{dt} = mu_y, \quad m\frac{dz}{dt} = mu_z$$

die den festen Achsen parallelen Componenten dieser Kraft sein, und die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= mu_y x - mu_x y \\ m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= mu_x z - mu_z x \\ m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= mu_z y - mu_y z \end{aligned}\right\}$$

werden die drehenden Wirkungen dieser Kraft in Bezug auf dieselben Coordinaten-Achsen oder die zu diesen Achsen parallelen Componenten der Achse ihres Momentes M_{mv} in Bezug auf den festen Coordinaten-Anfang vorstellen. Mit dieser Unterlegung sprechen demnach die Gleichungen (17) aus, daß unter den obengenannten Bedingungen die Summe oder die Resultirende der drehenden Wirkungen aller Bewegungsgrößen in Bezug auf jede der drei Coordinaten-Achsen für die ganze Dauer der Bewegung unveränderlich ist, und durch die constanten Größen C_1, C_2, C_3 vorgestellt wird.

Diese Resultirenden C_1, C_2, C_3 sind aber selbst wieder die Componenten des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ aller Bewegungsgrößen, folglich dieses selbst unveränderlich, da man hat

$$\Sigma . M_{mv} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2},$$

ebenso wie die Lage seiner Achse, deren Winkel λ, μ, ν mit den drei Coordinaten-Achsen durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{C_1}{\Sigma . M_{mv}} = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{C_2}{\Sigma . M_{mv}} \quad , \quad \cos\nu = \frac{C_3}{\Sigma . M_{mv}}$$

bestimmt werden. Man schließt daraus, daß die Achse des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ aller Bewegungsgrößen mit der Normalen zur **Ebene der größten Flächensumme** zusammenfällt, oder daß diese Ebene die Ebene des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ ist.

Das eben ausgesprochene Gesetz der drehenden Bewegung, welches wir im vorhergehenden Buche schon auf anderem Wege für ein um einen festen Punkt sich drehendes festes System gefunden haben (Buch II., §. 191) gilt übrigens, wie man leicht aus den Gleichungen (14) und den ihnen zu Grunde liegenden Bedingungen schließen wird, auch in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Achsen sich immer parallel bleiben, und dessen Anfangspunkt entweder eine gleichförmige geradlinige Bewegung hat, oder der Mittelpunkt der Masse des Systems ist, immer unter der Voraussetzung, daß das System eine allgemeine Resultirende hat, deren Richtung durch den Anfangspunkt der beweglichen Coordinaten-Achsen geht. Jenes Gesetz wird also insbesondere wieder für jedes schwere System gültig sein, das an der Oberfläche der Erde eine freie Bewegung besitzt, in Bezug auf ein parallel bleibendes Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des bewegten Systems ist.

§. 18.

Wenn die vorher genannte Bedingung, daß die Richtung der Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems beständig durch den Coordinaten-Anfang geht, zugleich und fortwährend für einen festen außerhalb des Systems liegenden Punkt, und in Bezug auf einen beweglichen Coordinaten-Anfang befriedigt wird, so hat man in der Ebene der xy die Bedingungen:

$$\Sigma . (xY - yX) = 0 \quad , \quad \Sigma . (x_{\prime}Y - y_{\prime}X) = 0 \, ,$$

und schließt daraus mit den Beziehungen:

$$x = \mathfrak{x} + x_{\prime} \quad , \quad y = \mathfrak{y} + y_{\prime}$$

die weitere Bedingung:

a.) $$\mathfrak{x}\, \Sigma . Y - \mathfrak{y}\, \Sigma . X = 0 \, ;$$

für die beiden andern Coordinaten-Ebenen ergeben sich ebenso die entsprechenden Bedingungen:

$$z\Sigma.X - x\Sigma.Z = 0 \;, \quad y\Sigma.Z - z\Sigma.Y = 0 \;. \qquad (b.$$

Ist nun der bewegliche Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des bewegten Systems, so zieht man aus den Gleichungen (12ᵃ) in §. 12, wie es für einen materiellen Punkt in Buch I., §. 71 geschehen ist, die neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} M\left(X\frac{d^2Y}{dt^2} - Y\frac{d^2X}{dt^2}\right) &= X\Sigma.Y - Y\Sigma.X \\ M\left(Z\frac{d^2X}{dt^2} - X\frac{d^2Z}{dt^2}\right) &= Z\Sigma.X - X\Sigma.Z \\ M\left(Y\frac{d^2Z}{dt^2} - Z\frac{d^2Y}{dt^2}\right) &= Y\Sigma.Z - Z\Sigma.Y \end{aligned}\right\}, \qquad (c.$$

deren rechte Seiten unter der vorhergehenden Voraussetzung zufolge der daraus abgeleiteten Bedingungen (a) und (b), worin nun x, y, z in X, Y, Z übergehen, Null werden, und aus denen sich daher wie an dem genannten Orte durch die erste Integration die Gesetze ergeben:

$$\left.\begin{aligned} M\left(X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right) &= K_1 \\ M\left(Z\frac{dX}{dt} - X\frac{dZ}{dt}\right) &= K_2 \\ M\left(Y\frac{dZ}{dt} - Z\frac{dY}{dt}\right) &= K_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (21.$$

und diese führen endlich wieder dadurch, daß man sie der Reihe nach mit Z, Y, X multiplizirt und die Producte summirt, auf die Gleichung

$$K_1 Z + K_2 Y + K_3 X = 0 \;. \qquad (22.$$

Aus diesen Ergebnissen schließt man wie in dem genannten Paragraphen des ersten Buches, daß wenn es für ein veränderliches System von materiellen Punkten eine allgemeine Resultirende aller äußern Kräfte gibt, und deren Richtung immer zugleich durch einen festen Coordinaten-Anfang und durch den Mittelpunkt der Masse des Systems geht, dieser letztere sich in einer durch den Anfangspunkt der festen Coordinaten gehenden Ebene bewegt, und daß für ihn selbst das Princip von der Einhaltung der Flächen oder eines der in §. 73 des I. Buches ausgesprochenen mechanischen Gesetze gilt.

Umgekehrt wird man auch folgern, daß diese Gesetze für die Bewegung des Mittelpunktes der Masse eines Systems nicht mehr gültig sein können, wenn er nicht beständig Angriffspunkt der allgemeinen Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems bleibt und die Richtung dieser letztern nicht beständig durch einen festen Punkt geht, oder doch durch einen gleichförmig = geradlinig fortschreitenden, welcher außerhalb oder innerhalb des Systems liegen kann.

Man wird sich nämlich in Betreff dieser letztern Behauptung leicht überzeugen, daß man in den Gleichungen (14), welche sich auch auf einen gleichförmig = geradlinig fortschreitenden Coordinaten = Anfang beziehen, die Coordinaten x_1, y_1, z_1 wieder durch andere ersetzen kann, welche die Lage der Punkte des Systems in Bezug auf ein paralleles Coordinatensystem der x_2, y_2, z_2 ausdrücken, dessen Anfang der Mittelpunkt der Masse ist, und in Bezug auf die Achsen der x_1, y_1, z_1 durch die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 bestimmt wird; man wird demnach in den Gleichungen (14)

$$X_1 + x_2 \text{ für } x_1 \quad , \quad Y_1 + y_2 \text{ für } y_1 \quad , \quad Z_1 + z_2 \text{ für } z_1$$

einführen und so aus ihnen mit den Bedingungen:

$$\text{d.)} \quad \Sigma . m x_2 = 0 \quad , \quad \Sigma . m y_2 = 0 \quad , \quad \Sigma . m z_2 = 0 \; ,$$

welche aussprechen, daß der Mittelpunkt der Masse der Anfangspunkt der x_2, y_2, z_2 sein soll, und mit der Beachtung, daß die Gleichungen (11) nach unserer Voraussetzung:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

zuerst auf

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma . m \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma . X \quad , \quad \Sigma . m \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma . Y \\ \qquad\qquad \Sigma . m \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma . Z \end{array} \right.$$

zurückkommen und dann durch die obigen Werthe für x_1, y_1, z_1 und die Bedingungen (d) in die den Gleichungen (12) ähnlichen

$$23.) \quad M \frac{d^2 X_1}{dt^2} = \Sigma . X \quad , \quad M \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = \Sigma . Y \quad , \quad M \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = \Sigma . Z$$

übergehen, wieder die den Gleichungen (14) ganz ähnliche Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma.m\left(x_2\frac{d^2y_2}{dt^2}-y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)=\Sigma(x_2Y-y_2X)\\ \Sigma.m\left(z_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-x_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)=\Sigma(z_2X-x_2Z)\\ \Sigma.m\left(y_2\frac{d^2z_2}{dt^2}-z_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)=\Sigma(y_2Z-z_2Y)\end{array}\right\}\quad(24)$$

ableiten, und daraus allgemein schließen, daß alle Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems ebensowohl für parallel bleibende Coordinaten-Achsen, deren Durchschnittspunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung hat, wie für feste Coordinaten-Achsen gültig sind, natürlich unter sonst gleichen Voraussetzungen für beide Coordinatensysteme.

In Bezug auf unser Planetensystem ergibt sich aus der vorhergehenden Erörterung der Schluß, daß wenn man selbst die gegenseitige anziehende Wirkung der Planeten unter sich vernachläßigen wollte, der Massemittelpunkt von Erde und Mond oder der eines andern aus einem Hauptplaneten und seinen Trabanten gebildeten Systems doch noch keine reine elliptische Bewegung um die Sonne erhalten würde, weil der Mittelpunkt der Anziehung nicht genau mit dem Mittelpunkte der Masse zusammenfällt. Ja es würde strenggenommen jene Bewegung nicht einmal für die Erde allein statthaben, weil der Mittelpunkt der von der Sonne ausgehenden Anziehung wegen der elliptischen Gestalt der Erde und der Neigung ihrer Achse nicht immer auf der Geraden liegt, welche den Mittelpunkt der Sonne und den Mittelpunkt der Erdmasse verbindet. Es dürfte indessen wegen der geringen Größe der Erde im Vergleich zu der Entfernung der Sonne, welche 24000 Erdhalbmesser beträgt, kaum möglich erscheinen, die von dem erwähnten Umstande herrührende Abweichung von der rein elliptischen Bewegung durch die Beobachtung nachzuweisen. Es ist selbst bei dieser großen Entfernung der Sonne der Mittelpunkt der von ihr auf die Erde und ihren Mond ausgeübten Anziehung so wenig von dem Mittelpunkte der Masse dieser beiden Körper entfernt, daß ohne die anziehende Wirkung der übrigen Planeten zwischen der Bewegung dieses Mittelpunktes und einer rein-elliptischen Bewegung durch die Beobachtung kaum ein Unterschied gefunden werde dürfte.

§. 19.

Die Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems, welche wir in dem Vorhergehenden abgeleitet haben, finden sich vereinigt,

in dem Gesetze von der Aenderung der äußern lebendigen Kraft des Systems durch die äußere Arbeit der äußern Kräfte, welches sich in ähnlicher Weise ableiten läßt, wie es im vorhergehenden Buche (§. 205, u. s. f.) für ein festes System bewiesen wurde, und wie es im Folgenden geschehen soll, mehr wegen der vollständigen Durchführung der allgemeinen Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems und deßhalb, weil jenes Gesetz den entsprechenden Lehrsatz für feste Systeme als besondern Fall enthält, als weil derselbe für die Untersuchung gegebener Fälle dienlicher sein könnte, als die Gleichungen (12) und (14) oder (18).

Behalten wir dazu die bisherigen Bezeichnungen bei, insbesondere die in §§. 12 bis 14 angewendeten, so haben wir einmal zwischen den Coordinaten x, y, z eines der materiellen Punkte des Systems in Bezug auf feste rechtwinkliche Coordinaten-Achsen, den Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ desselben Punktes in Bezug auf ein fortschreitendes Coordinatensystem, dessen Achsen den vorigen immer parallel bleiben, und den Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Anfangspunktes der letztern die Beziehungen:

$$\text{a.)} \quad x = \mathfrak{x} + x_{,} \quad , \quad y = \mathfrak{y} + y_{,} \quad , \quad z = \mathfrak{z} + z_{,} \; ;$$

ferner ergeben sich zwischen den Coordinaten x, y, z und den Coordinaten ξ, η, ζ desselben Punktes in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem, dessen Achsen am Ende der Zeit t die Winkel $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, $\widehat{\eta y}$, u. s. f. mit den Achsen der x, y, z einschließen, die Gleichungen:

$$\text{b.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = a x_{,} + b y_{,} + c z_{,} \; , \\ \eta = a' x_{,} + b' y_{,} + c' z_{,} \; , \\ \zeta = a'' x_{,} + b'' y_{,} + c'' z_{,} \; , \end{array} \right.$$

worin a, b, c, a', b', c' u. s. f. die Cosinus der ebengenannten Winkel der Reihe nach bezeichnen.

Sei dann v die Geschwindigkeit des entsprechenden materiellen Punktes in Bezug auf das unbewegliche Coordinatensystem, u_x, u_y, u_z ihre Componenten nach den festen oder den parallel bleibenden beweglichen Achsen, u_ξ, u_η, u_ζ ihre Componenten nach den sich drehenden Achsen, und verstehen wir wieder unter der äußern Geschwindigkeit desselben Punktes die Geschwindigkeit $\widehat{v}$, deren Componenten nach den drei festen Achsen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{u_x} &= u_x - \left(a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt}\right)\\ \widehat{u_y} &= u_y - \left(b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt}\right)\\ \widehat{u_z} &= u_z - \left(c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}\right)\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

gegeben sind, während ihre zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten $\widehat{u_\xi}$, $\widehat{u_\eta}$, $\widehat{u_\zeta}$ durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{u_\xi} &= a\widehat{u_x} + b\widehat{u_y} + c\widehat{u_z} = u_\xi - \frac{d\xi}{dt}\\ \widehat{u_\eta} &= a'\widehat{u_x} + b'\widehat{u_y} + c'\widehat{u_z} = u_\eta - \frac{d\eta}{dt}\\ \widehat{u_\zeta} &= a''\widehat{u_x} + b''\widehat{u_y} + c''\widehat{u_z} = u_\zeta - \frac{d\zeta}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (d.$$

ausgedrückt werden, also diejenige Geschwindigkeit, welche der betreffende materielle Punkt besitzen würde, wenn er am Ende der Zeit t mit den sich drehenden Coordinaten-Achsen fest verbunden wäre. Endlich seien $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$, $\widehat{s}$ solche Functionen von t, daß man für diesen Zeitpunkt die Beziehungen hat:

$$\widehat{u_x} = \frac{d\widehat{x}}{dt}\,, \quad \widehat{u_y} = \frac{d\widehat{y}}{dt}\,, \quad \widehat{u_z} = \frac{d\widehat{z}}{dt}\,,$$

$$\widehat{v} = \sqrt{\widehat{u_x}^2 + \widehat{u_y}^2 + \widehat{u_z}^2} = \frac{d\widehat{s}}{dt}\,;$$

es werden dann die Verhältnisse

$$\frac{\widehat{u_x}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}\,, \quad \frac{\widehat{u_y}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}\,, \quad \frac{\widehat{u_z}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\,,$$

die Cosinus der Winkel sein, welche die Richtung der äußern Bewegung des betreffenden Punktes in demselben Augenblicke mit den festen Achsen bildet, und folglich der Ausdruck:

$$X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}$$

das Aenderungsgesetz der äußern Arbeit der an unserm Punkte thätigen äußern Kraft P vorstellen.

Nehmen wir nun von den Gleichungen (a) und (b) die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Veränderliche t, wodurch sich die Gleichungen:

$$\text{e.)}\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dx_{,}}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dy_{,}}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz_{,}}{dt}, \end{cases}$$

und

$$\text{f.)}\quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\frac{dx_{,}}{dt} + b\frac{dy_{,}}{dt} + c\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da}{dt} + y_{,}\frac{db}{dt} + z_{,}\frac{dc}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} = a'\frac{dx_{,}}{dt} + b'\frac{dy_{,}}{dt} + c'\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da'}{dt} + y_{,}\frac{db'}{dt} + z_{,}\frac{dc'}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} = a''\frac{dx_{,}}{dt} + b''\frac{dy_{,}}{dt} + c''\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da''}{dt} + y_{,}\frac{db''}{dt} + z_{,}\frac{dc''}{dt} \end{cases}$$

ergeben, und führen diese Werthe von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ in die Gleichungen (c) ein, so finden wir mit Beachtung der bekannten Bedingungsgleichungen zwischen den Cosinus a, b, c, u. s. f., und ihren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t die neuen Gleichungen:

$$\text{g.)}\quad \begin{cases} \widehat{u_x} = u_x - \frac{dx_{,}}{dt} + ry_{,} - qz_{,} \\ \widehat{u_y} = u_y - \frac{dy_{,}}{dt} + pz_{,} - rx_{,} \\ \widehat{u_z} = u_z - \frac{dz_{,}}{dt} + qx_{,} - py_{,} \end{cases}$$

worin die Coeffizienten p, q, r der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\begin{cases} c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\lambda \\ a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\mu \\ b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\nu \end{cases}$$

ersetzen und die angedeuteten Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ in Bezug auf die Achsen der $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ vorstellen. Ersetzen wir endlich noch die Werthe von u_x, u_y, u_z durch ihre Werthe aus den Gleichungen (e), die $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ durch ihre Werthe aus den Gleichungen (a) und dividiren die Gleichungen (g) durch $\widehat{v}$, so erhalten wir für die Cosinus $\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}$, $\frac{d\widehat{s}}{d\widehat{y}}$, $\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}$ folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} &= \frac{dx}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(y \cos\nu - z\cos\mu) + \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(y\cos\nu - z\cos\mu)\\
\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} &= \frac{dy}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu) + \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu)\\
\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} &= \frac{dz}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda) + \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda)
\end{aligned}\right\},$$

und der Ausdruck $\Sigma.\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right)$ für die äußere Arbeit sämmtlicher äußern Kräfte nimmt damit und mit Berücksichtigung derjenigen Factoren, wie $\frac{dx}{d\widehat{s}}$, $\frac{d\omega}{d\widehat{s}}$, $\cos\lambda$, u. s. f., welche alle Glieder dieser Summe gemeinschaftlich haben, die Form an:

$$\left[\frac{dx}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(y\cos\nu - z\cos\mu)\right]\Sigma.X + \left[\frac{dy}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu)\right]\Sigma.Y$$

$$+\left[\frac{dz}{d\widehat{s}} - \frac{d\omega}{d\widehat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda)\right]\Sigma.Z$$

$$+\frac{d\omega}{d\widehat{s}}\left[\cos\nu\,\Sigma(Xy - Yx) + \cos\mu\,\Sigma(Zx - Xz) + \cos\lambda\,\Sigma(Yz - Zy)\right].$$

Wir haben aber auch für ein veränderliches System gemäß der Gleichungen (9) und (10)

$$\Sigma.X = \Sigma.\mathfrak{X}\quad,\quad \Sigma.Y = \Sigma.\mathfrak{Y}\quad,\quad \Sigma.Z = \Sigma.\mathfrak{Z}$$

und

$$\Sigma(Xy - Yx) = \Sigma(\mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x), \quad \Sigma(Zx - Xz) = \Sigma(\mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z)$$

$$\Sigma(Yz - Zy) = \Sigma(\mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y),$$

wenn $\mathfrak{X} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt}$, $\mathfrak{Y} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt}$, $\mathfrak{Z} = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$ wieder die Componenten einer Kraft $\mathfrak{P}$ sind, welche dem materiellen Punkte xyz, wenn er frei wäre und unter denselben anfänglichen Umständen dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie jetzt in Verbindung mit dem System erhält, und schließen dadurch auf die Gleichung:

$$25.)\quad \Sigma\left(\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right) = \Sigma\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right),$$

welche ausspricht, daß das Aenderungsgesetz der **äußeren Arbeit der Kräfte** $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke dem der **äußern Arbeit aller äußern Kräfte P oder X, Y und Z gleich ist.**

§. 20.

Um endlich von dieser Gleichung auf die Aenderung der **äußern lebendigen Kraft** des Systems zu schließen, ersetze ich die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch diejenigen, welche die Aenderung der äußern Geschwindigkeiten u_x, u_y, u_z erzeugen; dazu geben uns die Gleichungen (c) die Beziehungen:

$$h.)\quad \begin{cases} \frac{du_x}{dt} = \frac{d\widehat{u}_x}{dt} + \left(a\frac{d^2\xi}{dt^2} + a'\frac{d^2\eta}{dt^2} + a''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{da''}{dt}\right), \\ \frac{du_y}{dt} = \frac{d\widehat{u}_y}{dt} + \left(b\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + b''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{db''}{dt}\right), \\ \frac{du_z}{dt} = \frac{d\widehat{u}_z}{dt} + \left(c\frac{d^2\xi}{dt^2} + c'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\ \qquad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{dc}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{dc'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc''}{dt}\right). \end{cases}$$

und wenn diese der Reihe nach mit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u_x}}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(a\widehat{u_\xi} + a'\widehat{u_\eta} + a''\widehat{u_\zeta}\right)\\
\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u_y}}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(b\widehat{u_\xi} + b'\widehat{u_\eta} + b''\widehat{u_\zeta}\right)\\
\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u_z}}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(c\widehat{u_\xi} + c'\widehat{u_\eta} + c''\widehat{u_\zeta}\right)
\end{aligned}\right\}$$

multiplicirt werden, so ergibt sich mit Beachtung der Gleichungen (d) und der Bedingungsgleichungen zwischen den Coeffizienten a, b, c, etc.

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} = m\left(\frac{\widehat{u_x}}{\widehat{v}}\frac{du_x}{dt} + \frac{\widehat{u_y}}{\widehat{v}}\frac{du_y}{dt} + \frac{\widehat{u_z}}{\widehat{v}}\frac{du_z}{dt}\right)\\
&= m\left(\frac{\widehat{u_x}}{\widehat{v}}\frac{d\widehat{u_x}}{dt} + \frac{\widehat{u_y}}{\widehat{v}}\frac{du_y}{dt} + \frac{\widehat{u_z}}{\widehat{v}}\frac{du_z}{dt}\right) + m\left(\frac{\widehat{u_\xi}}{\widehat{v}}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\widehat{u_\eta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\widehat{u_\zeta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u_\eta}}{\widehat{v}}\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u_\zeta}}{\widehat{v}}\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u_\xi}}{\widehat{v}}\frac{d\eta}{dt}\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u_\zeta}}{\widehat{v}}\frac{d\eta}{dt}\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u_\xi}}{\widehat{v}}\frac{d\zeta}{dt}\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u_\eta}}{\widehat{v}}\frac{d\zeta}{dt}\left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right)
\end{aligned}\right\},$$

oder wenn man die Werthe (Buch II., §. 185):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\\
\mathfrak{q} &= a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)\\
\mathfrak{r} &= a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)
\end{aligned}\right\}$$

einführt und einige sich leicht ergebende Umwandlungen vornimmt:

$$
\text{i.)}\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}+\mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}+\mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}=\frac{1}{2}\frac{d.m\widehat{v}^2}{d\widehat{s}}+m\left(\frac{\widehat{u_\xi}}{\widehat{v}}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\widehat{u_\eta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\widehat{u_\zeta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\
&+m\frac{d\xi}{d\widehat{s}}(\mathfrak{q}\widehat{u_\zeta}-\mathfrak{r}\widehat{u_\eta})+m\frac{d\eta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{r}\widehat{u_\xi}-\mathfrak{p}\widehat{u_\zeta})+m\frac{d\zeta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{p}\widehat{u_\eta}-\mathfrak{q}\widehat{u_\xi}).
\end{aligned}\right.
$$

Bezeichnet man demnach die Geschwindigkeit des Anfangspunktes der beweglichen Coordinaten-Achsen mit $\mathfrak{v}$, ihre Componenten nach den parallel bleibenden Achsen mit $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, so daß man hat

$$
\mathfrak{u}_x=\frac{dx}{dt}\;,\qquad \mathfrak{u}_y=\frac{dy}{dt}\;,\qquad \mathfrak{u}_z=\frac{dz}{dt}\;,
$$

ihre Componenten nach den sich drehenden Achsen mit $\mathfrak{u}_\xi$, $\mathfrak{u}_\eta$, $\mathfrak{u}_\zeta$, so finden wieder die Beziehungen statt:

$$
\text{k.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}_\xi&=a\,\mathfrak{u}_x+b\,\mathfrak{u}_y+c\,\mathfrak{u}_z\\
\mathfrak{u}_\eta&=a'\,\mathfrak{u}_x+b'\,\mathfrak{u}_y+c'\,\mathfrak{u}_z\\
\mathfrak{u}_\zeta&=a''\,\mathfrak{u}_x+b''\,\mathfrak{u}_y+c''\,\mathfrak{u}_z
\end{aligned}\right.\;;
$$

und man wird mit diesen und den Gleichungen (e) aus den Gleichungen:

$$
\left\{\begin{aligned}
x_{,}&=a\xi+a'\eta+a''\zeta\\
y_{,}&=b\xi+b'\eta+b''\zeta\\
z_{,}&=c\xi+c'\eta+b''\zeta
\end{aligned}\right.
$$

wie in §. 14, die Werthe ziehen:

$$
\text{l.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\widehat{u_\xi}&=u_\xi-\frac{d\xi}{dt}=\mathfrak{u}_\xi+\mathfrak{q}\zeta-\mathfrak{r}\eta\;,\\
\widehat{u_\eta}&=u_\eta-\frac{d\eta}{dt}=\mathfrak{u}_\eta+\mathfrak{r}\xi-\mathfrak{p}\zeta\;,\\
\widehat{u_\zeta}&=u_\zeta-\frac{d\zeta}{dt}=\mathfrak{u}_\zeta+\mathfrak{p}\eta-\mathfrak{q}\xi\;.
\end{aligned}\right.
$$

Führt man diese in die Gleichung (i) ein, und bezeichnet die Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ der innern Geschwindigkeit w mit w_ξ, w_η, w_ζ, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\mathfrak{X}\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}}+\mathfrak{Y}\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}}+\mathfrak{Z}\frac{d\hat{z}}{d\hat{s}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}\frac{d.m\hat{v}^2}{d\hat{s}} \\
+m\mathfrak{p}\left(\eta\frac{dw_\zeta}{d\hat{s}}-\zeta\frac{dw_\eta}{d\hat{s}}\right)+m\mathfrak{q}\left(\zeta\frac{dw_\xi}{d\hat{s}}-\xi\frac{dw_\zeta}{d\hat{s}}\right)+m\mathfrak{r}\left(\xi\frac{dw_\eta}{d\hat{s}}-\eta\frac{dw_\xi}{d\hat{s}}\right) \\
+m\mathfrak{p}^2\left(\eta\frac{d\eta}{d\hat{s}}+\zeta\frac{d\zeta}{d\hat{s}}\right)+m\mathfrak{q}^2\left(\xi\frac{d\xi}{d\hat{s}}+\zeta\frac{d\zeta}{d\hat{s}}\right)+m\mathfrak{r}^2\left(\xi\frac{d\xi}{d\hat{s}}+\eta\frac{d\eta}{d\hat{s}}\right) \\
-m\mathfrak{p}\mathfrak{q}\left(\xi\frac{d\eta}{d\hat{s}}+\eta\frac{d\xi}{d\hat{s}}\right)-m\mathfrak{p}\mathfrak{r}\left(\xi\frac{d\zeta}{d\hat{s}}+\zeta\frac{d\xi}{d\hat{s}}\right)-m\mathfrak{q}\mathfrak{r}\left(\eta\frac{d\zeta}{d\hat{s}}+\zeta\frac{d\eta}{d\hat{s}}\right) \\
+m\left(\mathfrak{u}_\xi\frac{dw_\xi}{d\hat{s}}+\mathfrak{u}_\eta\frac{dw_\eta}{d\hat{s}}+\mathfrak{u}_\zeta\frac{dw_\zeta}{d\hat{s}}\right) \\
+m\frac{d\xi}{d\hat{s}}(\mathfrak{q}\mathfrak{u}_\zeta-\mathfrak{r}\mathfrak{u}_\eta)+m\frac{d\eta}{d\hat{s}}(\mathfrak{r}\mathfrak{u}_\xi-\mathfrak{p}\mathfrak{u}_\zeta)+m\frac{d\zeta}{d\hat{s}}(\mathfrak{p}\mathfrak{u}_\eta-\mathfrak{q}\mathfrak{u}_\xi).
\end{array}\right.$$

Beachtet man ferner, daß

$$\eta\frac{dw_\zeta}{d\hat{s}}-\zeta\frac{dw_\eta}{d\hat{s}}=\frac{d.(\eta w_\zeta-\zeta w_\eta)}{d\hat{s}},\quad \zeta\frac{dw_\xi}{d\hat{s}}-\xi\frac{dw_\zeta}{d\hat{s}}=\frac{d.(\zeta w_\xi-\xi w_\zeta)}{d\hat{s}}$$

$$\xi\frac{dw_\eta}{d\hat{s}}-\eta\frac{dw_\xi}{d\hat{s}}=\frac{d.(\xi w_\eta-\eta w_\xi)}{d\hat{s}}$$

die Aenderungsgesetze der um die Achsen der ξ, η, ζ stattfindenden drehenden Wirkungen μ_ξ, μ_η, μ_ζ der innern Bewegungsgröße mw in Bezug auf $\hat{s}$ sind, nimmt dann mit Berücksichtigung der Größen, welche für alle Punkte des Systems dieselben Werthe behalten, die Summe der äußern Arbeiten aller Kräfte $\mathfrak{P}$, und bezeichnet wie früher die Massemomente des Systems

$$\Sigma.m(\eta^2+\zeta^2)\quad,\quad\Sigma.m(\xi^2+\zeta^2)\quad,\quad\Sigma.m(\xi^2+\eta^2)$$

in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ mit

$$\mathfrak{A}\quad,\quad\mathfrak{B}\quad,\quad\mathfrak{C}$$

ebenso die Summen:

$$\Sigma . m \xi \eta \quad , \quad \Sigma . m \xi \zeta \quad , \quad \Sigma . m \eta \zeta ,$$

der Reihe nach mit

$$\mathfrak{F} \quad , \quad \mathfrak{G} \quad , \quad \mathfrak{H} ,$$

endlich die Summen der drehenden Wirkungen μ_ξ, μ_η, μ_ζ, oder die Componenten der drehenden Wirkung der ganzen innern Bewegungsgröße $\Sigma . m w$ des Systems mit M_ξ, M_η, M_ζ, so wird man leicht finden, daß nun die Gleichung (25) die Form annimmt:

$$26.) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d . \Sigma . m \widehat{v}^2}{d\widehat{s}} = \Sigma . \left(X \frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z \frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} \right) \\ - \mathfrak{p} \frac{d . M_\xi}{d\widehat{s}} - \mathfrak{q} \frac{d . M_\eta}{d\widehat{s}} - \mathfrak{r} \frac{d . M_\zeta}{d\widehat{s}} \\ - \tfrac{1}{2} \mathfrak{p}^2 \frac{d \mathfrak{A}}{d\widehat{s}} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{q}^2 \frac{d \mathfrak{B}}{d\widehat{s}} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{r}^2 \frac{d \mathfrak{C}}{d\widehat{s}} \\ + \mathfrak{p}\mathfrak{q} \frac{d \mathfrak{F}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{p}\mathfrak{r} \frac{d \mathfrak{G}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}\mathfrak{r} \frac{d \mathfrak{H}}{d\widehat{s}} \\ - \mathfrak{u}_\xi \Sigma . m \frac{d w_\xi}{d\widehat{s}} - \mathfrak{u}_\eta \Sigma . m \frac{d w_\eta}{d\widehat{s}} - \mathfrak{u}_\zeta \Sigma . m \frac{d w_\zeta}{d\widehat{s}} \\ - (\mathfrak{q}\mathfrak{u}_\zeta - \mathfrak{r}\mathfrak{u}_\eta) \Sigma . m \frac{d\xi}{d\widehat{s}} - (\mathfrak{r}\mathfrak{u}_\xi - \mathfrak{p}\mathfrak{u}_\zeta) \Sigma . m \frac{d\eta}{d\widehat{s}} \\ - (\mathfrak{p}\mathfrak{u}_\eta - \mathfrak{q}\mathfrak{u}_\xi) \Sigma . m \frac{d\zeta}{d\widehat{s}} . \end{aligned} \right.$$

Trifft man daher noch die Bestimmung, daß der Mittelpunkt der Masse des Systems der Anfangspunkt der beweglichen Achsen sei und daß die Hauptachsen in diesem Punkte die sich drehenden Achsen vorstellen sollen, so erhält man die Bedingungen:

$$\Sigma . m \xi = 0 \quad , \quad \Sigma . m \eta = 0 \quad , \quad \Sigma . m \zeta = 0$$
$$\mathfrak{F} = 0 \quad , \quad \mathfrak{G} = 0 \quad , \quad \mathfrak{H} = 0$$

es fallen demnach die vier letzten Zeilen der vorstehenden Gleichung hinaus, und sie wird dadurch die einfachste Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.\Sigma.m\widehat{v}^2}{d\widehat{s}} = 2\Sigma\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right)\\ - \mathfrak{p}^2\frac{d\mathfrak{A}}{d\widehat{s}} - \mathfrak{q}^2\frac{d\mathfrak{B}}{d\widehat{s}} - \mathfrak{r}^2\frac{d\mathfrak{C}}{d\widehat{s}}\\ - 2\mathfrak{p}\frac{dM_\xi}{d\widehat{s}} - 2\mathfrak{q}\frac{dM_\eta}{d\widehat{s}} - 2\mathfrak{r}\frac{dM_\zeta}{d\widehat{s}}\end{aligned}\right\}$$

annehmen, unter welcher sie das Gesetz ausspricht, nach welchem sich die äußere lebendige Kraft durch die äußere Arbeit der äußern Kräfte mit Rücksicht auf die Aenderungen im innern Zustande des Systems in jedem Augenblicke zu ändern im Begriffe steht. Die wirkliche Aenderung dieser äußern lebendigen Kraft ergibt sich daher durch das Integral:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.m v^2 - \Sigma.m v_0^2 = 2\Sigma\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right)\\ - \int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(\mathfrak{p}^2\frac{d\mathfrak{A}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}^2\frac{d\mathfrak{B}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{r}^2\frac{d\mathfrak{C}}{d\widehat{s}}\right)\\ - 2\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(\mathfrak{p}\frac{d.M_\xi}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}\frac{d.M_\eta}{d\widehat{s}} + \mathfrak{r}\frac{d.M_\zeta}{d\widehat{s}}\right)\end{aligned}\right\} (27.$$

Anstatt der Hauptachsen, welche freilich die einzigen sind, die mit dem System in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, kann man übrigens auch wieder drei andere durch den Mittelpunkt der Masse gezogene unter sich senkrechte Geraden als Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ wählen, und diesen eine vorgeschriebene drehende Bewegung beilegen, und es wird im jetzigen Falle das einfachste sein, die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ dieses Coordinatensystems constant anzunehmen; denn man erhält dadurch mit Berücksichtigung der Bedingung, daß der Mittelpunkt der Masse der bewegliche Anfangspunkt bleibt, aus der Gleichung (26) das Integral:

$$28.)\left\{\begin{aligned}&\Sigma.m\widehat{v}^2-\Sigma.m\widehat{v}_0^2=2\Sigma.\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}}d\widehat{s}\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}+Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}+Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right)\\&-(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_0)\mathfrak{p}^2-(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_0)\mathfrak{q}^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_0)\mathfrak{r}^2,\\&+2(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_0)\mathfrak{p}\mathfrak{q}+2(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}_0)\mathfrak{p}\mathfrak{r}+2(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\mathfrak{q}\mathfrak{r},\\&-2\mathfrak{p}(M_\xi-M_\xi^{(0)})-2\mathfrak{q}(M_\eta-M_\eta^{(0)})-2\mathfrak{r}(M_\zeta-M_\zeta^{(0)}),\end{aligned}\right.$$

worin $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $M_\xi^{(0)}$, etc. die anfänglichen Werthe der mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M_ξ, etc. bezeichneten Größen vorstellen.

Für $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}=\mathfrak{r}=0$ kommt die vorstehende Gleichung auf ihre erste Zeile zurück; man hat dann aber auch gemäß der Gleichungen (1)

$$\widehat{u}_\xi=\mathfrak{u}_\xi=\mathfrak{U}_\xi\quad,\quad\widehat{u}_\eta=\mathfrak{u}_\eta=\mathfrak{U}_\eta\quad,\quad\widehat{u}_\zeta=\mathfrak{u}_\zeta=\mathfrak{U}_\zeta\ ,$$

wenn $\mathfrak{U}_\xi$, $\mathfrak{U}_\eta$, $\mathfrak{U}_\zeta$ die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Mittelpunktes der Masse sind, woraus dann weiter

$$\widehat{v}=\mathfrak{V}\quad,\quad\widehat{x}=\mathfrak{X}\quad,\quad\widehat{y}=\mathfrak{Y}\quad,\quad\widehat{z}=\mathfrak{Z}\quad,\quad\widehat{s}=\mathfrak{S}\ ,$$

folgt und sich die Gleichung

$$29.)\quad M\mathfrak{V}^2-M\mathfrak{V}_0^2=2\Sigma.\int_{\mathfrak{S}_0}^{\mathfrak{S}}d\mathfrak{S}\left(X\frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{S}}+Y\frac{d\mathfrak{Y}}{d\mathfrak{S}}+Z\frac{d\mathfrak{Z}}{d\mathfrak{S}}\right),$$

ergibt, welche die Aenderung der lebendigen Kraft des die ganze Masse in sich vereinigenden Mittelpunktes ausdrückt und auch unmittelbar aus den Gleichungen (12) in §. 12 hervorgehet.

Soll endlich das System ein unveränderliches sein, so wird man leicht erkennen, daß die rechte Seite der Gleichung (26) für jede Lage des beweglichen Anfangspunktes auf das erste Glied zurückkommt, daß man nun aber auch hat

$$\widehat{u}_\xi=u_\xi\quad,\quad\widehat{u}_\eta=u_\eta\quad,\quad\widehat{u}_\zeta=u_\zeta\quad,\quad\widehat{v}=v\ ,$$
$$\widehat{x}=x\quad,\quad\widehat{y}=y\quad,\quad\widehat{z}=z\quad,\quad\widehat{s}=s\ ,$$

daß folglich das Integral der genannten Gleichung:

$$\Sigma . m v^2 - \Sigma . m v_0^2 = 2 \Sigma . \int_{s_0}^{s} ds \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \qquad (30.$$

mit der Gleichung (139) des vorhergehenden Buches (§. 206) gleichbedeutend ist.

§. 21.

Die Gesetze, welche wir im Vorhergehenden abgeleitet haben, gelten in dieser Form nur für die äußere Bewegung eines freien Systems; sie können jedoch, wie es bei festen Systemen der Fall war, auch auf solche veränderliche Systeme ausgedehnt werden, welche in ihrer Bewegung dadurch beschränkt sind, daß ein oder mehrere Punkte oder ganze Theile derselben als unbeweglich vorausgesetzt oder in ihrer Bewegung gewissen Bedingungen unterworfen werden, die wir wieder dadurch anschaulich machen können, daß wir uns gewisse Curven oder Flächen denken, auf welchen bestimmte Punkte des Systems während seiner Bewegung bleiben müssen. Die Gleichungen für diese Bewegung werden sich dann aus den allgemeinen Gleichungen (9) und (10) dadurch ergeben, daß wir in diese die normalen Widerstände, welche jene Flächen oder Curven zu leisten haben als Kräfte von unbekannter Intensität einführen und durch Elimination daraus entfernen. Die genannten Gleichungen nehmen dadurch, wie für feste Systeme, die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma . X - \Sigma . N \cos\lambda \\ \Sigma . m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma . Y - \Sigma . N \cos\mu \\ \Sigma . m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma . Z - \Sigma . N \cos\nu \end{aligned}\right\}, \qquad (30.$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_Z - \Sigma . N (x' \cos\mu - y' \cos\lambda) \\ \Sigma . m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_Y - \Sigma . N (z' \cos\lambda - x' \cos\nu) \\ \Sigma . m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_X - \Sigma . N (y' \cos\nu - z' \cos\mu) \end{aligned}\right\}, \qquad (31.$$

worin N einen dieser Widerstände, λ, μ, ν die Winkel zwischen seiner Richtung und den drei festen Coordinaten-Achsen und x', y', z', die

Coordinaten des entsprechenden in seiner Bewegung beschränkten Punktes bezeichnen. Diese Gleichungen können dann in dem Falle, wo zwischen den die Bewegung beschränkenden Flächen und den darauf sich stützenden Punkten des Systems keine Reibung stattfindet, wieder in solche umgewandelt werden, welche sich auf ein durch den Mittelpunkt der Masse gelegtes parallel fortschreitendes Coordinatensystem beziehen, welche also aus den Gleichungen (12ª) und (14) hervorgehen, wenn in diese die Widerstände N eingeführt werden. Man erhält dadurch einerseits für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes die Gleichungen:

$$32.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2 X}{dt^2} = \Sigma . X - \Sigma . N \cos\lambda \\[2ex] M\dfrac{d^2 Y}{dt^2} = \Sigma . Y - \Sigma . N \cos\mu \\[2ex] M\dfrac{d^2 Z}{dt^2} = \Sigma . Z - \Sigma . N \cos\nu \end{cases}$$

und dann für die drehende Bewegung um denselben die Gleichungen:

$$33.)\quad \begin{cases} \Sigma . m\left(x_{,}\dfrac{d^2 y_{,}}{dt^2} - y_{,}\dfrac{d^2 x_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{Z_{,}} - \Sigma . N(x_{,}' \cos\mu - y_{,}' \cos\lambda)\ , \\[2ex] \Sigma . m\left(z_{,}\dfrac{d^2 x_{,}}{dt^2} - x_{,}\dfrac{d^2 z_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{Y_{,}} - \Sigma . N(z_{,}' \cos\lambda - x_{,}' \cos\nu)\ , \\[2ex] \Sigma . m\left(y_{,}\dfrac{d^2 z_{,}}{dt^2} - z_{,}\dfrac{d^2 y_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{X_{,}} - \Sigma . N(y_{,}' \cos\nu - z_{,}' \cos\mu)\ , \end{cases}$$

aus welchen in jedem Falle der Anwendung die unbekannten Kräfte N noch eliminirt werden müssen, wie im vorhergehenden Buche gezeigt worden ist.

Zu diesem Zwecke reichen die vorhergehenden sechs Gleichungen bei festen Systemen immer aus; bei veränderlichen Systemen dagegen kann einerseits der Fall eintreten, daß diese sechs Gleichungen nicht mehr genügen, um alle Widerstände N zu eliminiren, da hier viel mehr Punkte in ihrer Bewegung beschränkt werden können, ohne die Bewegung überhaupt ganz aufzuheben, als dort, und dann werden auf der andern Seite die in ihrer Bewegung beschränkten Punkte oder Theile des Systems im Allgemeinen auch in ihrer innern Bewegung beschränkt sein; sie werden daher, sofern diese durch besondere innere Kräfte hervorgerufen wird, auch wegen dieser Beschränkung einen Druck auf die

sie beschränkenden Hindernisse ausüben und einen im entgegengesetzten Sinne gerichteten Widerstand hervorrufen, welcher als äußere Kraft in die obigen Gleichungen eintritt, dessen Intensität aber nur durch die innern Kräfte und die innere Bewegung bestimmt werden kann, nämlich dadurch, daß man denselben auch in die Gleichung für die innere Bewegung des Berührungspunktes einführt. In solchen Fällen müssen demnach beide Bewegungen neben einander betrachtet und combinirt werden, um die unbekannten Widerstände aus den Gleichungen dieser Bewegungen eliminiren zu können.

Ein ähnlicher Fall tritt ein, wenn durch den Druck der in ihrer Bewegung beschränkten Punkte auf die beschränkenden Hindernisse Reibung erzeugt wird, da diese auch wie der Widerstand einer festen Fläche wirken kann, nämlich dann, wenn sie größer ist, als der auf den entsprechenden Berührungspunkt ausgeübte Schub, d. h. als die Kraft, welche denselben auf der die Bewegung beschränkenden Fläche fortschieben will. In diesen Fällen müssen daher die Gleichungen (9) und (10), nachdem in dieselben sowohl die Widerstände N als die dadurch hervorgerufenen Reibungen fN eingeführt worden, wie im vorhergehenden Buche §. 215 u. f. gezeigt wurde, zuerst in andere umgewandelt werden, welche sich auf den betreffenden Berührungspunkt beziehen, d. h. auf ein Coordinatensystem, dessen Achsen zu den festen Coordinaten-Achsen parallel bleiben und dessen Anfangspunkt der betreffende Berührungspunkt ist, um unterscheiden zu können, wann die fördernde Wirkung der Reibung größer und wann kleiner ist, als der tangentiale Schub. Für diesen werden nun aber auch die innern Kräfte maßgebend, wenn sie den Berührungspunkt auf der ihn beschränkenden Fläche gleiten machen wollen; man muß deßhalb in diesem Falle wie im vorhergehenden beide Bewegungen, die innere und die äußere, verbinden, um den ganzen tangentialen Schub bestimmen zu können. Ist dann die Reibung fN größer als die letztere Kraft, so wirkt sie gerade so wie der Widerstand eines festen Punktes, an welchem sich der Berührungspunkt stützt und muß wie eine solche Kraft von unbekannter Intensität eliminirt werden; ist sie dagegen kleiner, so kann sie wie jede andere Kraft in die Gleichungen (9) und (10) oder (12) und (14) eingeführt und die Bewegung des Systems unmittelbar in Bezug auf das durch den Mittelpunkt der Masse gelegte Coordinatensystem untersucht werden.

Die Gleichungen, welche zu der vorhergehenden Untersuchung nothwendig sind und sich auf ein durch den in Betrachtung zu nehmenden Berührungspunkt gelegtes Coordinatensystem beziehen, ergeben sich einfach

aus unsern Gleichungen (11) und (13), wenn darin die Widerstände N und die Reibungen fN eingeführt werden, und man jenen Berührungspunkt als denjenigen nimmt, dessen Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen dort mit x, y, z bezeichnet sind. Für unsern jetzigen Zweck wollen wir dieselben aber wie im vorhergehenden Buche (§. 216 u. f.) mit $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ bezeichnen und die Coordinaten irgend eines andern Punktes im System in Bezug auf parallele Achsen, deren Anfang der betreffende Berührungspunkt ist, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, die des Mittelpunktes der Masse insbesondere durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ darstellen. Dadurch werden die Gleichungen (11)

$$34.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2} = \Sigma.X - M\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\lambda \pm f\cos l) \\[2ex] M\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2} = \Sigma.Y - M\dfrac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\mu \pm f\cos m) \\[2ex] M\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2} = \Sigma.Z - M\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\nu \pm f\cos n) \end{cases}$$

Die Gleichungen (13) dagegen werden den dem Berührungs- und Anfangspunkt der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ entsprechenden Druck N sowie die von demselben erzeugte Reibung nicht enthalten, und daher die allgemeine Form annehmen:

$$35.)\quad \begin{cases} \Sigma.m\left(\mathfrak{x}\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} - \mathfrak{y}\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right) = M_{\mathfrak{z}} - M\left(\mathfrak{X}\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2} - \mathfrak{Y}\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{x}'\cos\mu' - \mathfrak{y}'\cos\lambda') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{x}'\cos m' - \mathfrak{y}'\cos l'), \\[2ex] \Sigma.m\left(\mathfrak{z}\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} - \mathfrak{x}\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right) = M_{\mathfrak{y}} - M\left(\mathfrak{Z}\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2} - \mathfrak{X}\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{z}'\cos\lambda' - \mathfrak{x}'\cos\nu') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{z}'\cos l' - \mathfrak{x}'\cos n'), \\[2ex] \Sigma.m\left(\mathfrak{y}\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} - \mathfrak{z}\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right) = M_{\mathfrak{x}} - M\left(\mathfrak{Y}\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2} - \mathfrak{Z}\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{y}'\cos\nu' - \mathfrak{z}'\cos\mu') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{y}'\cos n' - \mathfrak{z}'\cos m'). \end{cases}$$

Die Anwendung dieser letzten Gleichungen kann zwar auch in dem Falle, wo die Reibung größer ist, als der tangentiale Schub am Berührungspunkte dadurch umgangen werden, daß man, wie schon bemerkt wurde, diese Reibung wie den Widerstand eines festen Punktes in die

Gleichungen (32) und (33) einführt und durch Elimination entfernt; die vorhergehenden Gleichungen sind aber der Natur der Bewegung entsprechender und drücken alle dabei obwaltenden Verhältnisse schärfer aus.

Ueberhaupt muß hier noch bemerkt werden, daß für die Untersuchung der Bewegung eines in seiner Bewegung beschränkten veränderlichen Systems die Gleichungen (32) und (33) nicht diejenigen sind, welche am einfachsten zum Ziele führen. In den meisten Fällen thut man besser, das System zuerst theilweise zu betrachten, die unbekannten innern Kräfte, welche die Verbindung zwischen den einzelnen Theilen herstellen, in die Gleichungen einzuführen, und sie dann durch die Verbindung der für die einzelnen Theile erhaltenen Gleichungen einerseits zu eliminiren und anderseits auch ihre Werthe zu bestimmen. Namentlich wird dieses Verfahren nothwendig werden, wenn das System aus mehreren festen Systemen, oder aus festen und stetig veränderlichen zusammengesetzt ist, wie dieß in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und wofür einige einfache Beispiele gegeben werden sollen.

§. 22.

Nach den Formen, welche wir den Gleichungen (30) bis (35) gegeben haben, ist vorausgesetzt, daß nur einzelne Punkte des veränderlichen Systems in ihrer Bewegung beschränkt sind, also auch nur in einzelnen Punkten Druck und Widerstand stattfindet. Es kann hier aber auch der Fall eintreten, daß sich das System längs einer stetig aufeinanderfolgenden Reihe von Punkten, also längs einer Linie und selbst mit einer Fläche auf eine feste Fläche stützt und streng genommen wird dieß wegen der Zusammendrückbarkeit der Körper immer stattfinden. In diesem Falle gibt es für einen geometrisch bestimmten Punkt jener Berührungslinie oder Fläche keinen absoluten oder physischen Druck mehr, weil mit diesem jetzt nothwendig die Vorstellung einer gewissen Länge oder Fläche verbunden werden muß, auf welche er ausgeübt wird, sondern nur noch einen geometrischen Druck, welcher eine Function der Coordinaten des betreffenden Punktes ist und nach der innern Beschaffenheit des Systems bestimmt werden muß. Die rechtwinkligen Componenten dieses geometrischen Druckes stellen dann die Aenderungsgesetze der entsprechenden Componenten des physischen Druckes vor, welcher auf einen in jenem Punkte begrenzten Längen- oder Flächentheil der Berührungslinie oder Fläche ausgeübt wird, in Bezug auf die Aenderung dieses Längen- oder Flächentheiles; ebenso sind die Momente des geometrischen Druckes in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen die entsprechenden Aenderungsgesetze der um dieselben Achsen

stattfindenden drehenden Wirkungen des auf denselben Längen- oder Flächentheil ausgeübten physischen Druckes.

Beachtet man nun, daß der geometrische Druck in dem Punkte $x' y' z'$ einerseits eine Function dieser Veränderlichen oder doch der unabhängigen unter ihnen ist, also bei einer Berührungslinie eine Function von x', bei einer Berührungsfläche eine Function von x' und y', deren Form von der innern Beschaffenheit des Systems abhängt, und dann noch einen Factor enthalten muß, welcher den geometrischen Druck in einem bestimmten Punkte des bewegten Systems vorstellt, welcher also für die ganze Ausdehnung der Berührungslinie oder Berührungsfläche unveränderlich ist und die nun zu eliminirende Unbekannte sein wird, und bezeichnet man demgemäß die Intensität des geometrischen Druckes in dem Punkte $x' y' z'$ mit $n\psi$, worin n den zuletzt genannten Factor ψ die vorhererwähnte Function von x' oder von x' und y' bedeutet, ferner mit λ', μ', ν' die Winkel seiner Richtung gegen die drei Achsen, welche auch die der Normalen der gedrückten Fläche in dem betreffenden Punkte sind, so werden durch die Producte:

$$n\psi \cos\lambda' \quad , \quad n\psi \cos\mu' \quad , \quad n\psi \cos\nu'$$

seine rechtwinkligen fördernden Componenten, durch

$$n\psi(x' \cos\mu' - y' \cos\lambda') \quad , \quad n\psi(z' \cos\lambda' - x' \cos\nu')$$
$$n\psi(y' \cos\nu' - z' \cos\mu')$$

seine drehenden Wirkungen in Bezug auf die festen Achsen ausgedrückt werden, und man hat dann für eine Berührungslinie statt der Summenglieder $\Sigma . N \cos\lambda$, etc. die Integrale:

$$36.) \left\{ \begin{aligned} \Sigma . N \cos\lambda &= n \int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\lambda' = n \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\lambda' \frac{ds'}{dx'} \\ \Sigma . N \cos\mu &= n \int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\mu' = n \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\mu' \frac{ds'}{dx'} \\ \Sigma . N \cos\nu &= n \int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\nu' = n \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\nu' \frac{ds'}{dx'} \end{aligned} \right.$$

in die Gleichungen (30) einzuführen, für eine Berührungsfläche dagegen die Integrale:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.N\cos\lambda&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\cos\lambda'\frac{d^2O}{dx'dy'}\\ \Sigma.N\cos\mu&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\cos\mu'\frac{d^2O}{dx'dy'}\\ \Sigma.N\cos\nu&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\cos\nu'\frac{d^2O}{dx'dy'}\end{aligned}\right\}$$

oder da man auch hat (B. II., §. 54.)

$$\frac{d^2O}{dx'dy'}=\frac{1}{\cos\nu'},$$

in einfacherer Form:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.N\cos\lambda=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\frac{\cos\lambda'}{\cos\nu'},\quad \Sigma.N\cos\mu=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\frac{\cos\mu'}{\cos\nu'}\\ \Sigma.N\cos\nu=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\psi\end{aligned}\right\},\ (37.$$

Auf gleiche Weise wird man in den Gleichungen (31) die Momente $\Sigma.N(x\cos\mu-y\cos\lambda)$ u. s. f. durch folgende Integrale ersetzen, für eine Berührungslinie durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.N(x'\cos\mu-y'\cos\lambda)&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'.\psi\frac{ds'}{dx'}(x'\cos\mu'-y'\cos\lambda')\\ \Sigma.N(z'\cos\lambda-x'\cos\nu)&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'.\psi\frac{ds'}{dx'}(z'\cos\lambda'-x'\cos\nu')\\ \Sigma.N(y'\cos\nu-z'\cos\mu)&=n\int_{x_0'}^{x'}dx'.\psi\frac{ds'}{dx'}(y'\cos\nu'-z'\cos\mu')\end{aligned}\right\}\ (38.$$

für eine Berührungsfläche durch die Werthe:

$$39.)\begin{cases} \Sigma.N(z'\cos\mu-y'\cos\lambda)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(z'\cos\mu'-y'\cos\lambda') \\ \Sigma.N(x'\cos\lambda-x'\cos\nu)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(z'\cos\lambda'-x'\cos\nu') \\ \Sigma.N(y'\cos\nu-z'\cos\mu)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(y'\cos\nu'-z'\cos\mu') \end{cases}$$

In allen diesen Ausdrücken sind die Winkelfunctionen $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ aus der Gleichung: $z' = F(x', y')$ der die Bewegung beschränkenden Fläche mittels der Beziehungen:

$$\cos\nu' = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2}},$$

$$\cos\lambda' = -\frac{dz'}{dx'}\cos\nu' \quad , \quad \cos\mu' = -\frac{dz'}{dy'}\cos\nu'$$

als Functionen der Veränderlichen x' und y', und dann für die Integrale (36) und (38) mittels der Projectionsgleichung: $y' = f(x')$ der Berührungscurven in Function von x' allein darzustellen. Die Grenzen der Integrale bestimmen sich hier nach der Ausdehnung der Berührungslinie, in den Integralen (37) und (39) nach der Begrenzung des gedrückten Flächentheiles.

Auf ähnliche Weise lassen sich dann auch die fördernden und drehenden Componenten der Reibung ausdrücken. Bezeichnet f den Reibungs-Coeffizienten, welcher für die ganze Ausdehnung der Berührungslinie oder Berührungsfläche und für jede Lage des Systems auf der die Bewegung beschränkenden Fläche als unveränderlich vorausgesetzt wird, so wird die in dem Punkte $x'\,y'\,z'$ stattfindende geometrische Reibung durch $fn\psi$ ausgedrückt; ihre Richtung ist der der Bewegung dieses Punktes gerade entgegengesetzt. Stellt daher $y'_0 = f_0(x_0')$ die Gleichung der auf die Ebene der xy projicirten Curve vor, welche von dem Punkte

$x' y' z'$ auf der die Bewegung beschränkenden Fläche: $z' = f(x', y')$ beschrieben wird, so können die Cosinus der Winkel l', m', n', welche die Richtung der Bewegung jenes Punktes mit den drei Achsen bildet, durch

$$\cos l' = \frac{d x_0'}{d s_0'} \quad , \quad \cos m' = \frac{d y_0'}{d s_0'} \quad , \quad \cos n' = \frac{d z_0'}{d s_0'}$$

ausgedrückt werden, und man erhält damit für die fördernden Componenten der Reibung in dem betreffenden Punkte die Werthe:

$$f n \psi \frac{d x_0'}{d s_0'} \quad , \quad f n \psi \frac{d y_0'}{d s_0'} \quad , \quad f n \psi \frac{d z_0'}{d s_0'} ,$$

woraus wieder die drehenden Componenten auf gewöhnliche Weise hervorgehen und in Bezug auf die festen Achsen der x, y, z die Formen annehmen:

$$f n \psi \left(y' \frac{d z_0'}{d s_0'} - z' \frac{d y_0'}{d s_0'} \right) \quad , \quad f n \psi \left(z' \frac{d x_0'}{d s_0'} - x' \frac{d z_0'}{d s_0'} \right)$$

$$f n \psi \left(x' \frac{d y_0'}{d s_0'} - y' \frac{d x_0'}{d s_0'} \right) .$$

Für die fördernden Componenten der physischen Reibung hat man demnach bei einer Berührungslinie wieder die Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma . f N \cos l' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d x_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \\ \Sigma . f N \cos m' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d y_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \\ \Sigma . f N \cos n' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d z_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \end{aligned} \right\} \quad (40.$$

für eine Berührungsfläche dagegen die Integrale:

41.)
$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma . fN \cos l' &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dx_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'} \\
\Sigma . fN \cos m' &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dy_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'} \\
\Sigma . fN \cos n' &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dz_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'}
\end{aligned}\right.$$

zu berechnen, und die drehenden Wirkungen der physischen Reibung um die festen Achsen der x, y, z ergeben sich für eine Berührungslinie unter der Form:

42.)
$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma . fN(y'\cos n' - z'\cos m') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'}\left(y'\frac{dz_0'}{ds_0'} - z'\frac{dy_0'}{ds_0'}\right), \\
\Sigma . fN(z'\cos l' - x'\cos n') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'}\left(z'\frac{dx_0'}{ds_0'} - x'\frac{dz_0'}{ds_0'}\right), \\
\Sigma . fN(x'\cos m' - y'\cos l') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'}\left(x'\frac{dy_0'}{ds_0'} - y'\frac{dx_0'}{ds_0'}\right),
\end{aligned}\right.$$

für eine Berührungsfläche dagegen hat man die Ausdrücke:

43.)
$$\left\{\begin{aligned}
\Sigma . fN(y'\cos n' - z'\cos m') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'}\left(y'\frac{dz_0'}{ds_0'} - z'\frac{dy_0'}{ds_0'}\right) \\
\Sigma . fN(z'\cos l' - x'\cos n') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'}\left(z'\frac{dx_0'}{ds_0'} - x'\frac{dz_0'}{ds_0'}\right) \\
\Sigma . fN(x'\cos m' - y'\cos l') &= fn\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'}\left(x'\frac{dy_0'}{ds_0'} - y'\frac{dx_0'}{ds_0'}\right).
\end{aligned}\right.$$

Alle diese Werthe (36) bis (43) für die Componenten des Druckes und der Reibung gelten nur für die Gleichungen (30) und (31) in Bezug auf die festen Coordinaten-Achsen; es ist aber nicht schwer, wenn sie für diese dargestellt sind, die den Gleichungen (32) und (33) oder den Gleichungen (34) und (35) entsprechenden Ausdrücke durch Vertauschung der Coordinaten abzuleiten.

Im Allgemeinen werden sich aber für die Anwendung jener Ausdrücke bedeutende Schwierigkeiten darbieten und namentlich wird die Integration derjenigen für die Componenten der Reibung nur in solchen Fällen möglich werden, wo die Richtung der Bewegung eines beliebigen Punktes der Berührungslinie oder Berührungsfläche bekannt ist. Auch setzt die Anwendung des Vorhergehenden nothwendig die Kenntniß des innern Zustandes des entsprechenden veränderlichen Systems voraus, weßhalb Beispiele dieser Art erst gegeben werden könnten, wenn wir diese innern Zustände für besondere veränderliche Systeme kennen gelernt haben, um so mehr als hier meistens die äußere Bewegung auch von einer innern Bewegung des Systems begleitet ist, und mit dieser in Zusammenhang steht.

In einigen einfachen Fällen und unter besondern Voraussetzungen über den innern Zustand des Systems lassen sich indessen die Untersuchungen mit hinreichender Allgemeinheit durchführen, wie wir sogleich an einigen Beispielen sehen werden.

§. 23.

Wir haben bereits in den §§. 177 und 178 des vorhergehenden Buches Bewegungen veränderlicher Systeme untersucht, und wollen nun den letztern dieser Fälle in folgender Fassung allgemeiner betrachten.

Zwei schwere parallelepipedische Körper A und B Fig. 3, welche sich auf zwei geneigte feste Ebenen stützen, sind durch einen gewichtlosen vollkommen biegsamen Faden von unveränderlicher Länge verbunden, der über eine sogenannte feste Rolle C, d. h. eine Rolle mit unbeweglicher horizontaler Drehungsachse geschlagen ist; es soll die Bewegung dieses Systems unter der Voraussetzung untersucht werden, daß die Durchschnittslinie der beiden Ebenen wagrecht und die Achse der Rolle zu dieser Durchschnittslinie parallel ist, daß die Schwerpunkte der beiden Körper A und B anfänglich in einer durch die Scheibe der Rolle gehenden zu ihrer Achse senkrechten Ebene liegen und entweder keine oder eine in dieser Ebene gerichtete anfängliche Geschwindigkeit besitzen, daß die Befestigungs-

punkte D und E des Fadens derselben Ebene angehören und von den festen Ebenen ebensoweit entfernt sind, wie die genannten Schwerpunkte, endlich daß auch die Reibung berücksichtigt wird, aber mit der Beschränkung, daß dieselbe den beiden Körpern keine drehende Bewegung zu ertheilen strebt, daß also die Resultirenden der Reibung in der vorhergenannten verticalen Ebene liegen, welche die Schwerpunkte und den Faden enthält.

Die eben gemachten Voraussetzungen bezwecken, wie man leicht einsehen wird, die Bewegung der beiden Schwerpunkte auf die durch die Scheibe der Rolle gelegte vertikale Ebene zu beschränken; wir wollen also diese Ebene, die Ebene der Figur, als Ebene der xz annehmen, den Anfangspunkt O in den Durchschnitt der beiden Geraden AO und BO verlegen, welche durch die beiden Schwerpunkte A und B parallel zu den festen Ebenen MQ und NQ gezogen sind; die Achse der z sei parallel zur Richtung der Schwere und ihr dem Sinne nach entgegengesetzt, die positive Hälfte also aufwärts gerichtet. Wir können dann das System in den Körper A, die Rolle C und den Körper B zerlegen und die Gleichungen für diese einzelnen Theile aufstellen; die Bedingung, daß der Faden eine unveränderliche Länge besitzt, und daß die Reibung des Fadens auf dem Umfang der Rolle viel größer ist, als die des Zapfens der Rolle, daß also der Faden auf der Rolle nicht gleitet, wird die Verbindung dieser Gleichungen herstellen und zur Elimination der unbekannten Spannungen des Fadens, welche innere Kräfte des Systems sind, dienen. Seien also

P_1, P_2 die Gewichte der Körper A und B,

P_3 das Gewicht der Rolle C,

$2a_1$ die Länge der zu der Ebene der Figur parallelen Kanten des Körpers A, $2a_2$ die entsprechende Größe für B,

$2b_1$ und $2b_2$ die zu den festen Ebenen senkrechten Kanten derselben,

x_1, z_1 und x_2, z_2 die Coordinaten der Schwerpunkte von A und B,

$Mk^2 = \frac{P_3}{g} k^2$ das Massemoment der Rolle,

r der Halbmesser der Rinne, in welcher der Faden liegt,

ϱ der Halbmesser der Zapfen, auf welchen sie sich dreht,

a_3 und c_3 die Coordinaten des Achsendurchschnitts in der Ebene der Figur,

l die Länge des Fadens,

γ_1, γ_2 die Winkel, welche die Normalen zu den festen Ebenen mit der positiven Achse der z bilden,

J_1 die Spannung des Fadens zwischen dem Körper A und der Rolle,
J_2 die zwischen der Rolle und dem Körper B, endlich
f_1, f_2, f_3 die Reibungscoeffizienten für die Körper A und B und den Zapfen der Rolle.

Ersetzen wir dann noch den Druck N_1, welchen der Körper A auf die geneigte Ebene MQ ausübt, oder den Widerstand, welchen diese zu leisten hat durch zwei parallele Componenten N_1' und N_1'', von denen die eine im untern, die andere im obern Endpunkte des in der Figur dargestellten Hauptschnittes angreift, ebenso den Widerstand N_2 der Ebene NQ gegen den Druck des Körpers B durch die entsprechenden Componenten N_2', N_2'', so erhalten wir für die im Sinne der negativen z und positiven x fortschreitende Bewegung des Körpers A die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_1}{g}\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= (N_1' + N_1'')(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) + J_1\cos\widehat{J_1 x}\\ \frac{P_1}{g}\frac{d^2 z_1}{dt^2} &= (N_1' + N_1'')(\cos\gamma_1 + f_1\sin\gamma_1) + J_1\sin\widehat{J_1 x} - P_1\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

und die Bedingungen dafür, daß der Körper immer seiner ganzen Länge nach auf der Ebene MQ aufliegt, und demnach keine drehende Bewegung um den Schwerpunkt A in der Ebene der Figur stattfindet, sind

$$\left.\begin{aligned} z_1\cos\gamma_1 + x_1\sin\gamma_1 &= 0\\ -(N_1' - N_1'')a_1 + f_1(N_1' + N_1'')b_1 + J_1 a_1\sin\widehat{J_1 O} &= 0\end{aligned}\right\} \quad (b.$$

worin $\widehat{J_1 O}$ den Winkel zwischen der Richtung der Fadenspannung J_1 und der Geraden AO vorstellt.

Multiplizirt man dann die erste der Gleichungen (a) mit $\sin\gamma_1$, die zweite mit $\cos\gamma_1$ und nimmt ihre Summe, so erhält man zufolge der ersten Gleichung (b) und mit der Beachtung, daß $\widehat{J_1 O} = \pi - (\widehat{J_1 x} + \gamma)$ und

$$\sin\widehat{J_1 x}\cos\gamma + \cos\widehat{J_1 x}\sin\gamma = \sin\widehat{J_1 O}$$

ist, die Gleichung:

$$N_1' + N_1'' = P_1\cos\gamma_1 - J_1\sin\widehat{J_1 O}$$

und diese mit der zweiten Gleichung (b) verbunden, gibt den Ausdruck:

$$N_1' - N_1'' = \frac{b_1}{a_1} f_1 P_1 \cos\gamma_1 + J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(1 - f_1 \frac{b_1}{a_1}\right),$$

aus welchen die Werthe folgen:

$$\left\{\begin{aligned} N_1' &= \frac{1}{2} P_1 \cos\gamma_1 \left(1 + f_1 \frac{b_1}{a_1}\right) - \frac{1}{2} f_1 \frac{b_1}{a_1} J_1 \sin\widehat{J_1 O}, \\ N_1'' &= \frac{1}{2} P_1 \cos\gamma_1 \left(1 - f_1 \frac{b_1}{a_1}\right) - \frac{1}{2} J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(2 - f_1 \frac{b_1}{a_1}\right). \end{aligned}\right.$$

Der Körper A wird seiner ganzen Länge nach aufliegen, so lange N_1' und N_1'' noch positive Werthe haben, also so lange man hat

$$P_1 \cos\gamma_1 \left(1 + f_1 \frac{b_1}{a_1}\right) > f_1 \frac{b_1}{a_1} J_1 \sin\widehat{J_1 O}$$

und

$$P_1 \cos\gamma_1 \left(1 - f_1 \frac{b_1}{a_1}\right) > J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(2 - f_1 \frac{b_1}{a_1}\right).$$

Multipliciren wir ferner die erste der Gleichungen (a) mit $\cos\gamma_1$, die zweite mit $\sin\gamma_1$ und nehmen ihre Differenz, so folgt mit der Beachtung, daß

$$\cos\widehat{J_1 x}\cos y - \sin J_1 x \sin y = -\cos\widehat{J_1 O}$$

ist, die Gleichung:

$$\frac{P_1}{g}\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}\cos\gamma_1 - \frac{d^2 z_1}{dt^2}\sin\gamma_1\right) = P_1 \sin\gamma - (N_1' + N_1'') f_1 - J_1 \cos\widehat{J_1 O};$$

man sieht aber leicht ein, daß $x_1 \cos\gamma - z_1 \sin\gamma$ die Entfernung des Schwerpunktes A von dem Anfangspunkte O ist; bezeichnen wir daher die Entfernung OD mit w_1, so daß

$$w_1 = x_1 \cos\gamma_1 - z_1 \sin\gamma_1 - a_1$$

wird, und ersetzen $N_1' + N_1''$ durch ihren obigen Werth, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form an:

$$\text{c.)}\quad \frac{P_1}{g}\frac{d^2 w_1}{dt^2} = P_1(\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) - J_1(\cos\widehat{J_1 O} - f_1 \sin\widehat{J_1 O}).$$

Für die Bewegung des Körpers B erhalten wir unter der Voraussetzung, daß der Körper A der sinkende, B der steigende ist, daß also hier die Reibung zu Gunsten von P_2 wirkt, ebenso die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_2}{g}\frac{d^2 x_2}{dt^2} &= J_2 \cos \widehat{J_2 x} - (N_2' + N_2'')(\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) \\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2 z_2}{dt^2} &= J_2 \sin \widehat{J_2 x} + (N_2' + N_2'')(\cos \gamma_2 - f_2 \sin \gamma_2) - P_2 \end{aligned}\right\} (a'.$$

und die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} z_2 \cos \gamma_2 - x_2 \sin \gamma_2 &= 0 \\ (N_2' - N_2'')\, a_2 + f_2 (N_2' + N_2'')\, b_2 - J_2\, a_2 \sin \widehat{J_2 O} &= 0 \end{aligned}\right\} (b'.$$

aus welchen sich in ähnlicher Weise wie vorher die Werthe ergeben:

$$\left.\begin{aligned} N_2' + N_2'' &= P_2 \cos \gamma_2 - J_2 \sin \widehat{J_2 O} \\ N_2' - N_2'' &= - f_2 \frac{b_2}{a_2} \cos \gamma_2 + J_2 \sin \widehat{J_2 O} \left(1 + \frac{b_2}{a_2} f_2\right) \end{aligned}\right\},$$

und sonach

$$\left.\begin{aligned} N_2' &= \frac{1}{2} P_2 \cos \gamma_2 \left(1 - f_2 \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{1}{2} f_2 \frac{b_2}{a_2} J_2 \sin \widehat{J_2 O} \\ N_2'' &= \frac{1}{2} P_2 \cos \gamma_2 \left(1 + f_2 \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{1}{2} J_2 \sin \widehat{J_2 O} \left(2 + f_2 \frac{b_2}{a_2}\right) \end{aligned}\right\}$$

Der Körper B wird seiner ganzen Länge nach auf NO aufliegen, wenn $N_2' > 0$ und $N_2'' > 0$ ist. Für die Entfernung $w_2 + a_2$ des Schwerpunktes B auf der NO von O hat man nun den Ausdruck:

$$x_2 \cos \gamma_2 + z_2 \sin \gamma_2$$

und zieht demnach aus den Gleichungen (a′) mit dem Werthe von $N_2' + N_2''$ die neue Gleichung:

$$\frac{P_2}{g}\frac{d^2 w_2}{dt^2} = P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) - J_2 (\cos \widehat{J_2 O} + f_2 \sin \widehat{J_2 O}) \quad (c'.$$

Die Rolle C besitzt keine fortschreitende Bewegung; bezeichnet man daher den Widerstand, welchen das Zapfenlager zu leisten hat, mit N_3, so ergeben sich mit der Beachtung, daß die Spannungen des Fadens an der Rolle den frühern an den Körpern A und B entgegengesetzt sind, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= - J_1 \sin \widehat{J_1 x} - J_2 \cos \widehat{J_2 x} + N_3 \cos \widehat{N_3 x} + f_3 N_3 \sin \widehat{N_3 x} \\ 0 &= - P_3 - J_1 \sin \widehat{J_1 x} - J_2 \sin \widehat{J_2 x} + N_3 \sin \widehat{N_3 x} + f_3 N_3 \cos \widehat{N_3 x} \end{aligned}\right\}$$

und zieht daraus den Werth (I. Bd. §. 29):

$$f_3 N_3 = \frac{f_3}{\sqrt{1+f_3^2}} S$$

worin S die Resultirende der Kräfte P_2, J_1 und J_2 vorstellt. Damit erhält man dann für die drehende Bewegung der Rolle, d. h. für das Aenderungsgesetz der Winkelgeschwindigkeit φ derselben die Gleichung:

$$M k^2 \frac{d\varphi}{dt} = (J_1 - J_2) r - f_3 N_3 \varrho$$

wenn man $\frac{f_3}{\sqrt{1+f_3^2}}$ durch f_4 ersetzt,

d.) $$M k^2 \frac{d\varphi}{dt} = (J_1 - J_2) r - f_4 S \varrho \ .$$

Um nun die Gleichungen (c), (c′) und (d) zu verbinden und die unbekannten Größen zu eliminiren, haben wir zuerst für die von C auf die AO gefällte Senkrechte $CJ = m_1$ den Werth:

$$m_1 = c_3 \cos \gamma_1 + a_3 \sin \gamma_1$$

und für den Abstand n_1 des Fußpunktes J derselben von O, nach der Verlängerung von AO positiv genommen

$$n_1 = c_3 \sin \gamma_1 - a_3 \cos \gamma_1 \ .$$

Damit folgt der Ausdruck für den Abstand CD und dann für die Länge l_1 des Fadens zwischen dem Befestigungspunkte D und dem Berührungspunkte J auf der Rolle

$$l_1 = \sqrt{(w_1 + n_1)^2 + m_1^2 - r^2} \ .$$

Ferner ergeben sich aus der Figur die Gleichungen:

e.) $$\begin{cases} l_1 \sin \widehat{J_1 O} = m_1 + r_3 \cos \widehat{J_1 O} \\ l_1 \cos \widehat{J_1 O} = w_1 + n_1 - r_3 \sin \widehat{J_1 O} \end{cases}$$

und dann daraus die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \sin \widehat{J_1 O} &= \frac{l_1 m_1 + r(w_1 + n_1)}{l_1^2 + r^2} \\ \cos \widehat{J_1 O} &= \frac{l_1 (w_1 + n_1) - m_1 r}{l_1^2 + r^2} \end{aligned}\right\} .$$

Auf gleiche Weise findet man für den senkrechten Abstand m_2 des Mittelpunktes C von der Geraden BO den Ausdruck:

$$m_2 = c_3 \cos \gamma_2 - a_3 \sin \gamma_2$$

und für die auf BO gemessene Entfernung n_2 von O den Werth:

$$n_2 = a_3 \cos \gamma_2 + c_3 \sin \gamma_2 \ .$$

Die Länge l_2 des Fadenstückes zwischen den Punkten E und G ist dann

$$l_2 = \sqrt{(w_2 + n_2)^2 + m_2^2 - r^2}$$

und für die Functionen $\sin \widehat{J_2 O}$ und $\cos \widehat{J_2 O}$ hat man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \sin \widehat{J_2 O} &= \frac{l_2 m_2 + r(w_2 + n_2)}{l_2^2 + r^2} \\ \cos \widehat{J_2 O} &= \frac{l_2 (w_2 + n_2) - m_2 r}{l_2^2 + r^2} \end{aligned}\right\}$$

Bezeichnet man dann noch den Mittelpunktswinkel, welcher dem vom Faden berührten Bogen der Rolle entspricht, mit ψ, so findet man leicht

$$\psi = \gamma_1 + \gamma_2 + \widehat{J_1 O} + \widehat{J_2 O} \ ;$$

die betreffende Fadenlänge l_3 ist daher

$$l_3 = r\psi = r(\gamma_1 + \gamma_2) + r(\widehat{J_1 O} + \widehat{J_2 O}) \ ,$$

und die Bedingung:

$$l = l_1 + l_2 + l_3 \qquad (1.$$

gibt eine Beziehung zwischen w_1 und w_2. Beachtet man ferner, daß wenn der Körper A sich fortbewegt, ein Punkt auf dem Umfange der Rolle einen Weg zurücklegt, welcher um den kleinen Bogen, um den der Berührungspunkt J zurückgeht, kleiner ist als die Aenderung der Fadenlänge l_1 und daß der jenem kleinen Bogen entsprechende Winkel der Aenderung des Winkels $\widehat{J_1 O}$ gleich ist, so findet man für eine Drehung der Rolle um den Winkel $\Delta\omega$ die Beziehung:

$$r\Delta\omega = \Delta l_1 - r\Delta . \widehat{J_1 O}$$

und dadurch das Aenderungsgesetz in Bezug auf die Zeit

$$\text{g.)} \qquad r\frac{d\omega}{dt} = r\varphi = \left(\frac{dl_1}{dw_1} - r\frac{d.\widehat{J_1 O}}{dw_1}\right)\frac{dw_1}{dt}.$$

Die bisher abgeleiteten Gleichungen enthalten die zur Auflösung unserer Aufgabe nothwendigen Beziehungen; diese Beziehungen sind aber nicht einfach genug, um die Auflösung direct durchführen zu können, da die Schlußgleichung der Elimination zu verwickelt ist, als daß eine Integration derselben möglich wäre. Ich beschränke daher die Auflösung auf den einfacheren Fall, wo die Achse der Rolle eine solche Lage hat, daß die Fadenstücke DJ und EG zu den Ebenen MQ und NQ parallel, die Winkel $\widehat{J_1 O}$ und $\widehat{J_2 O}$ also Null sind und bleiben.

Die entsprechende Lage der Achse ergibt sich am einfachsten aus den Gleichungen (e) und den entsprechenden für $\widehat{J_2 O}$; man zieht nämlich daraus mit der vorhergenannten Bedingung

$$0 = m_1 + r \quad , \quad 0 = m_2 + r \;,$$
$$l_1 = w_1 + n_1 \quad , \quad l_2 = w_2 + n_2 \;;$$

wenn dann für m_1 und m_2 ihre Werthe gesetzt werden, so erhält man für die Coordinaten a_3 und c_3 der Achse C der Rolle die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} a_3 &= -r\frac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}, \\ c_3 &= -r\frac{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}, \end{aligned}\right.$$

und diese geben für n_1 und n_2 denselben Werth:

$$n_1 = n_2 = -r\frac{1-\cos(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\,\tang\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2),$$

wie man es übrigens auch leicht der Figur 4 entnehmen wird, welche diesen besondern Fall darstellt.

Für diese Lage der Achse der Rolle werden unsere Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1}{g}\frac{d^2w_1}{dt^2} &= P_1(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) - J_1 \\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2w_2}{dt^2} &= P_2(\sin\gamma_2 + f_2\cos\gamma_2) - J_2 \\ \frac{P_3}{g}k^2\frac{d\varphi}{dt} &= (J_1 - J_2)r - f_4 S\varrho \end{aligned}\right\}, \quad (h.$$

und stehen durch die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 + n_1 + w_2 + n_2 + r(\gamma_1 + \gamma_2) &= l \\ r\frac{d\omega}{dt} = r\varphi &= \frac{dw_1}{dt} \end{aligned}\right\}, \quad (i.$$

unter sich in Verbindung. Diese geben

$$\frac{d^2w_2}{dt^2} = -\frac{d^2w_1}{dt^2}, \qquad r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2w_1}{dt^2};$$

und damit erhält man, wenn die dritte der Gleichungen (h) zu der Differenz der beiden ersten addirt wird:

$$\left.\begin{aligned} \left(P_1 + P_2 + P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2w_1}{dt^2} &= gP_1(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) \\ &- gP_2(\sin\gamma_2 + f_2\cos\gamma_2) - f_4 gS\frac{\varrho}{r} \end{aligned}\right\} \quad (k.$$

und für S hat man nun den Werth:

$$S = \sqrt{P_3^2 + J_1^2 + J_2^2 - 2J_1J_2\cos(\gamma_1+\gamma_2) + 2P_3J_1\sin\gamma_1 + 2P_3J_2\sin\gamma_2},$$

da $\widehat{J_1 x} = \pi - \gamma_1$, $\widehat{J_2 x} = \gamma_2$ wird. Bezeichnet man dann die Geschwindigkeit des Körpers A mit v_1, so daß man hat:

$$v_1 = \frac{dw_1}{dt}, \qquad \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2w_1}{dt^2};$$

ersetzt zur Abkürzung die Größen $P_1(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1)$ und $P_2(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2)$ durch P' und P'', und führt für J_1 und J_2 deren Werthe aus den Gleichungen (h) in den Werth von S ein, so findet man folgende Gleichung:

$$
1.)\left\{\begin{aligned}
&\left[\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r}[P_1{}^2+P_2{}^2+2P_1P_2\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right]\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2\\
&-2g\left[(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r}(P_1P_3\sin\gamma_1-P_2P_3\sin\gamma_2)\right.\\
&\qquad\left.-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}[P_1P'-P_2P''+(P_2P'-P_1P'')\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right]\frac{dv_1}{dt}\\
&+g^2\left[(P'-P'')^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}[P'^2+P''^2-2P'P''\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right.\\
&\qquad\left.-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}(P_3{}^2+2P_3P'\sin\gamma_1+2P_3P''\sin\gamma_2)\right]=0\,,
\end{aligned}\right.
$$

welche nach $\frac{dv_1}{dt}$ aufgelöst, leicht nach t integrirt werden kann, und die Gleichungen einer gleichförmig veränderten Bewegung gibt. Man kann übrigens dieselbe, ohne der Genauigkeit sehr nahe zu treten, etwas vereinfachen, wenn sowohl der Reibungscoeffizient als das Verhältniß $\frac{\varrho}{r}$ des Zapfenhalbmessers zu dem Halbmesser der Rolle nicht größer als $\frac{1}{10}$ ist; denn es ist dann $f_4{}^2\,\frac{\varrho^2}{r^2}$ kleiner als 0,0001 und kann ohne merklichen Fehler gegen die Einheit vernachläſſigt werden. Beachtet man also, daß man immer hat

$$P_1{}^2+P_2{}^2+2\,P_1\,P_2\cos(\gamma_1+\gamma_2)<\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2$$

$$P_1P'-P_2P''+(P_2P'-P_1P'')\cos(\gamma_1+\gamma_2)<(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)$$

daß auch $P_1\,P_3\sin\gamma_1-P_2\,P_3\sin\gamma_2$ gegen den vorhergehenden Factor von $2g$ sehr klein ist und die beiden letzten eingeklammerten Glieder

$$P'^2+P''^2-2P'P''\cos(\gamma_1+\gamma_2)+P_3{}^2+2P_3P'\sin\gamma_1+2P_3P''\sin\gamma_2$$

das Quadrat der Resultirenden P_4 der Kräfte

$$P'=P_1(\sin\gamma_1-f_1\cos\gamma_1)\quad;\quad P''=P_2(\sin\gamma_1+f_2\cos\gamma_2)\ \text{und}\ P_3$$

vorstellen, so kann man der Gleichung (1) die einfachere Form geben:

$$\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2-2g(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{dt}$$

$$+g^2\left((P'-P'')^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}P_4{}^2\right)=0$$

oder auch

$$\left[\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{dt}-g(P'-P'')\right]^2-g^2f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}P_4{}^2=0$$

und zieht daraus mit der Beachtung, daß nach der Voraussetzung die Reibung an der Rolle der Geschwindigkeit v_1 entgegenwirken muß, den Werth:

$$\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{d}=g\left[(P'-P'')-f_4\frac{\varrho}{r}P_4\right],$$

welcher zeigt, daß die Beschleunigung c der Bewegung durch

$$c=g\frac{r^2(P'-P'')-f_4\varrho r P_4}{(P_1+P_2)r^2+P_3k^2}$$

ausgedrückt wird. Unserer Voraussetzung, daß der Körper A der sinkende sei, wird also entsprochen werden, wenn der Werth von c positiv ist, und die Bedingungen für die Voraussetzung, daß beide Körper auf ihren Ebenen aufliegen, werden einfach

$$N_1''>0 \quad \text{oder} \quad 1-f_1\frac{b_1}{a_1}>0,$$

$$N_2'>0 \quad \text{oder} \quad 1-f_2\frac{b_2}{a_2}>0.$$

Man wird nach diesem nun wieder leicht auf den im zweiten Buche (§. 178) behandelten Fall zurückgehen, für welchen man $\gamma_1=\gamma_2=\frac{1}{2}\pi$, also auch $P'=P_1$, $P''=P_2$ hat, und daher für P_4 den einfachen Werth $P_1+P_2+P_3$ erhält.

§. 24.

Die vorhergehende Aufgabe wollen wir nun noch dahin abändern, daß die beiden Körper A und B nicht mehr längs einer Ebene aufliegen, sondern von Umdrehungsflächen begrenzt werden, deren geometrische Achsen parallel zu der entsprechenden Ebene bleiben und schon am Anfang der Bewegung parallel zur Durchschnittslinie der festen Ebenen

gerichtet sind; ferner, daß der Faden unmittelbar an den beiden Enden dieser Achsen befestigt ist und die Körper sich ohne Reibung um ihre Achsen drehen können; die Lage der Rolle sei dabei wieder eine solche, daß jedes Fadenstück parallel zu der entsprechenden festen Ebene bleibt.

Unter dieser besondern Voraussetzung wollen wir, um die jetzige Untersuchung der frühern (am Ende des zweiten Buches) anzupassen, für den Körper A die Gerade OA Fig. 5 als Achse der x', und zwar die positive Hälfte von O nach A hinnehmen; für den Körper B sei die OB die negative Hälfte der Achse der x'', und γ_1 und γ_2 seien wieder die Winkel, welche die Achsen der z' und z'' mit der ursprünglichen Achse der z oder mit der Richtung der Schwere bilden. Ferner seien noch

$M_1 k_1^2 = \frac{P_1}{g} k_1^2$, $M_2 k_2^2 = \frac{P_2}{g} k_2^2$ und $M_3 k_3^2 = \frac{P_3}{g} k_3^2$ die Massemomente der Körper A und B und der Rolle C in Bezug auf ihre geometrischen Achsen,

r_1, r_2 die Halbmesser der größten Kreise der beiden Körper, also die, denen die Berührungspunkte angehören,

r_3 der Halbmesser der Rinne in der Rolle, in welcher der Faden liegt,

x_1' und x_2'' die Abscissen der Berührungspunkte D und E,

u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten derselben auf den entsprechenden Ebenen, welche auch die gleitenden Geschwindigkeiten der Schwerpunkte A und B sind,

φ_1, φ_2 und φ_3 die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Körper A und B und der Rolle C um ihre geometrischen Achsen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers positiv genommen,

$w_1 = r_1 \varphi_1$, $w_2 = r_2 \varphi_2$ die wälzenden Geschwindigkeiten der Achsen A und B, endlich

v_1 und v_2 die zu den festen Ebenen parallelen fördernden Geschwindigkeiten dieser Achsen.

Wir haben dann nach §. 219 des zweiten Buches für die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes D die Gleichung:

$$\text{m.)} \quad \frac{P_1}{g} \frac{du_1}{dt} = P_1 (\sin \gamma_1 - f_1 \cos \gamma_1) - J_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{d\varphi_1}{dt},$$

für die des Berührungspunktes E dagegen die Gleichung:

$$\text{m}'.) \quad \frac{P_2}{g} \frac{du_2}{dt} = J_2 - P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Die augenblickliche drehende Bewegung des Körpers A um die zur geometrischen Achse parallele Achse des Berührungspunktes D wird durch die Gleichung:

$$\frac{P_1}{g}(k_1^2+r_1^2)\frac{d\varphi_1}{dt}=P_1 r_1 \sin\gamma_1 - J_1 r_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{du_1}{dt} \quad , \qquad (n.$$

die entsprechende Bewegung des Körpers B durch die Gleichung:

$$\frac{P_2}{g}(k_2^2+r_2^2)\frac{d\varphi_2}{dt}=J_2 r_2 - P_2 r_2 \sin\gamma_2 - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{du_2}{dt} \qquad (n'.$$

ausgedrückt; für die drehende Bewegung der Rolle bleibt die dritte der Gleichungen (h) im vorigen Paragraphen, nämlich:

$$\frac{P_3}{g} k_3^2 \frac{d\varphi_3}{dt} = r_3 (J_1 - J_2) - f_4 S \varrho \ . \qquad (o.$$

Endlich hat man zur Verbindung dieser Gleichungen die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1'}{dt} - \frac{dx_2''}{dt} = v_1 - v_2 = 0 \ , \\ \frac{dx_1'}{dt} = u_1 + w_1 = r_3 \varphi_3 \quad , \quad \frac{dx_2''}{dt} = u_2 + w_2 = \frac{dx_1'}{dt} \ , \\ \frac{du_1}{dt} + \frac{dw_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} + \frac{dw_2}{dt} \ , \end{array}\right\} \ (p.$$

Bei dieser Bewegung können nun vier Fälle stattfinden, entweder sind beide gleitende Geschwindigkeiten u_1 und u_2 Null, oder nur die eine oder die andere, oder es ist keine Null; bevor also die Untersuchung weiter fortgesetzt werden kann, müssen die Bedingungen für die Grenzen dieser vier Fälle festgestellt werden.

So lange weder u_1 noch u_2 Null sind und bis zur Grenze, wo sie Null werden, können sowohl die Gleichungen (m) und (n) als die Gleichungen (m') und (n') verbunden werden; eliminirt man also daraus die Aenderungsgesetze $\frac{du_1}{dt}$ und $\frac{du_2}{dt}$ um die Werthe von $\frac{dw_1}{dt} = r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\frac{dw_2}{dt} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$ zu bestimmen, so ergeben sich die Ausdrücke:

gerichtet sind; ferner, daß der Faden unmittelbar an den beiden Enden dieser Achsen befestigt ist und die Körper sich ohne Reibung um ihre Achsen drehen können; die Lage der Rolle sei dabei wieder eine solche, daß jedes Fadenstück parallel zu der entsprechenden festen Ebene bleibt.

Unter dieser besondern Voraussetzung wollen wir, um die jetzige Untersuchung der frühern (am Ende des zweiten Buches) anzupassen, für den Körper A die Gerade OA Fig. 5 als Achse der x', und zwar die positive Hälfte von O nach A hinnehmen; für den Körper B sei die OB die negative Hälfte der Achse der x'', und γ_1 und γ_2 seien wieder die Winkel, welche die Achsen der z' und z'' mit der ursprünglichen Achse der z oder mit der Richtung der Schwere bilden. Ferner seien noch

$M_1 k_1^2 = \frac{P_1}{g} k_1^2$, $M_2 k_2^2 = \frac{P_2}{g} k_2^2$ und $M_3 k_3^2 = \frac{P_3}{g} k_3^2$ die Massemomente der Körper A und B und der Rolle C in Bezug auf ihre geometrischen Achsen,

r_1, r_2 die Halbmesser der größten Kreise der beiden Körper, also die, denen die Berührungspunkte angehören,

r_3 der Halbmesser der Rinne in der Rolle, in welcher der Faden liegt,

x_1' und x_2'' die Abscissen der Berührungspunkte D und E,

u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten derselben auf den entsprechenden Ebenen, welche auch die gleitenden Geschwindigkeiten der Schwerpunkte A und B sind,

φ_1, φ_2 und φ_3 die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Körper A und B und der Rolle C um ihre geometrischen Achsen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers positiv genommen,

$w_1 = r_1 \varphi_1$, $w_2 = r_2 \varphi_2$ die wälzenden Geschwindigkeiten der Achsen A und B, endlich

v_1 und v_2 die zu den festen Ebenen parallelen fördernden Geschwindigkeiten dieser Achsen.

Wir haben dann nach §. 219 des zweiten Buches für die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes D die Gleichung:

$$\text{m.)} \quad \frac{P_1}{g} \frac{du_1}{dt} = P_1 (\sin \gamma_1 - f_1 \cos \gamma_1) - J_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{d\varphi_1}{dt},$$

für die des Berührungspunktes E dagegen die Gleichung:

$$\text{m}'.) \quad \frac{P_2}{g} \frac{du_2}{dt} = J_2 - P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Die augenblickliche drehende Bewegung des Körpers A um die zur geometrischen Achse parallele Achse des Berührungspunktes D wird durch die Gleichung:

$$\frac{P_1}{g}(k_1^2+r_1^2)\frac{d\varphi_1}{dt}=P_1 r_1 \sin\gamma_1 - J_1 r_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{du_1}{dt} \quad , \quad (n.$$

die entsprechende Bewegung des Körpers B durch die Gleichung:

$$\frac{P_2}{g}(k_2^2+r_2^2)\frac{d\varphi_2}{dt}=J_2 r_2 - P_2 r_2 \sin\gamma_2 - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{du_2}{dt} \quad (n'.$$

ausgedrückt; für die drehende Bewegung der Rolle bleibt die dritte der Gleichungen (h) im vorigen Paragraphen, nämlich:

$$\frac{P_3}{g} k_3^2 \frac{d\varphi_3}{dt} = r_3 (J_1 - J_2) - f_4 S \varrho \ . \quad (o.$$

Endlich hat man zur Verbindung dieser Gleichungen die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dx_1'}{dt} - \frac{dx_2''}{dt} = v_1 - v_2 = 0 \ , \\ \frac{dx_1'}{dt} = u_1 + w_1 = r_3 \varphi_3 \quad , \quad \frac{dx_2''}{dt} = u_2 + w_2 = \frac{dx_1'}{dt} \ , \\ \frac{du_1}{dt} + \frac{dw_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} + \frac{dw_2}{dt} \ , \end{array}\right\} \ (p.$$

Bei dieser Bewegung können nun vier Fälle stattfinden, entweder sind beide gleitende Geschwindigkeiten u_1 und u_2 Null, oder nur die eine oder die andere, oder es ist keine Null; bevor also die Untersuchung weiter fortgesetzt werden kann, müssen die Bedingungen für die Grenzen dieser vier Fälle festgestellt werden.

So lange weder u_1 noch u_2 Null sind und bis zur Grenze, wo sie Null werden, können sowohl die Gleichungen (m) und (n) als die Gleichungen (m') und (n') verbunden werden; eliminirt man also daraus die Aenderungsgesetze $\frac{du_1}{dt}$ und $\frac{du_2}{dt}$ um die Werthe von $\frac{dw_1}{dt} = r_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\frac{dw_2}{dt} = r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$ zu bestimmen, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{P_1}{g}\frac{k_1^2}{r_1^2}\frac{d\,w_1}{d\,t} &= f_1 P_1 \cos\gamma_1\ , \\ \frac{P_2}{g}\frac{k_2^2}{r_2^2}\frac{d\,w_2}{d\,t} &= f_2 P_2 \cos\gamma_2\ , \end{aligned}\right.$$

welche nun in die aus (m) und (m′) folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\text{q.)}\ \left\{\begin{aligned} \frac{d\,u_1}{d\,t} &= 0 = P_1 \sin\gamma_1 - J_1 - \frac{P_1}{g}\frac{d\,w_1}{d\,t} - P_1 f_1 \cos\gamma_1\ , \\ \frac{d\,u_2}{d\,t} &= 0 = J_2 - P_2 \sin\gamma_2 - \frac{P_2}{g}\frac{d\,w_2}{d\,t} - P_2 f_2 \cos\gamma_2\ , \end{aligned}\right.$$

eingeführt, zur Bestimmung und zur Elimination von J_1 und J_2 dienen, und dadurch mittels der Gleichung der Bewegung zu den verlangten Bedingungsgleichungen führen. Man zieht damit aus den Bedingungen (q) die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} J_1 &= P_1\left(\sin\gamma_1 - \frac{k_1^2 + r_1^2}{k_1^2} f_1 \cos\gamma_1\right)\ , \\ J_2 &= P_2\left(\sin\gamma_2 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{k_2^2} f_2 \cos\gamma_2\right)\ , \end{aligned}\right.$$

und erhält durch diese die neuen Bedingungen:

$$\text{r.)}\ \left\{\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - J_1 &\geqq \frac{k_1^2 + r_1^2}{k_1^2} P_1 f_1 \cos\gamma_1\ , \\ J_2 - P_2 \sin\gamma_2 &\geqq \frac{k_2^2 + r_2^2}{k_2^2} P_2 f_2 \cos\gamma_2\ , \end{aligned}\right.$$

von denen die erste die gleitende Bewegung des Punktes D, die zweite die des Punktes E verbürgt; es müssen aber darin, um sie anwenden zu können, noch die Werthe von J_1 und J_2 mittels der Gleichung der Bewegung bestimmt werden.

Unter der gegenwärtigen Voraussetzung und mit Beachtung der Bedingungsgleichungen (p) gehen dazu die Gleichungen (m) und (m′) über in

$$\text{s.)}\ \left\{\begin{aligned} P_1 \frac{d\,v_1}{d\,t} &= g P_1 (\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) - g J_1\ , \\ P_2 \frac{d\,v_1}{d\,t} &= g J_2 - g P_2 (\sin\gamma_2 + f_2 \cos\gamma_2)\ ; \end{aligned}\right.$$

die Gleichung (o) wird

$$P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2} \frac{d v_1}{d t} = g (J_1 - J_2) - f_4 g S \frac{\varrho}{r_3}$$

worin S denselben Ausdruck vorstellt, wie im vorigen Paragraphen, nämlich die Resultirende von J_1, J_2 und P_3. Ersetzen wir daher wieder diese Resultirende wie oben durch die sehr wenig davon verschiedene Resultirende P_4 der Kräfte:

$$P_1 (\sin \gamma_1 - f_1 \cos \gamma_1) = P' \quad , \quad P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) = P'' \text{ und } P_3$$

so finden wir durch Elimination von J_1 und J_2 dieselbe Gleichung wie am Ende des vorhergehenden Paragraphen, nämlich:

$$\left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{d v_1}{d t} = g \left[P' - P'' - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4\right]$$

für das Gesetz der Bewegung des Systems, und insbesondere des Körpers A. Man zieht daraus die constante Beschleunigung:

$$\frac{d v_1}{d t} = g \frac{P' - P'' - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4}{P_1 + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3},$$

und wenn dieselbe in die Gleichungen (s) unter der Form:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin \gamma_1 - J_1 &= \frac{P_1}{g} \frac{d v_1}{d t} + P_1 f_1 \cos \gamma_1 \\ J_2 - P_2 \sin \gamma_2 &= \frac{P_2}{g} \frac{d v_2}{d t} + P_2 f_2 \cos \gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

eingeführt wird und die sich ergebenden Ausdrücke mit den rechten Seiten der Bedingungen (r) verglichen werden, so gehen diese Bedingungen zuerst in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} P' - P'' - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 &\geqq \left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{r_1^2}{k_1^2} f_1 \cos \gamma_1 \\ P' - P'' - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 &\geqq \left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{r_2^2}{k_2^2} f_2 \cos \gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

und werden dann durch weitere Entwickelung

$$\text{t.)}\left\{\begin{array}{l} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(P_1 \frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2} + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1 \cos\gamma_1 \\ \qquad + P_2 f_2 \cos\gamma_2 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 , \\ P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + P_2 \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ \qquad + P_1 f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 . \end{array}\right.$$

Diese Bedingungen werden dazu dienen, die kleinsten Werthe von f_1 und f_2 für gegebene Winkel γ_1 und γ_2, oder umgekehrt für gegebene Reibungscoeffizienten die kleinsten Werthe der Winkel γ_1 und γ_2 zu bestimmen, für welche noch eine gleitende Bewegung der Berührungspunkte D und E stattfinden kann. Man könnte daraus auch nur eine der vorhergehenden Größen und eines der beiden Gewichte P_1 oder P_2, oder die Werthe dieser beiden letztern ableiten, welche der vorgenannten Bedingung genügen, wenn die übrigen Größen als gegeben vorausgesetzt werden; wie aber leicht einzusehen ist, müßten in diesem Falle die Werthe von f_1, γ_1, f_2 und γ_2 wenigstens solche sein, daß jeder der beiden Körper allein noch gleiten könnte, und noch der Bedingung genügen, daß für $P_3 = 0$ und $f_4 = 0$, der Werth von $\frac{P_1}{P_2}$ aus beiden Bedingungen derselbe wäre.

Wenn eine der Bedingungen (t) nicht befriedigt wird, so tritt der zweite oder dritte Fall ein. Ist z. B.

$$\text{u.)}\left\{\begin{array}{l} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 < \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ \qquad + P_1 f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 , \end{array}\right.$$

so wird der Berührungspunkt E nicht mehr gleiten; man hat dann $v_2 = w_2 = v_1$, und die Gleichung (n′) gibt nun

$$P_2 \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} \frac{d v_1}{d t} = g (J_2 - P_2 \sin\gamma_2) .$$

Wird diese Gleichung wie früher mit der ersten der Gleichungen (s) und der Gleichung (o) durch Addition verbunden, so folgt nun der Ausdruck:

$$\left(P_1 + P_2 \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{d v_1}{d t} = g \left(P' - P_2 \sin\gamma_2 - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4\right),$$

worin aber P_4 die Resultirende der Kräfte P', $P_2 \sin\gamma_2$ und P_3 vertritt, als Gleichung der Bewegung des Systems und die Beschleunigung:

$$\frac{d v_1}{d t} = g \frac{P_1 (\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) - P_2 \sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3}.$$

Damit findet man weiter

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - J_1 &= P_1 \left[\frac{P' - P_2 \sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3} + f_1 \cos\gamma_1\right] \\ J_2 - P_2 \sin\gamma_2 &= \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 \frac{P' - P_2 \sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3}. \end{aligned}\right\},$$

und bestimmt durch diese Werthe die Bedingungen für die Grenze der gleitenden Bewegung des Berührungspunktes D. Man hat für diese Grenze wie früher die ursprüngliche Bedingung:

$$P_1 \sin\gamma_1 - J_1 \geqq \frac{k_1^2 + r_1^2}{k_1^2} P_1 f_1 \cos\gamma_1,$$

und diese geht nun mit dem vorhergehenden Werthe von $P_1 \sin\gamma_1 - J_1$ verglichen, in den Ausdruck:

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4$$

über, aus welchem f_1 unabhängig von f_2 bestimmt werden kann; immerhin ist aber diese Bedingung noch mit der Bedingung:

$$J_2 - P_2 \sin\gamma_2 \leqq \frac{k_2^2 + r_2^2}{k_2^2} P_2 f_2 \cos\gamma_2$$

zu verbinden, welche mit dem oben gefundenen Werthe von $J_2 - P_2 \sin\gamma_2$ die Form erhält:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 < \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ + P_1 f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \, , \end{aligned}\right.$$

welche, wie es sein muß, mit der Bedingung (u) gleichlautend ist, obwohl wegen der mangelhaften Genauigkeit der Werthe von $\frac{d v_1}{d t}$ der jetzige Werth von P_4 von dem in jenem Ausdrucke etwas abweicht.

Aus dem Vorhergehenden ist leicht zu schließen, daß die Bedingungen für den Fall, wo der Körper B gleitet, und A nur eine wälzende Bewegung besitzt, durch die Ungleichheiten:

$$\left\{\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 < \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} P_1 + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1 \cos\gamma_1 \\ + P_2 f_2 \cos\gamma_2 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \\ P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(\frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \end{aligned}\right.$$

gegeben sind, worin P_4 entsprechend in die Resultirende der Kräfte $P_1 \sin\gamma_1$, P'' und P_3 umzuändern ist.

In dem Falle endlich, wo beide Körper nur eine rollende Bewegung haben, zieht man aus den Gleichungen (n) und (n′) mit der Beachtung, daß nun $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 = v_1$ wird,

$$\text{v.)} \quad \left\{\begin{aligned} P_1 \frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} \frac{d v_1}{d t} = g\,(P_1 \sin\gamma_1 - J_1) \, , \\ P_2 \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} \frac{d v_1}{d t} = g\,(J_2 - P_2 \sin\gamma_2) \, . \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (o) wird immer wieder

$$P_1 \frac{k_3^2}{r_3^2} \frac{d v_1}{d t} = g\,(J_1 - J_2 - \frac{\varrho}{r^3} f_4 P_4) \, ,$$

wobei zu beachten ist, daß nun P_4 für die Resultirende der Kräfte $P_1 \sin\gamma_1$, $P_2 \sin\gamma_2$ und P_3 steht, und die Summe dieser Gleichungen gibt das Bewegungsgesetz:

$$\left(P_1\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}+P_2\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}+P_3\frac{k_3^2}{r_3^2}\right)\frac{dv_1}{dt}=g\left(P_1 \sin\gamma_1-P_2 \sin\gamma_2-\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4\right)$$

also die constante Beschleunigung:

$$\frac{dv_1}{dt}=g\,\frac{P_1 \sin\gamma_1-P_2 \sin\gamma_2-\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4}{P_1\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}+P_2\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}+P_3\frac{k_3^2}{r_3^2}}.$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (v) ein, um daraus die Werthe von $P_1 \sin\gamma_1 - J_1$ und $J_2 - P_2 \sin\gamma_2$ zu ziehen, und vergleichen wir dann diese Werthe mit den für unsern jetzigen Fall zusammenbestehenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - J_1 &< \frac{k_1^2+r_1^2}{k_1^2}P_1 f_1 \cos\gamma_1 \\ J_2 - P_2 \sin\gamma_2 &< \frac{k_2^2+r_2^2}{k_2^2}P_2 f_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\},$$

so nehmen diese die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} P_1\sin\gamma_1-P_2\sin\gamma_2 &< \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}P_1+\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}P_2+\frac{k_3^2}{r_3^2}P_3\right)f_1\cos\gamma_1 \\ &\quad+\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4 \\ P_1\sin\gamma_1-P_2\sin\gamma_2 &< \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}P_1+\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}P_2+\frac{k_3^2}{r_3^2}P_3\right)f_2\cos\gamma_2 \\ &\quad+\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4 \end{aligned}\right\}(w.$$

und geben die entsprechenden Grenzwerthe von f_1 und f_2 unabhängig von einander, diejenigen von zwei der übrigen Größen aber wieder durch ihre gegenseitige Verbindung. Es ist jedoch dabei zu beachten, daß zufolge unserer Annahme in Betreff der Richtung der Bewegung immer $P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2$ größer als Null sein muß.

Um von den vorhergehenden Ergebnissen eine einfache Anwendung zu machen, wollen wir annehmen, die beiden Körper A und B seien homogene Cylinder, so daß $\frac{r_1^2}{k_1^2} = \frac{r_2^2}{k_2^2} = 2$ ist; für die Rolle sei $\frac{r_3^2}{k_3^2}$ ebenfalls gleich 2 und der Coeffizient $\frac{\varrho}{r_3} f_4$ so klein, daß das damit behaftete Glied für eine erste Annäherung vernachlässigt werden kann; es sollen dann unter diesen Voraussetzungen die Werthe von f_1 und f_2, welche den verschiedenen Fällen Genüge leisten, und damit die den Grenzwerthen entsprechenden Beschleunigungen der Bewegung bestimmt werden.

Die Bedingungen (t) werden für die oben gemachten Annahmen zuerst

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq (3P_1 + 2P_2 + P_3) f_1 \cos\gamma_1 + P_2 f_2 \cos\gamma_2$$

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq (2P_1 + 3P_2 + P_3) f_2 \cos\gamma_2 + P_1 f_1 \cos\gamma_1$$

und geben dann für f_1 und f_2 die Werthe:

$$f_1 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{(3P_1 + 3P_2 + P_3)\cos\gamma_1}, \quad f_2 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{(3P_1 + 3P_2 + P_3)\cos\gamma_2}.$$

Die Grenzwerthe von f_1 und f_2 dürfen demnach im umgekehrten Verhältnisse der Functionen $\cos\gamma_1$ und $\cos\gamma_2$ stehen; für $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$ darf f_1, für $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi$ ebenso f_2 jeden beliebigen Werth erhalten, wie dieß von selbst einleuchtet; für $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi - \gamma_1$ hat man insbesondere

$$f_1 \leqq \frac{P_1 \tang\gamma_1 - P_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}, \quad f_2 \leqq f_1 \cot\gamma_1.$$

Wird $P_2 = P_1$ genommen und P_3 so klein, daß es gegen $6P_1$ vernachlässigt werden kann, so hat man

$$f_1 \leqq \tfrac{1}{6}(\tang\gamma_1 - 1).$$

Endlich ergibt sich für den Fall $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, die früher (Buch II., §. 218) gefundene Bedingung wieder:

$$f_1 \leqq \tfrac{1}{3}\tang\gamma_1.$$

Führen wir nun die Grenzwerthe von f_1 und f_2 in den entsprechenden Werth von $\frac{dv_1}{dt}$ ein, so findet man für beliebige Werthe von γ_1 und γ_2 den Ausdruck:

$$\frac{d\,v_1}{dt} = 2g\,\frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}\,,$$

welcher zeigt, daß es für den vorausgesetzten Sinn der Bewegung, wonach der Körper A der niedersinkende sein soll, genügt, wenn $P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 > 0$ ist. Für $P_2 = P_1$, $P_3 = 0$ und $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi - \gamma_1$ ist demnach $\frac{1}{4}\pi$ der kleinste Werth, welchen γ_1 erhalten darf, und dann müßte f_1 Null sein; nimmt man $\gamma_1 = \frac{1}{3}\pi$, $tang\,\gamma_1 = \sqrt{3} = 1{,}732$, so würden die größten Werthe für f_1 und f_2

$$f_1 = 0{,}122 \quad , \quad f_2 = 0{,}07\,.$$

Für den zweiten Fall, wenn der Körper B nur rollen nicht gleiten soll, werden unsere Bedingungen

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq (3P_1 + 3P_2 + P_3)\, f_1 \cos\gamma_1\,,$$

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 < (2P_1 + 3P_2 + P_3)\, f_2 \cos\gamma_2 + P_1 f_1 \cos\gamma_1\,;$$

und geben dieselben Grenzwerthe wie vorher, so daß man haben muß

$$f_1 \cos\gamma_1 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}\,,$$

$$f_1 \cos\gamma_2 > \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}\,;$$

für die diesen Grenzwerthen entsprechende Beschleunigung der Bewegung hat man aber den Ausdruck:

$$\frac{d\,v_1}{dt} = 2g\left(\frac{P_1 \sin\gamma_1}{3P_1 + 3P_2 + P_3} - \frac{P_2 \sin\gamma_2}{2P_1 + 3P_2 + P_3}\right);$$

es genügt daher jetzt nicht mehr, daß $P_1 \sin\gamma_1$ etwas größer, als $P_2 \sin\gamma_2$ wird; es muß nun

$$P_1 \sin\gamma_1 > P_2 \sin\gamma_2\,\frac{3P_1 + 3P_2 + P_3}{2P_1 + 3P_2 + P_3}$$

werden, wenn der Körper A sich abwärts bewegen soll.

Soll endlich der letzte Fall stattfinden, beiden Körpern also nur eine rollende Bewegung ertheilt werden, so muß zufolge der Bedingungen (w) sowohl $f_1 \cos\gamma_1$ als $f_2 \cos\gamma_2$ größer werden als $\frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}$;

die Beschleunigung wird unabhängig von der Reibung und zwar hat man für alle dieser Bedingung entsprechenden Werthe von f_1 und f_2 wieder den Ausdruck:

$$\frac{dv_1}{dt} = 2g \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3} ,$$

welcher in dem ersten Falle blos für die Grenzwerthe von f_1 und f_2 gültig ist.

Zuletzt wollen wir noch die bei der eben betrachteten Bewegung in Bezug auf die Winkel γ_1 und γ_2 stattfindenden Verhältnisse für die einfache Annahme untersuchen, daß $P_1 = P_2$, $f_1 = f_2$ und $P_3 = 0$ sei. Wir haben unter diesen Voraussetzungen für unsern ersten Fall die Bedingungen:

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 \geqq 6f \cos\gamma_1 ,$$

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 \geqq 6f \cos\gamma_2 ,$$

von denen die letzte allein genügt, weil $\cos\gamma_2$ immer größer sein muß, als $\cos\gamma_1$, weil also die erste Bedingung immer erfüllt wird, wenn der zweiten Genüge geleistet ist. Der größte Werth, den $\sin\gamma_1$ erhalten kann, ist 1; der größte Werth von γ_2 wird also durch die Bedingung:

$$\sin\gamma_2 + 6f \cos\gamma_2 \leqq 1$$

gegeben, aus welcher man zieht

$$\tan\gamma_2 \leqq \frac{1 - 36f^2}{12f} .$$

Der kleinste Werth von γ_2 ist indessen nicht gerade Null; es kann γ_2 auch negativ werden, die Ebene QN also von Q an gegen N hin steigen, und der kleinste Werth ist dann offenbar unter den jetzigen Voraussetzungen $\gamma_2 = -\gamma_1$, weil für einen größern negativen Werth der Körper B nicht nur ohne den Körper A fallen würde, sondern selbst schneller als dieser. Für den Fall $\gamma_2 = -\gamma_1$ wird unsere Bedingung

$$2\sin\gamma_1 \geqq 6f \cos\gamma_1 \quad , \quad \tan\gamma_1 \geqq 3f ,$$

wie es sein muß, weil nun beide Cylinder sich unabhängig auf gleiche Weise bewegen, wenn nicht der eine von ihnen eine andere anfängliche Geschwindigkeit erhalten hat, als der andere.

Die vorletzte Bedingungsgleichung gibt für $f = \frac{1}{6}$ als größten Werth $\gamma_2 = 0$, womit dann als entsprechender kleinster Werth $\sin\gamma_1 = 1$ folgt,

während der kleinste Werth von γ_1 überhaupt $\gamma_1 = arc\,tang\,\frac{1}{2} = 26^0 34'$ ist, nämlich dann, wann $\gamma_2 = -\gamma_1$ gemacht wird. Soll daher γ_2 einen von Null verschiedenen positiven Werth erhalten, so muß f kleiner als $\frac{1}{4}$ werden. Für $f = \frac{1}{6}$ z. B. hat man schon $tang\,\gamma_2 = \frac{3}{4}$ und $\gamma_2 = 36^0 52'$ als größten Werth von γ_2 und als entsprechender kleinster Werth von γ_1 folgt natürlich wieder $\gamma_1 = \frac{1}{4}\pi$; nimmt man dagegen $\gamma_2 = 30^0$, so darf γ_1 nur $68^0 55'$ betragen, um unserer Bedingung zu genügen.

Sollen beide Körper rollen, so genügt offenbar die erste der beiden Bedingungen

$$sin\,\gamma_1 - sin\,\gamma_2 < 6\,f\,cos\,\gamma_1 \quad , \quad sin\,\gamma_1 - sin\,\gamma_2 < 6\,f\,cos\,\gamma_2$$

und gibt den größten Werth, welchen γ_1 für ein gegebenes γ_2 erhalten darf; man erhält daraus

$$sin\,\gamma_1 < \frac{sin\,\gamma_2 + 6\,f\sqrt{cos^2\,\gamma_2 + 36\,f^2}}{1 + 36\,f^2}$$

und da man immer auch $sin\,\gamma_1 > sin\,\gamma_2$ haben muß, so sind damit die Grenzen gegeben, zwischen welchen γ_1 liegen kann. Für $f = \frac{1}{6}$ hat man insbesondere

$$sin\,\gamma_1 < \frac{1}{2}\left(sin\,\gamma_2 + \sqrt{1 + cos^2\,\gamma_2}\right)$$

also für $\gamma_2 = 0$

$$sin\,\gamma_1 < \frac{1}{2}\sqrt{2} \;,\quad \gamma_1 < \frac{1}{4}\pi\;;$$

für $\gamma_2 = \frac{1}{6}\pi$ dagegen hat man

$$sin\,\gamma_1 < \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{7}\right) \;,\quad \gamma_1 < 65^0 42' \;,$$

und den größten Werth für γ_1 wird man erhalten, wenn man $\frac{d.sin\,\gamma_1}{d\gamma_2} = 0$ setzt, also wenn $\gamma_2 = \frac{1}{4}\pi$ wird.

Für den Fall endlich, daß der Körper B nur rollen, A aber gleiten und rollen soll, haben wir die Bedingungen:

$$sin\,\gamma_1 - sin\,\gamma_2 > 6\,f\,cos\,\gamma_1 \quad , \quad sin\,\gamma_1 - sin\,\gamma_2 < 6\,f\,cos\,\gamma_2$$

zu berücksichtigen. Die erste gibt nun

$$sin\,\gamma_1 > \frac{sin\,\gamma_2 + 6\,f\sqrt{cos^2\,\gamma_2 + 36\,f^2}}{1 + 36\,f^2} \,,$$

und mit diesem Werthe wird die zweite

$$\cos\gamma_2(1+36\,f^2) > \sqrt{\cos^2\gamma_2+36\,f^2}-6\,f\sin\gamma_2$$

oder nach den erforderlichen Reductionen

$$\tang\gamma_2 < -3\,f\ .$$

Es darf also γ_2 so klein werden, wie im ersten Falle, und wie dort noch den negativen Werth: $arc\,tang\,3\,f$ erhalten; für γ_1 ergibt sich dann, wenn dieser Werth in die erste oder zweite der obigen Bedingungen unter der Form:

$$\sin\gamma_1 > \frac{tang\,\gamma_2+6\,f\sqrt{1+36\,f^2(1+tang^2\gamma_2)}}{(1+36\,f^2)\sqrt{1+tang^2\gamma_2}}$$

und

$$\sin\gamma_1 < \frac{1}{\sqrt{1+tang^2\gamma_2}}(tang\,\gamma_2+6\,f)$$

eingeführt wird, der Ausdruck:

$$\sin\gamma_1 \gtrless \frac{3\,f}{\sqrt{1+9\,f^2}}\quad,\quad \text{also } tang\,\gamma_1=3\,f\ ,$$

wie dieß auch nach dem Vorhergehenden von selbst einleuchten wird. Für $\gamma_2=0$ dagegen hat man die beiden Grenzwerthe:

$$\sin\gamma_1 > \frac{6\,f}{\sqrt{1+36\,f^2}}\quad \text{und} \quad < 6\,f\ ,$$

und insbesondere für $f=\frac{1}{6}$

$$\sin\gamma_1 > \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\quad \text{und}\quad <1\quad,\quad \gamma_1 > \tfrac{1}{4}\pi\quad ,\quad < \tfrac{1}{2}\pi\ .$$

Der Winkel γ_2 selbst ist nur durch die Bedingung beschränkt.

$$\sin\gamma_2 < \sin\gamma_1 - 6\,f\cos\gamma_1\quad \text{oder}\quad <1\ ,$$

und kann daher bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen. Für $\gamma_2=\frac{1}{2}\pi$ und $f=\frac{1}{6}$ z. B. hat man

$$\sin\gamma_1 > \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4} \text{ oder } > 0{,}992 \quad , \quad \sin\gamma_1 < \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

also liegt γ_1 zwischen 82° 45′ und 90°.

Aehnliche Schlüsse wie die bisherigen, lassen sich auch aus unsern allgemeinen Bedingungen ziehen; das Vorhergehende genügt indessen unserm Zwecke, dem Leser die hier stattfindenden Verhältnisse soweit klar zu machen, daß er die Untersuchung selbst weiter verfolgen kann.

§. 25.

In den vorhergehenden Aufgaben wurde der die Körper A und B verbindende Faden als gewichtslos vorausgesetzt, oder von so geringem Gewichte, daß dasselbe auf die Bewegung keinen bemerkbaren Einfluß hat; betrachten wir daher noch die Bewegung eines schweren, vollkommen biegsamen Fadens allein, wenn derselbe auf zwei geneigten Ebenen aufliegt und über eine Rolle geht, welche diese Ebenen in ihrer Verlängerung berührt, unter der Voraussetzung, daß der Faden auf der Rolle nicht gleitet und die Reibung auf den Ebenen berücksichtigt, die am Zapfen der Rolle dagegen vernachlässigt wird; in Betreff der Lage der Ebene und des Fadens und der Richtung der Rollenachse aber unter denselben Voraussetzungen wie vorher.

Sei wieder der Durchschnittspunkt O der Geraden MO und NO, Fig. 6, nach welchen die den Faden enthaltende vertikale Ebene der xz die festen Ebenen schneidet, der Anfang der Coordinaten, die Neigungen dieser Ebenen seien wie vorher durch die Winkel γ_1 und γ_2 bestimmt; $x_1\, z_1$ seien die Coordinaten des abwärts sich bewegenden Endpunktes A, $x_2\, z_2$ die des Punktes B, u_1 und u_2 die Abstände OA und OB dieser Punkte von O, v_1 und v_2 ihre Geschwindigkeiten in demselben Sinne genommen, so daß man hat $\frac{du_1}{dt} = v_1 = v_2 = -\frac{du_2}{dt}$; l sei die Länge des ganzen Fadens, p das Gewicht der Längeneinheit oder das constante geometrische Gewicht in einem beliebigen Punkte und f der für beide Ebenen geltende Reibungscoefficient, r der Halbmesser der Rolle und $\frac{P}{g}k^2$ das Massemoment derselben in Bezug auf ihre Achse, endlich a der Abstand der Berührungspunkte D und E von O, also $a = r \tang \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$.

Theilen wir nun den Faden in drei Theile und betrachten jeden dieser Theile, nämlich das auf der Ebene DM aufliegende Stück AD,

das auf der Ebene EN aufliegende Stück EB und das über der Rolle liegende DE für sich allein, indem wir wieder die noch unbekannten Spannungen J_1 und J_2 in den Punkten D und E einführen, so werden die Componenten X und Z der bewegenden Kraft für AD

$$X = 0 \quad , \quad Z = -p\int_a^{u_1} ds \,.\, s = -p(u_1 - a) \,,$$

für EB

$$X = 0 \quad , \qquad Z = -p(u_2 - a) \,.$$

Ferner leuchtet ein, daß der für jedes der beiden ersten Stücke der geometrische Druck auf die entsprechende Ebene constant ist; bezeichnen wir denselben daher für den ersten Theil AD mit n_1, für den zweiten BE mit n_2, so geben die erste und letzte der Gleichungen (36) für AD die Werthe:

$$\begin{cases} \Sigma . N \cos\lambda = n_1 \int_a^{u_1} ds \,.\, \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \gamma_1) = n_1(u_1 - a)\sin\gamma_1 \,, \\ \Sigma . N \cos\nu = n_1 \int_a^{u_1} ds \,.\, \sin(\tfrac{1}{2}\pi - \gamma_1) = n_1(u_1 - a)\cos\gamma_1 \,, \end{cases}$$

und für BE die Werthe:

$$\Sigma . N \cos\lambda = n_2(u_2 - a)\cos(\tfrac{1}{2}\pi + \gamma_2) = -n_2(u_2 - a)\sin\gamma_2 \,,$$
$$\Sigma . N \cos\nu = n_2(u_2 - a)\cos\gamma_2 \,.$$

Ebenso erhält man zufolge der Gleichungen (40) für die Componenten der Reibung an dem Stücke AD die Werthe:

$$\begin{cases} \Sigma . fN \cos l = fn_1 \int_a^{u_1} ds \,.\, \cos(\pi - \gamma_1) = -fn_1(u_1 - a)\cos\gamma_1 \,, \\ \Sigma . fN \cos n = fn_1 \int_a^{u_1} ds . (u_1 - a)\sin(\pi - \gamma_1) = fn_1(u_1 - a)\sin\gamma_1 \,; \end{cases}$$

für die Reibung an BE dagegen wird

$$\Sigma . fN \cos l = fn_2(u_2 - a)\cos(\pi + \gamma_2) = -fn_2(u_2 - a)\cos\gamma_2 \,,$$
$$\Sigma . fN \cos n = fn_2(u_2 - a)\sin(\pi + \gamma_2) = -fn_2(u_2 - a)\sin\gamma_2 \,.$$

Damit ergeben sich für die fortschreitende Bewegung dieser beiden Theile, und zwar für AD die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g} \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= n_1(u_1-a)(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1) - J_1 \cos\gamma_1 \\ \frac{p(u_1-a)}{g} \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= J_1 \sin\gamma_1 + n_1(u_1-a)(\cos\gamma_1 + f\sin\gamma_1) - p(u_1-a) \end{aligned}\right\}$$

und für BD ebenso die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_2-a)}{g} \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= J_2 \cos\gamma_2 - n_2(u_2-a)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) \\ \frac{p(u_2-a)}{g} \frac{d^2 z_2}{dt^2} &= J_1 \sin\gamma_1 + n_2(u_2-a)(\cos\gamma_2 - f\sin\gamma_2) - p(u_2-a) \end{aligned}\right\}$$

und diese führen mit den Bedingungsgleichungen:

$$z_1 \cos\gamma_1 + x_1 \sin\gamma_1 = 0 \quad , \quad x_1 \cos\gamma_1 - z_1 \sin\gamma_1 = u_1 \, ,$$
$$z_2 \cos\gamma_2 - x_2 \sin\gamma_2 = 0 \quad , \quad x_2 \cos\gamma_2 + z_2 \sin\gamma_2 = -u_2 \, ,$$

durch eine ähnliche Behandlung wie die der Gleichungen (a) und (a′) in §. 23 zu folgenden Ausdrücken:

$$n_1 = p\cos\gamma_1 \quad , \quad n_2 = p\cos\gamma_2$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g} \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= p(u_1-a)\sin\gamma_1 - f n_1(u_1-a) - J_1 \\ \frac{p(u_2-a)}{g} \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= p(u_2-a)\sin\gamma_2 + f n_2(u_2-a) - J_2 \end{aligned}\right\} ,$$

oder nach erfolgter Elimination von n_1 und n_2

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g} \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= p(u_1-a)(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1) - J_1 \\ -\frac{p(u_2-a)}{g} \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= -p(u_2-a)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) + J_2 \end{aligned}\right\} . \text{(a.}$$

Das über der Rolle liegende Fadenstück DE hat immer dieselbe Länge $r(\gamma_1 + \gamma_2)$, also auch ein constantes Gewicht $pr(\gamma_1 + \gamma_2)$,

und da es an der Drehung der Rolle Theil nimmt, so ist einmal sein Massemoment: $\frac{p}{g} r^3 (\gamma_1 + \gamma_2)$ dem der Rolle beizufügen. Dieses Fadenstück übt aber durch sein Gewicht auch eine drehende Wirkung aus, welche offenbar durch $p b r' \sin \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)$ gemessen wird, wenn r' die Entfernung seines Schwerpunktes von der Achse der Rolle und b die Länge $r(\gamma_1 + \gamma_2)$ bezeichnet, und man beachtet, daß der zu diesem Schwerpunkte gezogene Halbmesser den Winkel $\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_2)$ mit der Achse der z bildet. Man hat dann weiter (II. Buch, §. 27):

$$b r' = 2 r^2 \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) ,$$

also wird

$$p b r' \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = 2 p r^2 \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) ,$$

wofür wir der Uebereinstimmung mit den vorhergehenden Ausdrücken wegen $p r^2 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)$ setzen wollen. Für die drehende Bewegung der Rolle hat man demnach ohne Berücksichtigung der Zapfenreibung die Gleichung:

$$\text{b.)} \quad \frac{P k^2 + p r^3 (\gamma_1 + \gamma_2)}{g} \frac{d \varphi}{d t} = (J_1 - J_2) r + p r^2 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) .$$

Wir haben aber auch noch die weiteren Bedingungen: $u_1 + u_2 + r(\gamma_1 + \gamma_2) - 2a = l$, $r\varphi = v_1$, und diese führen, mit der Summe der Gleichungen (a) und (b) verbunden, zu der Schlußgleichung:

$$\text{c.)} \left\{ \begin{aligned} & \left(p l + P \frac{k^2}{r^2}\right) \frac{d^2 u_1}{d t^2} = p g (u_1 - a) \big(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) \big) \\ & \quad + p g r (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) - p g (l - b) (\sin \gamma_2 + f \cos \gamma_2) , \end{aligned} \right.$$

worin zur Abkürzung b statt $r(\gamma_1 + \gamma_2)$ gesetzt ist, und welche zur weitern Behandlung unter die Form:

$$\frac{d^2 w}{d t^2} = \beta^2 w$$

gebracht werden kann, wenn man β^2 für

$$\frac{p g r^2}{g l r^2 + P k^2} \big(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) \big)$$

und dann noch w für

$$u_1 - a - \frac{(l - b)(\sin \gamma_2 + f \cos \gamma_2) - r (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)}{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)}$$

einführt. Das unbestimmte Integral dieser Gleichung hat daher (I. B. §. 83) die Form:

$$\Delta w = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$$

worin A und B nach den anfänglichen Zuständen des Systems zu bestimmen sind; man hat dazu mit dem Werthe von w die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= a + \frac{(l-b)(\sin\gamma_2+f\cos\gamma_2)-r(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2+f(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)} + Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \\ \frac{du_1}{dt} &= v_1 = A\beta e^{\beta t} - B\beta e^{-\beta t} \end{aligned}\right\}, \text{(d.}$$

also für $t = 0$, und wenn $u_1^{(0)}$ und $v_1^{(0)}$ die anfänglichen Werthe von u_1 und v_1 sind,

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(0)} &= A + B + a + \frac{(l-b)(\sin\gamma_2+f\cos\gamma_2)-r(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2+f(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)} \\ v_1^{(0)} &= \beta(A-B) \end{aligned}\right\}; \text{(e.}$$

Aus diesen Gleichungen schließen wir zuerst, daß wenn v_1 fortwährend Null, der Faden also ohne anfängliche Geschwindigkeit im Gleichgewichte bleiben soll, A und B Null werden müssen; die zweite der Bedingungen (e) gibt dann $A = B$, und damit zieht man aus der ersten

$$A = \frac{1}{2}\left[u_1^{(0)} - a - \frac{(l-b)(\sin\gamma_2+f\cos\gamma_2)-r(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2+f(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}\right];$$

die Bedingung $A = B = 0$ wird also erfüllt, wenn man hat:

$$u_1^{(0)} = a + \frac{(l-b)(\sin\gamma_2+f\cos\gamma_2)-r(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1+\sin\gamma_2+f(\cos\gamma_2-\cos\gamma_1)}.$$

Nehmen wir z. B. den einfachen Fall, wo $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma_2 = 0$ ist, wo demnach das eine Fadenstück AD lothrecht herabhängt, das andere BE auf einer horizontalen Ebene liegt, so wird ohne anfängliche Geschwindigkeit so lange Gleichgewicht stattfinden, als das anfänglich herabhängende Stück nicht länger ist als $(r + l - \frac{1}{2}\pi r)\frac{f}{1+f}$, da für diesen Fall $a = r\,tang\,\frac{1}{2}\pi = r$, $b = \frac{1}{2}\pi r$ wird. Ist $u_1^{(0)}$ größer als

dieser Werth, z. B. $u_1^{(0)} = \frac{f}{1+f}\left[l + \frac{1}{2} r(4-\pi)\right]$ so tritt auch ohne anfängliche Geschwindigkeit Bewegung ein, und man hat

$$\beta^2 = (1+f)\frac{pgr^2}{plr^2+Pk^2} \quad , \quad A = B = \frac{fr}{2(1+f)};$$

die Gleichungen der Bewegung werden demnach

$$u_1 = \frac{fr}{2(1+f)}\left(e^{\beta_1 t} + e^{-\beta_1 t}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{fr\beta_1}{2(1+f)}\left(e^{\beta_1 t} - e^{-\beta_1 t}\right),$$

worin β_1 den vorstehenden besondern Werth von β bedeutet.

Wenn $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ ist, so wird die Gleichung (c) einfacher

$$\left(pl + P\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2u_1}{dt^2} = 2pg(u_1 - a) - pg(l-b)(\sin\gamma + f\cos\gamma);$$

man hat $a = r\,tang\,\gamma$, $b = 2\gamma r$, $\beta^2 = \frac{2pgr^2\sin\gamma}{plr^2+Pk^2}$, und der der Gleichgewichtslage entsprechende Werth von $u_1^{(0)}$ ist

$$u_1^{(0)} = r\,tang\,\gamma + \tfrac{1}{2}(l - 2\gamma r)(1 + f\cot\gamma).$$

Setzt man in diesem Falle $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, so wird der letztere Werth unendlich, weil nun der Anfangspunkt O in's Unendliche rückt; man kann dann aber diesen Anfangspunkt in die Achse der Rolle verlegen, und $u_1 - a = u'$ setzen; man findet dann den Werth:

$$u'^{(0)} = \tfrac{1}{2}(l - \pi r),$$

dessen Richtigkeit von selbst einleuchten wird.

Nehmen wir noch $\gamma_2 = -\gamma_1$, und lassen demnach die Ebene NO in die Verlängerung von MO fallen, so geht die Gleichung (c), wie dies sein muß, in

$$\left(pl + P\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2u_1}{dt^2} = pgl(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1),$$

über, da sowohl der Factor von $u_1 - a$ und pgr als b Null wird; der Coeffizient von $\frac{d_2 u_1}{dt^2}$ behält aber noch das Glied $P\frac{k^2}{r^2}$, weil nach unserer Voraussetzung der Faden immer noch die Rolle berührt und diese mitbewegt.

Die Folgerungen, welche sich aus unsern Gleichungen für den Fall ergeben, wo keine Reibung des Fadens auf den Ebenen berücksichtigt, f also Null wird, mögen dem Leser überlassen bleiben, und es soll nur bemerkt werden, daß man aus dem obigen Werthe von u_1 in Function von t für die besondere Annahme $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$ nicht schließen darf, daß für die genannte Voraussetzung u_1 immer Null sei, weil in diesem Falle $u_1^{(0)}$ größer als Null genommen werden muß, wenn ohne anfängliche Geschwindigkeit Bewegung eintreten soll, und man daher nicht

$$u_1^{(0)} = \frac{f}{1+f}\left[1 + \frac{1}{2} r (4 - \pi)\right]$$

nehmen darf, was für $f = 0$ wieder auf Null zurückkommt.

§. 26.

Wir haben oben bei der Betrachtung des äußern Gleichgewichtes (§. 9) auf die fortschaffenden Maschinen hingewiesen und wollen daher nun die Bewegung eines ähnlichen Systems untersuchen, soweit dieß angeht, ohne das Gebiet der technischen Mechanik zu betreten; die betreffende Aufgabe werde demnach in folgende Weise gefaßt.

Zwei parallelepipedische Körper, von denen jeder auf zwei Paar je zwei gleicher cylindrischer Räder ruht, sind unter sich durch einen Faden verbunden, und stützen sich mittels jener Räder auf eine geneigte Ebene; in dem ersten derselben ist eine constante Kraft vorhanden, welche drehend auf ein Räderpaar wirkt; es soll die Bewegung dieses Systems mit Berücksichtigung der Reibung und unter der Voraussetzung untersucht werden, daß je zwei Räder die Achse gemeinschaftlich haben und alle Achsen parallel und immer horizontal gerichtet sind, daß der die beiden Körper verbindende Faden parallel zu der geneigten Ebene ist und mit den Schwerpunkten der beiden Körper in einer Vertikalebene liegt, welche zu den Räder-Achsen senkrecht ist und den Abstand zwischen je zwei Rädern halbirt.

Nach diesen Voraussetzungen wird es für unsere Betrachtung genügen, wenn wir die beiden Körper durch ihre Durchschnitte mit der zuletzt genannten Vertikalebene, der Ebene der Figur 7, und jedes Räder-Paar durch ein einziges in dieser Ebene liegendes ersetzen, dessen Gewicht dem Gewichte beider gleich ist. Jene Ebene nehmen wir als Ebene der xz, den Durchschnitt OM derselben mit der geneigten Ebene als Achse der x und irgend einen Punkt O in ihr als Anfang der Coordinaten, und von da sollen die positiven x aufwärts gerichtet sein, wenn

das System sich aufwärts bewegt und die drehende Bewegung der Räder im positiven Sinne vor sich geht. Seien dann

γ der Neigungswinkel der Ebene OM gegen den Horizont,
Q_1, Q_2 die Gewichte der Körper A und B,
P_1, R_1 und $\frac{P_1}{g} k_1^2$ das Gewicht, der Halbmesser und das in Bezug auf die Achse genommene Massemoment des Räderpaares a, welches durch die innere Kraft J umgedreht wird,
P_2 und $\frac{P_2}{g} k_2^2$ das Gewicht und Massemoment eines der Räder-Paare b, c und d,
R_2 der Halbmesser eines dieser Räder,
r der Halbmesser des Kreises, an welchem die innere Kraft J tangential und parallel zu OM angreifen soll,
ϱ_1 der Halbmesser der Achsen der Räder a,
ϱ_2 derjenige der Achsen der übrigen Räder,
f_1 und f_2 die Reibungscoeffizienten für die geneigte Ebene und die Achsen der Räder,
T die Spannung des Fadens, welcher die Körper A und B verbindet,
N_1 der Druck der Räder a auf die feste Ebene,
N', N'' und N''' der resultirende Druck auf die Achsen der Räder-Paare a, b und c und d, indem wir denselben für die beiden letztern als gleich voraussetzen, endlich
ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte, als Widerstände der mit den Rädern fest verbundenen Achsen betrachtet, mit der Achse der positiven x bilden.

Untersuchen wir nun zuerst die Bewegung des Triebrades a und zwar in Bezug auf den Berührungspunkt D, so haben wir an demselben außer seinem Gewichte folgende Kräfte in Betracht zu ziehen: 1) die Triebkraft J, von welcher wir vorerst annehmen wollen, daß sie oberhalb der Achse a angreift, wie schon bemerkt, fortwährend parallel zu OM, und daher im Sinne der positiven x gerichtet ist; 2) der senkrecht zur Ebene OM im Sinne der positiven z gerichtete Widerstand N_1, welchen diese Ebene dem Druck des Rades a entgegenzusetzen hat; 3) die im Sinne der positiven x gerichtete Reibung $f_1 N_1$ am Berührungspunkte D; 4) der Druck N', welchen die Achse des Rades durch ihr Lager erleidet und welcher hier als Druck auf die Achse genommen werden muß, also den Winkel $\pi - \psi_1$ mit der positiven x Achse bildet;

endlich 5) die Zapfenreibung $f_2 N'$, für welche man zu beachten hat, daß sie am Rad angreift und mit der positiven Achse der x den Winkel $\psi_1 + \frac{1}{2}\pi$ einschließt. Die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes D werden daher, wenn u_1 die im Sinne der positiven x positive gleitende Geschwindigkeit dieses Punktes, und φ_1 die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung des Rades bezeichnet (II. Buch, §. 219),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{g}\frac{du_1}{dt} = J + f_1 N_1 - N' \cos\psi_1 - f_2 N' \sin\psi_1 - P_1 \sin\gamma - \frac{P_1}{g} R_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \\ 0 = N_1 - N' \sin\psi_1 + f_2 N' \cos\psi_1 - P_1 \cos\gamma \end{array}\right\} ; (a.$$

für die drehende Bewegung um den Berührungspunkt haben wir dann die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{g}(k_1^2 + R_1^2)\frac{d\varphi_1}{dt} = J(R_1 + r) - N' R_1 \cos\psi_1 \\ -\frac{P_1}{g} R_1 \frac{du_1}{dt} - P_1 R_1 \sin\gamma - f_2 N'(R_1 \sin\psi_1 + \varrho_1) \end{array}\right\} ; (b.$$

und diese mit der ersten der Gleichungen (a) verbunden, gibt durch Elimination von $\frac{du_1}{dt}$ den Werth von $\frac{d\varphi_1}{dt}$, welcher für eine stattfindende gleitende Bewegung des Berührungspunktes D, und daher auch noch für die Grenze, wo diese gleitende Bewegung aufhört, gültig ist, welcher sich aber auch unmittelbar und selbst einfacher dadurch ableiten läßt, daß man die drehende Bewegung des Rades in Bezug auf seine geometrische Achse ausdrückt; man findet auf beiden Wegen

$$\frac{P_1}{g} k_1^2 \frac{d\varphi}{dt} = Jr - f_1 N_1 R_1 - f_2 N' \varrho_1 ,$$

und zieht damit aus der Gleichung (a) die Bedingung:

$$f_1 N_1 \frac{k_1^2 + R_1^2}{k_1^2} > N' \cos\psi_1 + P_1 \sin\gamma - J\left(1 - \frac{R_1 r}{k_1^2}\right) + f_2 N'\left(\sin\psi_1 - \frac{R_1 \varrho_1}{k_1^2}\right)$$

oder wenn der Werth von N_1 aus der zweiten Gleichung (a) eingeführt wird,

$$\text{c.)}\left\{\begin{aligned} & f_1 N'(\sin\psi_1 - f_2 \cos\psi_1)\frac{k_1^2+R_1^2}{k_1^2} > N'\left[\cos\psi_1 + f_2\left(\sin\psi_1 - \frac{R_1\varrho_1}{k_1^2}\right)\right] \\ & \qquad - J\left(1-\frac{R_1 r}{k_1^2}\right) + P_1\left(\sin\gamma - f_1\frac{k_1^2+R_1^2}{k_1^2}\cos\gamma\right), \end{aligned}\right.$$

welche verbürgt, daß der Berührungspunkt D keine rückwärts gleitende Bewegung erhält, oder daß das Triebrad nicht auf der Ebene OM ausgleitet.

Bezeichnen wir dann die dem ganzen System gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Achse des Triebrades mit v, so haben wir für dieselbe, je nachdem das Triebrad blos wälzt oder beim Drehen auf der Ebene ausgleitet, entweder die Beziehungen: $v = R_1\varphi_1$ und $u_1 = 0$, oder $v = u_1 + R_1\varphi_1$ und es folgt darnach aus den vorhergehenden Gleichungen (a) und (b) entweder die Gleichung:

$$\text{d.)}\quad P_1\frac{k_1^2+R_1^2}{R_1^2}\frac{dv}{dt} = g\left[J\frac{R_1+r}{R_1} - P_1\sin\gamma - N'\left(\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1 + f_2\frac{\varrho_1}{R_1}\right)\right]$$

oder die Gleichung:

$$\text{e.)}\left\{\begin{aligned} & P_1\frac{dv}{dt} = gJ - gP_1(\sin\gamma - f_1\cos\gamma) \\ & \qquad - gN'\left[\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1 - f_1(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)\right] \end{aligned}\right.$$

als Gesetz der Bewegung unseres Systems.

Für die übrigen Räder b, c und d wollen wir die Verhältnisse der Art voraussetzen, daß in keinem Falle ein Ausgleiten derselben stattfindet, daß es also genügt, ihre drehenden Bewegungen um ihre Berührungspunkte auf der Ebene OM zu betrachten. Wir haben dann an denselben außer ihrem Gewichte nur den Druck auf die Achse und die Zapfenreibung als wirkende Kräfte in Rechnung zu bringen und werden aus der Gleichung (d) leicht schließen, daß die Gleichung jener Bewegung für das Räderpaar b die Form annimmt:

$$\text{f.)}\quad P_2\frac{k_2^2+R_2^2}{R_2^2}\frac{dv}{dt} = -g\left[P_2\sin\gamma + N''\left(\cos\psi_2 + f_2\sin\psi_2 + f_2\frac{\varrho_2}{R_2}\right)\right]$$

und für jedes der Räderpaare c und d in ähnlicher Weise

$$\text{g.)}\quad P_2\frac{k_2^2+R_2^2}{R_2^2}\frac{dv}{dt} = -g\left[P_2\sin\gamma + N'''\left(\cos\psi_3 + f_2\sin\psi_3 + f_2\frac{\varrho_2}{R_2}\right)\right]$$

werden muß.

Wir haben also noch die Gleichungen für die beiden Körper A und B selbst aufzustellen, um mittels derselben die unbekannten innern Kräfte aus den vorhergehenden Gleichungen zu eliminiren und deren Intensitäten zu bestimmen. Für den Körper A hat man außer seinem Gewichte die Kräfte J, N', N'', $f_2 N'$ und $f_2 N''$, welche nun alle in entgegengesetztem Sinne gegen vorher zu nehmen sind, so daß die erstern den Winkel π, die beiden folgenden die Winkel ψ_1 und ψ_2 und die letzten die Winkel $\psi_1 - \frac{1}{2}\pi$ und $\psi_2 - \frac{1}{2}\pi$ mit der Achse der positiven x bilden, wozu noch die Fadenspannung T kommt, welche im Sinne der negativen x wirkt. Die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Körpers A sind demnach

$$\left.\begin{aligned} Q_1 \frac{dv}{dt} &= g(N' \cos\psi_1 + N'' \cos\psi_2 + f_2 N' \sin\psi_1 + f_2 N'' \sin\psi_2 - J - T - Q_1 \sin\gamma) \\ 0 &= N' \sin\psi_1 + N'' \sin\psi_2 - f_2 N' \cos\psi_1 - f_2 N'' \cos\psi_2 - Q_1 \cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{(h.}$$

Denken wir uns dann durch den Schwerpunkt des Körpers A eine parallele und eine senkrechte Gerade zu MO gezogen, und die Abstände der Achsen a und b von diesen beiden Geraden durch m_1 und $-n_1$, m_2 und $-n_2$ gemessen, so daß die Hebelarme der drehenden Wirkungen, welche die Kräfte N' und N'' in Bezug auf jenen Schwerpunkt ausüben, durch $-(n_1 \cos\psi_1 + m_1 \sin\psi_1)$ und $m_2 \sin\psi_2 - n_2 \cos\psi_2$ ausgedrückt werden, und die Hebelarme der von den Reibungen $f_2 N'$ und $f_2 N''$ erzeugten drehenden Wirkungen durch $m_1 \cos\psi_1 - n_1 \sin\psi_1 + \varrho_1$ und $-(m_2 \cos\psi_2 + n_2 \sin\psi_2 - \varrho_2)$, so erhalten wir für die drehende Bewegung des Körpers A um seinen Schwerpunkt die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & N''(m_2 \sin\psi_2 - n_2 \cos\psi_2) + f_2 N'(m_1 \cos\psi_1 - n_1 \sin\psi_1 + \varrho_1) \\ & - N'(n_1 \cos\psi_1 + m_1 \sin\psi_1) - f_2 N''(m_2 \cos\psi_2 + n_2 \sin\psi_2 - \varrho_2) \end{aligned}\right\}. \text{(i.}$$

In gleicher Weise ergeben sich für die fortschreitende Bewegung des Körpers B die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Q_2 \frac{dv}{dt} &= g(2 N''' \cos\psi_3 + 2 f_2 N''' \sin\psi_2 + T - Q_2 \sin\gamma) \\ 0 &= N''' \sin\psi_3 - f_2 N''' \cos\psi_3 - \tfrac{1}{2} Q_2 \cos\gamma \end{aligned}\right\}, \text{(k.}$$

während diejenige für die drehende Bewegung auf die Bedingung:

$$0 = \left[m_4 - m_3 - f_2(n_3 + n_4)\right] \sin\psi_3 - \left[n_3 + n_4 + (m_4 - m_3) f_2\right] \cos\psi_3 + 2 f_2 \varrho_3$$

zurückkommt, worin die Größen m_3, n_3, m_4 und n_4 ähnliche Bedeutungen haben, wie die m_1, n_1, m_2 und n_2 bei dem Körper A, und welcher durch die Lage des Schwerpunktes Genüge geleistet werden muß, wenn unsere Annahme, daß der Druck auf die Achsen der Räderpaare c und d gleich und gleich gerichtet sei gültig sein soll. Man hat aber in unserm Falle, wo die Halbmesser der Räder gleich sind, $n_3 = n_4$; macht man also noch $m_3 = m_4$, so daß der Schwerpunkt in die Mitte zwischen die beiden Achsen fällt, so wird die vorhergehende Bedingung einfacher

$$\text{l.)} \qquad f_2 \varrho_2 = n_3 (\cos \psi_3 + f_2 \sin \psi_3) ,$$

und gibt die erforderliche Größe von n_3, wenn ψ_3 bekannt ist.

Verbinden wir nun die Gleichungen (k) mit der Gleichung (g), so ergibt sich aus der Summe der doppelten letztern und der ersten von jenen, für die Bewegung des Körpers B mit seinen Rädern die Gleichung:

$$\text{m.)} \quad (Q_2 + 2\beta P_2)\frac{dv}{dt} = g\left[T - (Q_2 + 2P_2)\sin\gamma - 2fN''' \frac{\varrho_2}{R_2}\right] ,$$

worin der Factor $1 + \frac{k_2{}^2}{R_2{}^2}$, welchen wir für alle Räder gleich annehmen wollen, durch β ersetzt ist. Multipliziren wir dann die Gleichung (g) mit f_2, die zweite der Gleichungen k mit g und ziehen beide von einander ab, so finden wir mit Vernachlässigung der mit $f_2{}^2$ behafteten Glieder und wenn wir $\frac{dv}{dt}$ zur Abkürzung durch v′ ersetzen

$$N''' \sin \psi_3 = \frac{1}{2} Q_2 \cos \gamma - f_2 P_2 \left(\sin \gamma + \beta \frac{v'}{g}\right) .$$

Multiplizirt man dann die zweite Gleichung (k) mit $g f_2$ und addirt sie zu (g), so folgt mit gleicher Annäherung

$$N''' \cos \psi_3 = -\left[P_2 \left(\sin\gamma + \beta \frac{v'}{g}\right) + \frac{1}{2} f_2 Q_2 \cos \gamma\right] ,$$

da $f_2 \frac{\varrho_2}{R^2}$ derselben Ordnung angehört wie $f_2{}^2$. Man zieht aus diesen Werthen leicht den für $tang\, \psi_3$, welcher zeigen wird, daß wenn das Gewicht P_2 gegen Q_2 ziemlich klein ist, die Ebene dabei eine geringe Steigung hat und die Beschleunigung v′ nicht sehr bedeutend ist, ψ_3

wenig größer sein wird, als $\frac{1}{4}\pi$, und erhält durch die Summe ihrer Quadrate, wenn wieder f_2^2 neben 1 vernachlässigt wird

$$N''' = \sqrt{\frac{1}{4} Q_2^2 \cos^2\gamma + P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta \frac{v'}{g}\right)^2},$$

wofür wir unter den ebengenannten Voraussetzungen

$$N''' = \frac{1}{2} Q_2 \cos\gamma \left(1 + \frac{2 P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta \frac{v'}{g}\right)^2}{Q_2^2 \cos^2\gamma}\right)$$

setzen wollen; als eine erste Annäherung wird selbst der Werth:

$$N''' = \frac{1}{2} Q_2 \cos\gamma$$

genügen, da diese Größe nur mit dem kleinen Factor $f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}$ multiplizirt in der Gleichung der Bewegung erscheint.

Nachdem auf diese Weise N''' der Größe und Richtung nach bestimmt worden, verbinden wir die Gleichung (m) mit der ersten der Gleichungen (h) und der Gleichung (f) und erhalten als Summe derselben

$$\left.\begin{aligned}(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2)\frac{dv}{dt} &= g\left[N'(\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1) - J\right]\\ &- g\left[(Q_1 + Q_2 + 3P_2)\sin\gamma + (N'' + 2N''') f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}\right]\end{aligned}\right\}, \quad (n.$$

und diese Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (h), mit (g) und (i) verbunden, wird dazu dienen, die vier Größen $N' \sin\psi_1$, $N' \cos\psi_1$, $N'' \sin\psi_2$ und $N'' \cos\psi_2$ zu bestimmen, woraus sich dann die N' und N'' wieder der Größe und Richtung nach berechnen lassen. Dazu bringt man die Gleichung (i) auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}N' n_1(\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1) + N' m_1(\sin\psi_1 - f_2 \cos\psi_1) - f_2 N' \varrho_1\\ = N'' m_2(\sin\psi_2 - f_2 \cos\psi_2) - N'' n_2(\cos\psi_2 + f_2 \sin\psi_2) + f_2 N'' \varrho_2\end{aligned}\right\} (o.$$

und ersetzt die beiden ersten Glieder durch ihre Werthe aus den Gleichungen (n) und (h); man erhält dadurch den Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned} & n_1\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J+f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N''+2N''')\right] \\ & \quad +m_1 Q_1\cos\gamma=N''(\sin\psi_2-f_2\cos\psi_2)(m_1+m_2)+f_2 N'\varrho_1 \\ & \quad\quad -N'''n_2(\cos\psi_2+f_2\sin\psi_2)+f_2 N''\varrho_2\,, \end{aligned}\right.$$

und dieser nimmt, wenn darin noch $N''(\cos\psi_2+f_2\sin\psi_2)$ aus der Gleichung (f) ersetzt wird und man beachtet, daß die Verhältnisse $\frac{\varrho_1}{m_1+m_2}$, $\frac{\varrho_2}{m_1+m_2}$ derselben Ordnung angehören, wie $\frac{\varrho_1}{R_1}$, $\frac{\varrho_2}{R_2}$, daß also die Glieder $f_2 N'\varrho_1$ und $f_2 N''\varrho_2$ ebenso wie $f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N''+2N)'''$ neben den übrigen vernachläßigt werden dürfen, die Form an:

$$p.)\left\{\begin{aligned} & N''(\sin\psi_2-f_2\cos\psi_2)(m_1+m_2)=m_1 Q_1\cos\gamma+n_2P_2\left(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\right) \\ & \quad +n_1\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\right]. \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck wird nochmals durch Addition mit der Gleichung (f) verbunden unter der Form:

$$N''(f_2\cos\psi_2+f_2^2\sin\psi_2)(m_1+m_2)=f_2P_2\left(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\right)(m_1+m_2)$$

und gibt so den angenäherten Werth:

$$\left\{\begin{aligned} & N''\sin\psi_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma+P_2\left(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\right)\left(f_2+\frac{n_2}{m_1+m_2}\right) \\ & \quad +\frac{n_1}{m_1+m_2}\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\right]. \end{aligned}\right.$$

Multiplizirt man dagegen die Gleichung (p) mit f_2 und zieht sie von der mit m_1+m_2 multiplizirten Gleichung (f) ab, so findet man

$$\left\{\begin{aligned} & N''\cos\psi_2=P_2\left(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\right)\left(1-\frac{f_2 n_2}{m_1+m_2}\right)-\frac{f_2 m_1}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma \\ & \quad -\frac{f_2 n_1}{m_1+m_2}\left((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\right). \end{aligned}\right.$$

Eliminirt man auf gleiche Weise aus der Gleichung (o) die Glieder: $N''(\sin\psi_2 - f_2\cos\psi_2)$ und $N''(\cos\psi_2 + f_2\sin\psi_2)$ mittels der Gleichungen (h) und (f), so ergibt sich mit den frühern Vernachlässigungen die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} N' n_1(\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1) + N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)(m_1+m_2) \\ = m_2 Q_1\cos\gamma - n_2 P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \end{aligned}\right\} \text{z}$$

diese mit der Gleichung (n) unter der Form:

$$N'(\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1) = \left((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right)$$

verbunden, führt zu der neuen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)(m_1+m_2) = m_2 Q_1\cos\gamma - n_2 P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \\ - n_1\left((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right) \end{aligned}\right\},$$

und aus diesen und den vorhergehenden folgen wie vorher die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} N'\sin\psi_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2}P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \\ &+\left(f_2 - \frac{n_1}{m_1+m_2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right], \\ N'\cos\psi_1 &= \\ &= \left(1 + \frac{f_2 n_1}{m_1+m_2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right] \\ &\quad - \frac{f_2 m_2}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma + \frac{f_2 n_2}{m_1+m_2}P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right). \end{aligned}\right\}$$

Aus den vorhergehenden Ausdrücken ziehen wir nun einmal die Werthe von N'^2 und N''^2, und finden, wenn 1 für $1 + f^2$ gesetzt wird,

$$N'^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 Q_1^2 \cos^2\gamma + \left(\frac{n_2}{m_1+m_2}\right)^2 P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)^2$$

$$- \frac{2 n_2 m_2}{(m_1+m_2)^2} P_2 Q_1 \cos\gamma \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)$$

$$+ \left(1 + \frac{n_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right]^2$$

$$- \frac{2 m_2 n_1}{(m_1+m_2)^2} Q_1 \cos\gamma \left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right]$$

$$+ \frac{2 n_1 n_2}{(m_1+m_2)^2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + \right.$$

$$\left. + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right]$$

oder wenn zur Abkürzung $(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J$ durch J' ersetzt wird

$$N'^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right)^2 + J'^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$N''^2 = \left[\frac{m_1}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) + \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right]^2$$

$$+ P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)^2.$$

Nehmen wir aber außer der frühern Voraussetzung, daß γ und $\frac{v'}{g}$ klein bleiben sollen, noch an, daß n_1 und n_2 ziemlich klein seien gegen m_1 und m_2, also um so mehr gegen $m_1 + m_2$, so können für eine erste Annäherung die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} N' = \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 Q_1^2 \cos^2\gamma + \left(1+\frac{n_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right) J'^2} \\ N'' = \frac{m_1}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + \frac{n_1}{m_1+m_2} J' \end{array}\right\},$$

genügen, worin J' den Ausdruck $(Q_1 + Q_2 + 3P_2) \sin\gamma + J$ ersetzt.

Mit den oben abgeleiteten Werthen von $N' (\sin\psi_1 - f_1 \cos\psi_1)$ und $N'' (\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1)$ nimmt nun unsere Bedingungsgleichung (c) mit Weglassung des kleinen Gliedes $f_2 N' \frac{\varrho_1}{R_1} \frac{R_1^2}{k_1^2}$ die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \frac{\beta}{\beta-1}\left[\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + P_1 \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right] \\ > J \frac{r}{R_1} \frac{R_1^2}{k_1^2} + (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2) \sin\gamma + (Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2) \frac{v'}{g} \end{array}\right\}, (q.$$

aus welchen noch v' oder J mittels der Gleichung der ohne Gleiten des Triebrades stattfindenden Bewegung zu eliminiren ist, da diese Größen selbst wieder von einander abhängen. Diese Gleichung ergibt sich durch Summiren der Gleichungen (d) und (n), und wird nun

$$\left.\begin{array}{l} \left(Q_1 + Q_2 + \beta(P_1 + 3P_2)\right) \frac{dv}{dt} = g\left(J \frac{r}{R_1} - (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2) \sin\gamma\right) \\ \qquad - f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} g (N' + N'' + 2N''') \end{array}\right\}, (r.$$

wenn man vorerst noch die Bezeichnung N', N'' und N''' statt der oben erhaltenen Näherungswerthe stehen läßt. Zieht man daraus den Werth von $(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2) \frac{v'}{g}$ um ihn in die Bedingung (q) einzuführen, so folgt der Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \frac{\beta}{\beta-1}\left[\left(\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 + P_1\right) \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right] \\ > J \frac{r}{R_1} \frac{\beta}{\beta-1} - \beta P_1 \frac{v'}{g} - f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (N' + N'' + 2N''') \end{array}\right\}, (s.$$

worin man für eine erste Annäherung die mit $\frac{v'}{g}$ multiplizirten Glieder vernachlässigen und für J′ den oben bemerkten angenäherten Werth $(Q_1 + Q_2 + 3P_2)\sin\gamma + J$ nehmen kann, um daraus das Verhältniß von J zu den übrigen Kräften zu bestimmen, welches der Bedingung, daß die Räder a nicht ausgleiten sollen, Genüge leistet.

Die Gleichung (r) zeigt, daß wenn die ebengenannte Bedingung erfüllt wird, die Beschleunigung v′ unter sonst gleichen Umständen nur von der innern Kraft J abhängt, und daß wenn die Bewegung eine gleichförmige werden soll, die Intensität von J durch die Gleichung:

$$0 = J\frac{R}{r} - (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2)\sin\gamma - f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N' + N'' + 2N''')$$

bestimmt wird, in welche aber noch die Werthe von N′ und N″ einzuführen sind, ehe man sie nach J auflöst. Wird die Bedingung (s) aber nicht befriedigt, so gibt uns die Summe der Gleichungen (e) und (n) die Gleichung der Bewegung, welche dann mit dem obigen Werthe von $N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)$ die Form annimmt:

$$\text{t.)}\left\{\begin{aligned}&\left[P_1 + f_1\frac{n_2}{m_1+m_2}\beta P_2 + \left(1 + f_1\frac{n_1}{m_1+m_2}\right)(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2)\right]\frac{dv}{dt}\\&= g f_1\left[\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}Q_1 + P_1\right)\cos\gamma - \frac{n_1}{m_1+m_2}\left((Q_1+Q_2)\sin\gamma + J\right)\right.\\&\qquad\left.- \frac{3n_1+n_2}{m_1+m_2}P_2\sin\gamma\right]\\&\quad - g(Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2)\sin\gamma - g f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N'' + 2N''')\end{aligned}\right.,$$

und zeigt, daß nun die Beschleunigung nur insoferne von der innern Kraft J abhängt, als sie Einfluß auf den Druck N′ und dadurch auf $f_1 N_1$, d. i. auf die Reibung des Rades a an der Ebene MO hat, daß folglich diese Reibung die eigentliche äußere fördernde Kraft ist.

Für die bisherige Untersuchung wurde angenommen, daß die innere Kraft oberhalb der Achse des Rades a angreife und im Sinne der positiven x gerichtet, also in Bezug auf den Punkt F eine abstoßende sei. Lassen wir nun diese Kraft unterhalb der Achse angreifen und in Bezug auf F′ eine anziehende werden, so daß sie im Sinne der negativen x wirkt, so wird J in den Gleichungen (a), (e), (h) und (n)

und daher auch in den Werthen von N′ und N″ das Zeichen wechseln; der Druck N′ wird nun größer und N″ etwas kleiner. Im Uebrigen bleiben die Gleichungen der Bewegung ungeändert; denn das Moment $J(R_1 + r)$ in der Gleichung (b) wird nun $-J(R_1 - r)$; das Moment Jr bleibt also ungeändert, wie es sich von selbst versteht, und demnach auch die Gleichung (r) und die Bedingung (q), insoweit J nicht in die Werthe von N′ und N″ eingeht.

Für den einfachen Fall, wo die Bewegung eine gleichförmige und die Ebene OM wagrecht ist, und $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}$, $n_1 = 0$ genommen wird, ergeben sich aus dem Vorhergehenden folgende einfachere Werthe:

$$N''' = \tfrac{1}{2} Q_2 \ , \quad N'' = \tfrac{1}{3} Q_1 \ , \quad N' = \sqrt{\tfrac{1}{9} Q_1^2 + J^2}\ ;$$

die Bedingung (q) kommt auf

$$f_1 \beta \left(\frac{2}{3} Q_1 + P_1\right) > J \frac{r}{R_1}$$

zurück, und zeigt, daß J um so größer werden darf, je kleiner r gegen R_1 ist; die Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung gibt aber auch

$$J \frac{r}{R_1} = f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} \left(Q_2 + \frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{3} \sqrt{4 Q_1^2 + 9 J^2}\right)$$

und wenn man das Quadrat des kleinen Factors $f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}$ gegen das von $\frac{r}{R_1}$ vernachlässigen kann, einfach

$$J \frac{r}{R_1} = f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (Q_1 + Q_2)\ ;$$

führt man dann diesen Werth in die vorhergehende Ungleichheit ein, so folgt

$$f_1 \beta \left(P_1 + \frac{2}{3} Q_1\right) > f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (Q_1 + Q_2)$$

als Bedingung für das Nichtausgleiten der Triebräder. Nimmt z. B. $f_1 = \frac{1}{6}$, $\beta = 1 + \frac{k_1^2}{R_1^2} = \frac{9}{5}$, $f_2 = 0{,}1$, $\frac{\varrho_2}{R_2} = 0{,}05$, so hat man

wieder $w = e \cos\vartheta$. Ist dann λ die Größe der normalen Verrückung, welche durch die Einheit des Druckes erzeugt wird, und welche gleichbedeutend ist mit der Verkürzung eines prismatischen Stabes, vom gleichen Stoffe wie das Lager und dessen Länge und Querschnitt den Einheiten der Länge und des Querschnittes gleich sind, wenn derselbe in der Richtung seiner Achse mit der Einheit des Druckes belastet wird, so hat man auch nach unserer obigen Annahme $w = \lambda N$, wenn N den geometrischen Druck im Punkte M vorstellt. Im Punkte A, wo die verlängerte CC' den Kreis schneidet, wird $w = e$ und wenn N_0 den geometrischen Druck in diesem Punkte bezeichnet, $e = \lambda N_0$, und man folgert daraus mit dem Werthe von w die Beziehung:

a.) $$N = N_0 \cos\vartheta \,.$$

Der Mittelpunkt C sei nun der Anfangspunkt zweier rechtwinkligen Coordinatensysteme, welche die Achse der Welle als Achse der y gemeinschaftlich haben; die z-Achse des einen sei parallel zur Richtung der Schwere, die positive Hälfte aber aufwärts gerichtet; die Achse der x' des andern sei die verlängerte CC' also die CA die Achse der negativen x', und ζ sei der noch unbekannte Winkel, welchen diese Achse der z' mit der Achse der z des ersten Systems bildet. Das Lager sei horizontal begrenzt und der dem Bogen FAG entsprechende Mittelpunktswinkel $= 2\alpha$, also Bogen $AF = r(\alpha - \zeta)$, Bogen $AG = r(\alpha + \zeta)$, wenn $CA = r$ ist. Der geometrische Druck N im Punkte M als Widerstand des Lagers genommen gibt parallel zu den Achsen der x' und z', mit denen seine Richtung die Winkel $\frac{1}{2}\pi + \vartheta$ und ϑ bildet, die Componenten $-N\sin\vartheta = -N_0\cos\vartheta\sin\vartheta$, und $N\cos\vartheta = N_0\cos^2\vartheta$; diese sind nach §. 22 die Aenderungsgesetze der physischen Componenten in Bezug auf die Aenderung des Bogens $AM = s = r\vartheta$, und man hat daher nach den dortigen Gleichungen (36)

b.) $$\left\{\begin{aligned} \Sigma . N\cos\lambda' &= N_0 \int_{-(\alpha+\zeta)}^{\alpha-\zeta} d\vartheta\, . -r\cos\vartheta\sin\vartheta = \tfrac{1}{2}N_0 r\Big(\cos^2(\alpha-\zeta) - \cos^2(\alpha+\zeta)\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}N_0\, r \sin 2\alpha \sin 2\zeta \,, \\ \Sigma . N\cos\nu' &= N_0 \int_{-(\alpha+\zeta)}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . r\cos^2\vartheta = \tfrac{1}{4}N_0 r\Big(4\alpha + \sin 2(\alpha-\zeta) + \sin 2(\alpha+\zeta)\Big) \\ &= N_0\, r\,(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha \cos 2\zeta) \,, \end{aligned}\right.$$

wobei indessen zu beachten ist, daß keiner der Winkel $\alpha - \zeta$ und $\alpha + \zeta$ größer genommen werden kann, als $\frac{1}{2}\pi$, weil für den Ueberschuß der Druck N negativ wird, der Zapfen also längs des entsprechenden überschüssigen Bogens nicht mehr auf das Lager drückt, sondern dieses vielmehr nachgeschoben werden müßte, um mit dem Zapfen ohne Druck gerade in Berührung zu bleiben; für diesen überschüssigen Bogen muß daher N gleich Null genommen werden. Ob dieser Fall eintreten wird, kann ohngefähr schon aus der Richtung der förderndenden Resultirenden der an der Welle wirkenden Kräfte erkannt werden, und wenn er eintritt, wenn z. B. $\alpha + \zeta > \frac{1}{2}\pi$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . N \cos\lambda' &= N_0 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . -r \cos\vartheta \sin\vartheta = \tfrac{1}{2} N_0 r \cos^2(\alpha-\zeta) \\ \Sigma . N \cos\nu' &= N_0 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . r \cos^2\vartheta = N_0 r\left(\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha-\zeta)+\tfrac{1}{4}\sin 2(\alpha-\zeta)\right) \end{aligned}\right\} \text{(c.}$$

Die Reibung im Punkte M wird durch das Product $fN = fN_0 \cos\vartheta$ gemessen, wenn f den betreffenden Reibungscoëffizienten bezeichnet, und zerlegt sich parallel zu den Achsen der x' und der z' in zwei geometrische Componenten $fN \cos\vartheta = fN_0 \cos^2\vartheta$ und $fN \sin\vartheta = fN_0 \sin\vartheta \cos\vartheta$, da ihre Richtung die Winkel ϑ und $\frac{1}{2}\pi - \vartheta$ mit diesen Achsen einschließt, und diese Ausdrücke gelten sowohl für negative wie für positive Werthe von ϑ bis zur Grenze $\vartheta = \pm \frac{1}{2}\pi$. Für den Fall, daß beide Winkel $\alpha - \zeta$ und $\alpha + \zeta$ kleiner sind als $\frac{1}{2}\pi$, werden demnach die physischen Componenten der Reibung [Gleichungen (40)]

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . fN \cos l' &= fN_0 r(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha \cos 2\zeta) \\ \Sigma . fN \cos n' &= -\tfrac{1}{2} fN_0 r \sin 2\alpha \sin 2\zeta \end{aligned}\right\}; \quad \text{(d.}$$

im andern Falle, wenn $\alpha + \zeta > \frac{1}{2}\pi$ ist, hat man

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . fN \cos l' &= fN_0 r\left(\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha-\zeta)+\tfrac{1}{4}\sin 2(\alpha-\zeta)\right) \\ \Sigma . fN \cos n' &= -\tfrac{1}{2} fN_0 r \cos^2(\alpha-\zeta) \end{aligned}\right\}. \quad \text{(e.}$$

Ist endlich R die fördernde Resultirende der an der Welle wirksamen Kräfte, das Gewicht derselben und dessen, was mit ihr fest verbunden ist, mit eingerechnet, und $\pi - \gamma$ der Winkel, den sie mit der

Achse der positiven z einschließt, also $\pi - \chi + \zeta$ der Winkel ihrer Richtung mit der Achse der positiven z', wobei wir sowohl diese Richtung als die Intensität R als unveränderlich voraussetzen wollen, so werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung der Welle längs der Achsen der x' und z' folgende:

$$\begin{cases} 0 = \Sigma . \mathrm{N} \cos \lambda' + \Sigma . \mathrm{f N} \cos \mathrm{l}' + \mathrm{R} \sin (\gamma - \zeta) \\ 0 = \Sigma . \mathrm{N} \cos \nu' + \Sigma . \mathrm{f N} \cos \mathrm{n}' - \mathrm{R} \cos (\gamma - \zeta) \end{cases}$$

oder mit der Beachtung, daß in allen Fällen $\Sigma . \mathrm{f N} \cos \mathrm{l}' = \mathrm{f} \Sigma . \mathrm{N} \cos \nu'$, $\Sigma . \mathrm{f N} \cos \mathrm{n}' = - \mathrm{f} \Sigma . \mathrm{N} \cos \lambda'$, und daß man $\Sigma . \mathrm{N} \cos \lambda'$ einstweilen durch $\mathrm{N_0 r} F_1(\zeta)$, $\Sigma . \mathrm{N} \cos \nu'$ durch $\mathrm{N_0 r} F_2(\zeta)$ ersetzen kann,

$$\text{f.)} \begin{cases} 0 = \mathrm{N_0 r} \big(F_1(\zeta) + \mathrm{f} F_2(\zeta) \big) + \mathrm{R} \sin (\gamma - \zeta) , \\ 0 = \mathrm{N_0 r} \big(F_2(\zeta) - \mathrm{f} F_1(\zeta) \big) - \mathrm{R} \cos (\gamma - \zeta) . \end{cases}$$

Man zieht daraus die Werthe:

$$\text{g.)} \begin{cases} \mathrm{N_0 r} F_1(\zeta)(1 + \mathrm{f}^2) = - \mathrm{R} \big(\sin (\gamma - \zeta) + \mathrm{f} \cos (\gamma - \zeta) \big) \\ \mathrm{N_0 r} F_2(\zeta)(1 + \mathrm{f}^2) = \mathrm{R} \big(\cos (\gamma - \zeta) - \mathrm{f} \sin (\gamma - \zeta) \big) \end{cases}$$

und finden dadurch die Gleichung:

$$\big(\cos (\gamma - \zeta) - \mathrm{f} \sin (\gamma - \zeta) \big) F_1(\zeta) + \big(\sin (\gamma - \zeta) + \mathrm{f} \cos (\gamma - \zeta) \big) F_2(\zeta) = 0 ,$$

zur Bestimmung des Werthes von ζ; sie nimmt für den ersten Fall mit den durch (b) bezeichneten Componenten des Druckes die Form an:

$$\text{h.)} \begin{cases} 0 = \big(\cos (\gamma - \zeta) - \mathrm{f} \sin (\gamma - \zeta) \big) \sin 2\alpha \sin 2\zeta \\ \qquad + \big(\sin (\gamma - \zeta) + \mathrm{f} \cos (\gamma - \zeta) \big) (2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\zeta) ; \end{cases}$$

im andern Falle dagegen wird sie mit den Componenten (c)

$$\begin{cases} 0 = \big(\cos (\gamma - \zeta) - \mathrm{f} \sin (\gamma - \zeta) \big) \cos^2 (\alpha - \zeta) \\ \qquad + \big(\sin (\gamma - \zeta) + \mathrm{f} \cos (\gamma - \zeta) \big) \big(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \zeta + \tfrac{1}{2} \sin 2(\alpha - \zeta) \big) \end{cases}$$

und läßt in beiden Fällen in Bezug auf ζ keine allgemeine Auflösung zu. Bezeichnet man aber *arc tang* f durch ϱ, so ergibt sich leicht aus der ersten dieser Gleichungen:

$$tang\,(\gamma-\zeta+\varrho)=-\frac{\sin 2\alpha \sin 2\zeta}{2\alpha+\sin 2\alpha \cos 2\zeta},$$

und aus der zweiten folgt ebenso (i.

$$tang\,(\gamma-\zeta+\varrho)=-\frac{\cos^2(\alpha-\zeta)}{\frac{1}{2}\pi+\alpha-\zeta+\frac{1}{2}\sin 2(\alpha-\zeta)}.$$

Mittels dieser Ausdrücke wird man also den Werth von γ bestimmen, welcher einem angenommenen Werthe von ζ entspricht, und so indirect durch mehrere Versuche auch den Werth von ζ für ein gegebenes γ erhalten. Diese Ausdrücke werden aber auch besonders dazu dienen, unsere beiden obengenannten Fälle zu unterscheiden, nämlich den Werth von γ zu bestimmen, welcher der Grenze $\alpha+\zeta=\frac{1}{2}\pi$ entspricht; für diese hat man $\zeta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$, und damit geben die beiden vorhergehenden Gleichungen den Ausdruck:

$$tang\,(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha-\gamma-\varrho)=\frac{\sin^2 2\alpha}{2\alpha-\frac{1}{2}\sin 4\alpha},$$

welcher durch den daraus folgenden Werth von γ zeigen wird, ob der erste oder zweite Fall stattfindet, je nachdem derselbe größer oder kleiner ist, als der gegebene Werth von γ. Soll z. B. $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ sein, so müßte $\zeta=0$ werden, und $\gamma=-\varrho$; für $\alpha=\frac{1}{4}\pi$, $\zeta=\frac{1}{4}\pi$ dagegen hat man

$$tang\,(\tfrac{1}{4}\pi-\gamma-\varrho)=\frac{2}{\pi}=tang\,32^0\,29'$$

und $\gamma+\varrho=45^0-32^0\,29'=12^0\,31'$, $\gamma=12^0\,31'-\varrho$; wäre also $\varrho=12^0\,31'$ oder $f=0{,}222$, so müßte γ gerade Null sein; für kleinere Werthe von f dagegen wird γ noch einen positiven Werth erhalten können.

Hat man auf diese Weise für gegebene Werthe von α und ϱ den Grenzwerth für γ bestimmt und den Werth von ζ für das gegebene γ aus der entsprechenden der Gleichungen (i) annähernd berechnet, so gibt eine der Gleichungen (g) den entsprechenden Werth für $N_0\,r$, womit wir nun das Gesetz für die drehende Bewegung der Welle aufstellen können. Die Gleichung für diese Bewegung hat nämlich die Form:

k.) $$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g\,(M_Y - \Sigma . f N r)\,,$$

wenn Q das Gewicht der Welle und $\frac{Q}{g} k^2$ ihr Massemoment, und M_Y die drehende Wirkung der an der Welle angreifenden Kräfte in Bezug auf die geometrische Achse derselben bezeichnet. Die drehende Wirkung der Reibung $\Sigma . f N r$ ist aber noch durch das Integral:

l.) $$\left\{\begin{aligned} \Sigma . f N r &= -f r^2 \int_{-(\alpha+\zeta)}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . N_0 \cos\vartheta = -f N_0 r^2 \left(\sin(\alpha-\zeta) + \sin(\alpha+\zeta)\right) \\ &= -2 f N_0 r^2 \sin\alpha \cos\zeta \end{aligned}\right.$$

zu ersetzen, wenn $\alpha + \zeta < \frac{1}{2}\pi$, und durch:

m.) $$\Sigma . f N r = -f N_0 r^2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . \cos\vartheta = -f N_0 r^2 \left(1 + \sin(\alpha - \zeta)\right)$$

wenn $(\alpha + \zeta) > \frac{1}{2}\pi$ ist, und in diese Ausdrücke hat man endlich noch die vorherberechneten Werthe von ζ und $N_0 r$ einzuführen, um die Winkelbeschleunigung $\frac{d\varphi}{dt}$ in Function der gegebenen Größen darzustellen oder durch deren gegebene Werthe auszudrücken.

Nehmen wir z. B. den Fall, wo $\zeta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, und $\gamma = -\varrho$ ist, so haben wir aus der zweiten der Gleichungen (g)

$$N_0 r = R \frac{2}{\pi\sqrt{1+f^2}}$$

und damit wird

$$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g \left(M_Y - R r \frac{4 f}{\pi\sqrt{1+f^2}}\right).$$

Ist dagegen $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\zeta = \frac{1}{4}\pi$ und $\gamma = \frac{1}{4}\pi - \left(\varrho + \operatorname{arc tang} \frac{2}{\pi}\right)$, also $\gamma - \zeta = -\left(\varrho + \operatorname{arc tang} \frac{2}{\pi}\right)$, so ergibt sich nach mehrfachen Reductionen:

$$\cos(\gamma-\zeta)-f\sin(\gamma-\zeta)=\sqrt{\frac{1+tang^2\rho}{1+\frac{4}{\pi^2}}}$$

und damit folgt

$$N_0 r = R\frac{4}{\pi\sqrt{(1+f^2)\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)}},$$

$$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g\left(Mr - Rr\frac{4f}{\sqrt{(1+f^2)(\pi^2+4)}}\right),$$

man sieht daraus, daß in diesem Falle die verzögernde Wirkung der Reibung kleiner ist, als in dem vorhergehenden. Für sehr kleine Werthe von α und beziehungsweise für $\alpha=0$, kann $\sin 2\alpha$ durch 2α ersetzt, und die Gleichung (h) auf die Form:

$$0=\left(\cos(\gamma-\zeta)-f\sin(\gamma-\zeta)\right)\sin 2\zeta + \left(\sin(\gamma-\zeta)+f\cos(\gamma-\zeta)\right)(1+\cos 2\zeta)$$

gebracht werden, und man zieht daraus leicht

$$tang\,\zeta = -tang(\gamma+\rho-\zeta)\;,\quad \gamma=-\rho\;,\quad \zeta=0\,.$$

Dadurch geht der Werth für $\Sigma.fNr$ durch Elimination von $N_0 r$ in

$$\Sigma.fNr = Rr\frac{2\alpha f(\cos\gamma - f\sin\gamma)}{2\alpha(1+f^2)} = Rr\sin\rho = Rr\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

über, völlig übereinstimmend mit dem früher (I. Buch, §. 29) abgeleiteten Werthe.

§. 28.

Um endlich auch eine Anwendung der Gleichungen (37) zu erhalten, soll zuletzt noch unter gleichen Voraussetzungen wie vorher die Bewegung einer vertikal stehenden Welle untersucht werden, welche, unten mit einem kugelförmig abgerundeten Zapfen in einem anschließenden Lager ruht und sich am obern Ende mit einem cylindrischen Zapfen an ein anpassendes Lager anlehnt, und an welcher außer ihrem Gewichte Q

noch eine zur Achse senkrecht gerichtete Kraft P von constanter Größe und Richtung angreift, deren constante drehende Wirkung PR sei.

Der Mittelpunkt der Kugelfläche, welche den untern Zapfen begrenzt, C, Fig. 9, sei der Anfang eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems der x, y und z, dessen positive z-Achse mit der Achse der Welle zusammenfällt und abwärts gerichtet ist, und dessen xz-Ebene parallel zur Richtung der Kraft P sei; ferner sei C der Pol eines Kugel-Coordinatensystems der ϑ und ω, von welchen die erstern von der Achse der positiven z, die letztern von der positiven Hälfte der xz-Ebene an gemessen werden. C' sei die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes C, bevor der Zapfen in das Lager eingedrückt worden, also C'C oder CA die Richtung, in welcher jener Mittelpunkt durch den Druck verrückt worden ist; N_0 sei der geometrische Druck im Punkte A, wo die verlängerte C'C die Kugelfläche schneidet, N der in einem beliebigen Punkte M. Ist dann ϑ' der Winkel, welchen der Halbmesser CM mit der CA einschließt, so hat man wie im vorhergehenden Falle

$$N = N_0 \cos \vartheta' ;$$

man hat aber auch, wenn ζ und ξ die Winkel sind, durch welche die Lage der Geraden CA gegen die z-Achse und die xz-Ebene bestimmt wird, zwischen dem Winkel ϑ' und den Coordinaten-Winkeln ϑ und ω des Punktes M die Beziehung:

$$\cos \vartheta' = \cos \vartheta \cos \zeta + \sin \vartheta \sin \zeta \cos (\omega - \xi) .$$

Mit diesem Werthe wird daher

a.) $$N = N_0 (\cos \vartheta \cos \zeta + \sin \vartheta \sin \zeta \cos \omega') ,$$

wenn wir nun, um die folgenden Beziehungen zu vereinfachen, die Ebene der xz so drehen, daß sie durch den Punkt A geht, und demnach den Winkel $\omega - \xi$ in dem vorstehenden Ausdrucke durch ω' ersetzen. Die Durchschnittslinie der Ebene BCA mit der Ebene der xy wird nun die Achse der x' werden, und die Winkel $\widehat{Nx'}$, $\widehat{Ny'}$, $\widehat{Nz}$, welche die Richtung des Druckes N mit den Achsen der positiven x', y' und z einschließt, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos \widehat{Nx'} = \sin \vartheta \cos \omega' , \quad \cos \widehat{Ny'} = \sin \vartheta \sin \omega' , \quad \cos \widehat{Nz} = \cos \vartheta ;$$

womit auch die entsprechenden Componenten jenes geometrischen Druckes in dem Punkte M gegeben sind.

Die Reibung fN in diesem Punkte ist offenbar wie die Bewegung des letztern senkrecht zur Achse der z gerichtet, und bildet, wenn die drehende Bewegung des Zapfens um diese Achse im positiven Sinne vor sich gehend vorausgesetzt wird, mit den positiven Achsen der x′ und y′, die Winkel $\frac{1}{2}\pi - \omega'$ und $\pi - \omega'$; ihre zu diesen Achsen parallelen Componenten sind demnach

$$fN \sin\omega' \quad , \quad -fN\cos\omega' \quad \text{und} \quad 0 \, .$$

Diese geometrischen Componenten des Druckes und der Reibung sind die Aenderungsgesetze der entsprechenden physischen Componenten in Bezug auf die Aenderung der gedrückten Fläche, und da man für die Kugelfläche, deren Halbmesser $r_,$ ist (Buch II., §. 55), die Beziehung hat

$$\frac{d^2 O}{d\omega' d\vartheta} = r_,^2 \sin\vartheta \, ,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2.\Sigma.N\cos\lambda'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_,^2 \sin^2\vartheta \cos\omega' \\ \frac{d^2.\Sigma.N\cos\mu'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_,^2 \sin^2\vartheta \sin\omega' \\ \frac{d^2.\Sigma.N\cos\nu'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_,^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

als Aenderungsgesetze der Componenten des physischen Druckes, und:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2.\Sigma.fN\cos l'}{d\omega' d\vartheta} &= fN r_,^2 \sin\vartheta \sin\omega' \\ \frac{d^2.\Sigma.fN\cos m'}{d\omega' d\vartheta} &= -fN r_,^2 \sin\vartheta \cos\omega' \end{aligned}\right\} \quad (c)$$

als Aenderungsgesetze der Componenten der Reibung, in welchen noch N durch den Werth (a) zu ersetzen ist.

Für die Ausführung der Integration hat man hinsichtlich der Grenzen von ϑ und ω' wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich 2α die Oeffnung des Lagers, d. h. der Winkel, welcher dem Bogen DABE eines Achsenschnittes der Lagerfläche entspricht, so wird es wieder darauf ankommen, ob $\alpha + \zeta$ kleiner oder größer ist, als $\frac{1}{2}\pi$. Im ersten Falle sind die Grenzen von ϑ und von ω' unabhängig von einander; die von ϑ sind α und 0, die von ω' sind 2π und 0; die Aenderungsgesetze (b) geben daher die Integrale:

d.)

$$\Sigma.N\cos\lambda' = N_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta.\sin^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega'.\cos\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= N_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \pi \sin\zeta \sin^3\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi N_0 r_{,}^2 \sin\zeta (8 - 9\cos\alpha + \cos 3\alpha) \;;$$

$$\Sigma.N\cos\mu' = N_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta.\sin^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega'.\sin\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 0 \;;$$

$$\Sigma.N\cos\nu = N_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta.\cos\vartheta\sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= N_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta . 2\pi \cos\zeta \cos^2\vartheta \sin\vartheta$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi N_0 r_{,}^2 \cos\zeta (1 - \cos^3\alpha) \,.$$

Ebenso folgen aus den Aenderungsgesetzen (c) die Werthe:

e.)

$$\Sigma.fN\cos l' = fN_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta.\sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega'.\sin\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 0 \;;$$

$$\Sigma.fN\cos m' = -fN_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta.\sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega'.\cos\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= -fN_0 r_{,}^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \pi \sin^2\vartheta \sin\zeta$$

$$= -\tfrac{1}{2} fN_0 r_{,}^2 \pi \sin\zeta (\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha) \;;$$

Im zweiten Falle legen wir durch den Endpunkt G des in der Ebene der x′z von A aus gemessenen Bogens $AG = \frac{1}{2}\pi r$, eine Ebene FG senkrecht zur Achse der Welle, und eine zweite CG senkrecht zur CA; diese wird durch den Mittelpunkt C gehen und ein Stück EHG von der Lagerfläche abschneiden, auf welches kein Druck mehr ausgeübt wird. Die Gleichung der letztern Ebene ist

$$\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega' = 0 \qquad \text{(f.}$$

und bestimmt die Grenzen von ω' in einem über der FG liegenden horizontalen Schnitte PQ, also für ein constantes ϑ, durch die Gleichung:

$$\cos\omega' = -\frac{1}{\tan\vartheta\tan\zeta} = -\cot\zeta\cot\vartheta\ .$$

Demgemäß theilen wir dann auch die Integrale unserer Gleichungen (b) und (c) in solche, welche sich auf die Kugelhaube FABG beziehen und in solche, welche die Componenten des Druckes und der Reibung für den übrigen Theil FGHD des Lagers ausdrücken. Für den ersten Theil sind die Grenzen von ϑ und ω' wie im ersten Falle unabhängig, und zwar $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ und 0 für ϑ, 2π und 0 für ω'; für diesen Theil erhält man daher die entsprechenden Werthe, wenn man in den Werthen (d) und (e) $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ statt α einführt, und findet so

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1 . N\cos\lambda' &= \tfrac{1}{12}\pi N_0 r_{\prime}^2 \sin\zeta(8 - 9\sin\zeta + \sin 3\zeta) \\ \Sigma_1 . N\cos\mu' &= 0 \\ \Sigma_1 . N\cos\nu' &= \tfrac{2}{3}\pi N_0 r_{\prime}^2 \cos\zeta(1 - \sin^3\zeta) \end{aligned}\right\}, \quad \text{(g.}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1 . fN\cos l' &= 0 \\ \Sigma_1 . fN\cos m' &= -\tfrac{1}{2} f N_0 r_{\prime}^2 \pi(\tfrac{1}{2}\pi - \zeta)\sin\zeta \end{aligned}\right\}. \quad \text{(h.}$$

Für den übrigen Theil dagegen sind, wie schon angegeben, die Grenzen von ω' von ϑ abhängig, und werden, mit $\omega_{\prime}'$ und ω_0' bezeichnet, ausgedrückt durch

$$\omega_{\prime}' = \pi - \operatorname{arc}(\cos = \cot\zeta\cot\vartheta) \quad , \quad \omega_0' = -\omega_{\prime}'\ ;$$

als Grenzen von ϑ hat man α und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$, und die diesem Theile entsprechenden Integrale der Gleichungen (b) werden damit

i.)

$$\Sigma_2 . N \cos\lambda' = N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \sin^2\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')\cos\omega'$$

$$= N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \sin^2\vartheta \Big(2\cos\zeta\cos\vartheta\sin\omega_,' + $$

$$+ \sin\zeta\sin\vartheta\{\tfrac{1}{2}\sin 2\omega_,' + \omega_,'\}\Big)$$

$$= N_0 r_,^2 \left[\cos\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta \sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\omega_,' + \sin\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \omega_,'\sin^3\vartheta\right],$$

$$\Sigma_2 . N\cos\mu' = 0;$$

$$\Sigma_2 . N\cos\nu' = N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \cos\vartheta\sin\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 2N_0 r_,^2 \left[\cos\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \omega_,'\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \right.$$

$$\left. + \sin\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \cos\vartheta\sin^2\vartheta\sin\omega_,'\right];$$

ebenso findet man für die demselben Theile entsprechenden Componenten der Reibung die Werthe:

k.)

$$\Sigma_2 . f N\cos l' = 0$$

$$\Sigma_2 . f N\cos m' = -N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta . \sin\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + $$

$$+ \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')\cos\omega'$$

$$= -N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta \left[\cos\zeta\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega_,' + \omega_,'\sin\zeta\sin^2\vartheta\right];$$

In diese Ausdrücke sind noch die Werthe von ω' und $\sin\omega'$ in Function von ϑ einzuführen, und die Integration in Bezug auf diese Veränderliche auszuführen, um die gesuchten Werthe für $\Sigma_2 . N \cos\lambda'$, u. s. f. zu erhalten, welche dann zu $\Sigma_1 . N \cos\lambda'$ u. s. f. addirt, die Componenten des Druckes und der Reibung für unsern zweiten Fall darstellen werden. Ich werde jedoch auf diesen Fall nicht weiter eingehen, sondern für die Anwendung der nachfolgenden Gleichungen der Bewegung der Welle voraussetzen, daß die Oeffnung des Lagers nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$ sei, so daß $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird und $\alpha + \zeta$ in keinem Falle größer als $\frac{1}{2}\pi$ werden kann.

Bezeichnen wir nun noch die Componenten des physischen Druckes auf das obere cylindrische Lager der Welle und der Reibung in demselben, parallel und senkrecht zu der Richtung, nach welcher der obere Zapfen der Welle in dieses Lager eingedrückt wird, mit $\Sigma . N' \cos\lambda'$, $\Sigma . N' \cos\mu'$, $\Sigma . fN' \cos l'$, $\Sigma . fN' \cos m'$, bestimmen die genannte Richtung durch den Winkel ξ' mit der Achse der x, und setzen den Reibungscoeffizient für beide Lager gleich voraus, so haben wir für die fortschreitende Bewegung der Welle längs der Achsen x', y' und z' die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 = &-\Sigma . N \cos\lambda' - (\Sigma . N' \cos\lambda' + \Sigma . fN' \cos l') \cos(\xi - \xi') \\ &-(\Sigma . N' \cos\mu' + \Sigma . fN' \cos m') \sin(\xi - \xi') - P \cos\xi \\ 0 = &-\Sigma . fN \cos m' - (\Sigma . N' \cos\mu' + \Sigma . fN' \cos m') \cos(\xi - \xi') \\ &+(\Sigma . N' \cos\lambda' + \Sigma . fN' \cos l') \sin(\xi - \xi') + P \sin\xi \\ 0 = &-\Sigma . N \cos\nu' + Q \end{aligned}\right\} \quad (l.$$

und in diese sind außer den obigen Werthen (d) und (e) noch die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . N' \cos\lambda' &= N_0' r_2 (\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \\ \Sigma . N' \cos\mu' &= -\tfrac{1}{2} N_0' r_2 \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \\ \Sigma . fN' \cos l' &= \tfrac{1}{2} fN_0' r_2 \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \\ \Sigma . fN' \cos m' &= fN_0' r_2 (\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \end{aligned}\right\} \quad (m.$$

einzuführen, welche sich aus dem vorhergehenden Paragraphen mit der Beachtung ergeben, daß der dortige Winkel ζ nun durch ξ'' ersetzt ist und daher die Achse der negativen z' mit der Richtung des Druckes N_0', die Achse der x' mit der dazu senkrechten Richtung vertauscht werden

muß, daß aber hier die Richtung der N' im Sinne des Druckes genommen ist; diese Werthe setzen ferner voraus, daß $\alpha' + \xi''$ nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$ werden kann, daß r_2 der Halbmesser des cylindrischen Lagers, $2\alpha'$ die Oeffnung desselben, N_0' den geometrischen Druck in der durch den Winkel ξ' bestimmten Richtung und ξ'' den Winkel bezeichnet, welchen diese Richtung mit der die cylindrische Lagerfläche halbirenden vertikalen Ebene bildet und welcher mit dem Winkel ξ' durch die Beziehung:

$$\xi' = \varepsilon + \xi''$$

verbunden ist, wenn die genannte Ebene den Winkel ε mit der Ebene der xz bildet.

Diese drei Gleichungen genügen aber nicht zur Bestimmung der fünf Unbekannten, N_0, N_0', ξ, ξ', ζ; dazu müssen wir noch die Gleichungen für die drehende Bewegung um zwei zur Achse der Welle senkrechte Achsen, z. B. um die der x' und y', oder was hier dasselbe ist, die Gleichungen für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf diese Achsen zu Hülfe nehmen, und demnach zuvor die drehende Wirkung der Reibungen fN nach den Gleichungen (43) ableiten; denn die drehende Wirkung der Druckkräfte N ist für den Punkt C offenbar Null und für die Druckkräfte N' und die Reibungen fN' leuchtet ein, daß die Angriffspunkte der Componenten $\Sigma.N'\cos\lambda'$, $\Sigma.N'\cos\mu'$, $\Sigma.fN'\cos l'$ und $\Sigma.fN'\cos m'$ in der Mitte der Höhe des obern Lagers liegen müssen; ihre drehenden Wirkungen in Bezug auf die genannten Achsen sind daher, wenn h die Entfernung dieser Mitte von dem Mittelpunkte C, im Sinne der negativen z genommen, bedeutet

$$\text{n.)}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\Sigma.N'(y\cos\nu - z\cos\mu)\\ +\Sigma.fN'(y\cos n - z\cos m)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}h(\Sigma.N'\cos\lambda' + \Sigma.fN'\cos l')\sin(\xi-\xi')\\ -h(\Sigma.N'\cos\mu' + \Sigma.fN'\cos m')\cos(\xi-\xi'),\end{array}\right.\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\Sigma.N'(z\cos\lambda - x\cos\nu)\\ +\Sigma.fN'(z\cos l - x\cos n)\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}h(\Sigma.N'\cos\lambda' + \Sigma.fN'\cos l')\cos(\xi-\xi')\\ +h(\Sigma.N'\cos\mu' + \Sigma.fN'\cos m')\sin(\xi-\xi').\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Für die drehenden Wirkungen der Reibung am untern Zapfen haben wir dagegen, da alle $n = \frac{1}{2}\pi$ sind, die Aenderungsgesetze:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2.\Sigma.fNz\cos m'}{d\omega' d\vartheta} = -fNr_1^3\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\omega',\\[2ex] \dfrac{d^2.\Sigma.fNz\cos l'}{d\omega' d\vartheta} = fNr_1^3\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega',\end{array}\right.$$

aus welchen wir nach Einführung des Werthes von N durch Integration zwischen den Grenzen α und 0 für ϑ, und 2π und 0 für ω' folgende Werthe ziehen:

(o.

$$-\Sigma . f N z \cos m' = f N_0 r_1^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \cos\omega' (\cos\vartheta \cos\zeta + \sin\vartheta \sin\zeta \cos\omega')$$

$$= f N_0 r_1^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \pi \sin\zeta \sin^2\vartheta \cos\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{3} \pi f N_0 r_1^3 \sin\zeta \sin^3\alpha$$

$$\Sigma . f N z \cos l' = f N_0 r_1^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \sin\omega' (\cos\vartheta \cos\zeta + \sin\vartheta \sin\zeta \cos\omega')$$

$$= 0$$

Bezeichnen wir nun noch die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P von der Ebene der x′y′ im Sinne der negativen z oder aufwärts genommen mit p, womit die Momente dieser Kraft in Bezug auf die Achsen der x′ und y′ die Form erhalten:

$$P p \sin\xi \quad \text{und} \quad P p \cos\xi ,$$

so finden wir mit den obigen Werthen (m) für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf dieselben Achsen die Gleichungen:

$$0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'' + \tfrac{1}{2} f \sin 2\alpha' \sin 2\xi'') \sin(\xi - \xi') + \Big(\tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' - f(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \cos(\xi - \xi')\Big)\Big] + \tfrac{1}{3} \pi f N_0 r_1^3 \sin\zeta \sin^3\alpha + P p \sin\xi$$

$$0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'' + \tfrac{1}{2} f \sin 2\alpha' \sin 2\xi'') \cos(\xi - \xi') - \Big(\tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' - f(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \sin(\xi - \xi')\Big)\Big] + P p \cos\xi ,$$

oder in anderer Form:

$$\text{p.)}\left\{\begin{aligned} 0 = {} & N_0' r_2 h \Big[\left(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi''\right)\left(\sin(\xi-\xi') - f \cos(\xi-\xi')\right) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \left(\cos(\xi-\xi') + f \sin(\xi-\xi')\right)\Big] \\ & + \tfrac{1}{3} \pi f N_0 r_,^3 \sin\zeta \sin^3\alpha + P p \sin\xi \\ 0 = {} & N_0' r_2 h \Big[\left(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi''\right)\left(\cos(\xi-\xi') + f \sin(\xi-\xi')\right) \\ & \qquad - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \left(\sin(\xi-\xi') - f \cos(\xi-\xi')\right)\Big] \\ & + P p \cos\xi \,. \end{aligned}\right.$$

Werden dann weiter die Gleichungen (l) mit Einführung der Werthe (d), (e) und (m) unter eine ähnliche Form gebracht, so erhält man:

$$\text{q.)}\left\{\begin{aligned} 0 = {} & -\tfrac{1}{12} \pi N_0 r_,^2 \sin\zeta (8 - 9 \cos\alpha + \cos 3\alpha) - P \cos\xi \\ & - N_0' r_2 \Big[\left(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi''\right)\left(\cos(\xi-\xi') + f \sin(\xi-\xi')\right) \\ & \qquad - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \left(\sin(\xi-\xi') - f \cos(\xi-\xi')\right)\Big] \,, \\ 0 = {} & P \sin\xi - \tfrac{1}{2} \pi f N_0 r_,^2 \sin\zeta \left(\alpha - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha\right) \\ & + N_0' r_2 \Big[\left(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi''\right)\left(\sin(\xi-\xi') - f \cos(\xi-\xi')\right) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \left(\cos(\xi-\xi') + f \sin(\xi-\xi')\right)\Big] \,, \\ 0 = {} & Q - \tfrac{2}{3} \pi N_0 r_,^2 \cos\zeta (1 - \cos^3\alpha) \,, \end{aligned}\right.$$

und zieht aus der letzten sogleich

$$\text{r.)} \qquad N_0 r_,^2 \cos\zeta = Q \frac{3}{2\pi(1 - \cos^3\alpha)} \,.$$

Die erste dieser Gleichungen mit h multiplizirt und zu der zweiten der Gleichungen (p) addirt führt auf den Ausdruck:

$$0 = \tfrac{1}{12} \pi N_0 r_,^2 h \sin\zeta (8 - 9 \cos\alpha + \cos 3\alpha) + P(h - p) \cos\xi \,;$$

wird dagegen die zweite mit h multiplizirt und davon die erste der Gleichungen (p) abgezogen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = {} & -\tfrac{1}{6} \pi f N_0 r_,^2 \sin\zeta \left(3h\left(\alpha - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha\right) + 2 r_, \sin^3\alpha\right) \\ & + P(h - p) \sin\xi \,, \end{aligned}$$

und aus der Verbindung dieser beiden letzten Ergebnisse folgt der Werth:

$$\tang \xi = f \frac{3h(2\alpha - \sin 2\alpha) + 4 r_{,} \sin^3 \alpha}{-h(8 - 9\cos\alpha + \cos 3\alpha)}, \qquad (s$$

durch welchen bei gehöriger Rücksicht auf die Zeichen des Zählers und Nenners (Buch I., §. 8) der Winkel ξ bestimmt ist. Damit findet man weiter

$$N_0 r_{,}^2 \sin\zeta = -P \frac{12(h-p)\cos\xi}{\pi h(8 - 9\cos\alpha + \cos 3\alpha)} \qquad (t$$

und dieser Ausdruck mit (r) verbunden gibt den Winkel ζ durch die Function:

$$\tang \zeta = -\frac{P\cos\xi}{Q} \frac{8(h-p)(1-\cos^3\alpha)}{h(8 - 9\cos\alpha + \cos 3\alpha)}; \qquad (u.$$

und damit oder auch durch die Summe der Quadrate von (r) und (t) folgt noch der Werth für N_0, mit welchem nun drei unserer Unbekannten bestimmt sind. In Betreff des Winkels ζ ist aber noch zu bemerken, daß man aus (t) für $\sin\zeta$ immer einen Werth erhalten muß, welcher positiv und kleiner als 1 ist; im entgegengesetzten Falle, welcher z. B. eintritt, wenn α sehr klein ist, könnte der untere Zapfen nicht in seinem Lager im Gleichgewicht bleiben und es müßte noch ein neuer Widerstand gegen die Verschiebung desselben eingeführt werden.

Aus den beiden ersten der Gleichungen (p) zieht man nun ferner wie im vorhergehenden Paragraphen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
0 = N_0' r_2 h(1+f^2)\Big[&(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'')\cos(\xi - \xi') \\
&- \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \sin(\xi - \xi')\Big] \\
&- \tfrac{1}{3} f^2 N_0' r_{,}^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha + Pp(\cos\xi - f\sin\xi), \\
0 = N_0' r_2 h(1+f^2)\Big[&(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'')\sin(\xi - \xi') \\
&+ \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \cos(\xi - \xi')\Big] \\
&+ \tfrac{1}{3} f N_0 r_{,}^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha + Pp(\sin\xi + f\cos\xi),
\end{aligned}\right\} \qquad (v.$$

welche nach erfolgter Elimination von $N_0' r_2 h(1+f^2)$ dazu dienen werden, den Winkel ξ' zu berechnen, und damit auch den Werth der letzten unserer unbekannten Größen N_0' zu bestimmen.

Es erübrigt uns also zur Lösung unserer Aufgabe noch die Gleichung für die drehende Bewegung des Systems in Bezug auf die geometrische Achse der Welle aufzustellen, da diese das eigentliche Ziel unserer Untersuchung ist. Die drehende Wirkung der Reibung an dem obern Zapfen ist nach der vorhergehenden Aufgabe und unter der Voraussetzung $\alpha' + \xi'' < \frac{1}{2}\pi$

$$\Sigma . f N' r_2 = 2 f N_0' r_2^2 \sin\alpha' \cos\xi'' \; ;$$

ferner haben wir, wie leicht abzuleiten ist, für die drehende Wirkung der Reibung am untern Zapfen das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d . \Sigma . f N r}{d\omega' \, d\vartheta} = f N r_,^2 \sin\vartheta . r_, \sin\vartheta$$

$$= f N_0 r_,^3 \sin^2\vartheta \left(\cos\zeta \cos\vartheta + \sin\zeta \sin\vartheta \cos\omega'\right) ,$$

welches zwischen den Grenzen α und 0 für ϑ, 2π und 0 für ω' zu integriren ist, und so den Ausdruck gibt:

$$\Sigma . f N r = \tfrac{2}{3} f N_0 r_,^3 \pi \cos\zeta \sin^3\alpha$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (r)

$$\Sigma . f N r = f Q r_, \frac{\sin^3\alpha}{1 - \cos^3\alpha} ;$$

diese drehende Wirkung ist demnach unabhängig von der Kraft P, weil diese den geometrischen Druck in der Richtung der positiven α' zwar vermehrt, in der entgegengesetzten Richtung dagegen ebensoviel vermindert.

Die drehende Wirkung der Kraft P ist oben schon gleich PR vorausgesetzt; die Gleichung für die drehende Bewegung um die Achse der Welle wird demnach

$$\frac{Q}{g} k^2 \frac{d\varphi}{dt} = PR - 2 f N_0' r_2^2 \sin\alpha' \cos\xi'' - f Q r_, \frac{\sin^3\alpha}{1 - \cos^3\alpha} ,$$

wenn man das Massemoment der Welle und Alles dessen, was damit fest verbunden ist, durch $\frac{Q}{g} k^2$ ausdrückt.

Um einen besondern Fall näher zu untersuchen, wollen wir zuerst dem obern cylindrischen Lager eine solche Lage geben, daß der Winkel ξ''

Null wird, die Richtung des Druckes N_0' also den Bogen des Lagers halbirt und dann diesen Bogen gleich einem Halbkreis nehmen. Unter dieser Voraussetzung wird $\xi' = \varepsilon$, und die Gleichungen (v) nehmen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2}\pi N_0' r_2 h(1+f^2)\cos(\xi-\varepsilon) - \tfrac{1}{3} f^2 N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha \\ &\quad + Pp(\cos\xi - f\sin\xi) \\ 0 &= \tfrac{1}{2}\pi N_0' r_2 h(1+f^2)\sin(\xi-\varepsilon) + \tfrac{1}{3} f N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha \\ &\quad + Pp(\sin\xi + f\cos\xi) \end{aligned}\right\} \text{(x.}$$

und geben durch den Ausdruck:

$$\operatorname{tang}(\varepsilon-\xi) = \frac{Pp(\sin\xi + f\cos\xi) + \tfrac{1}{3} f N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha}{-Pp(\cos\xi - f\sin\xi) + \tfrac{1}{3} f^2 N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha} \text{ (y.}$$

den Winkel ε, durch welchen die Lage des obern Lagers bestimmt wird, wenn zuvor ξ nach Gleichung (s) berechnet worden ist.

Nehmen wir z. B. noch die Oeffnung 2α des untern Lagers $= \tfrac{1}{2}\pi$ an, und setzen $P = \tfrac{1}{5}Q$, $h = 8r$, $p = 4r_,$, $r_2 = \tfrac{1}{10}r$, und $f = 0{,}1$, so gibt die genannte Gleichung

$$\operatorname{tang}\xi = 0{,}1\,\frac{24(\tfrac{1}{2}\pi - 1) + \sqrt{2}}{-8(8-5\sqrt{2})}\,, \quad \xi = 169^0\,33',4\,;$$

der Werth (u) von $\operatorname{tang}\zeta$ wird damit

$$\operatorname{tang}\zeta = \frac{1}{5}\sin 79^0\,33',4\,\frac{4-\sqrt{2}}{8-5\sqrt{2}} = \operatorname{tang} 28^0\,42'$$

und zeigt, daß unter den gegebenen Verhältnissen der untere Zapfen nicht aus seinem Lager weichen kann. Aus der Gleichung (t) folgt der Werth:

$$\pi N_0 r_,^2 \sin\zeta = \frac{3}{5}\,Q \sin 79^0\,33',4\,\frac{8+5\sqrt{2}}{7} = 1{,}2704\,Q\,,$$

und die vorhergehende Gleichung (y) gibt mit diesem und den übrigen Zahlenwerthen den Ausdruck:

$$tang\,(\varepsilon-\xi)=\frac{\frac{4}{5}(cos\,79^0\,33',4-0,1\,sin\,79^0\,33',4)+\frac{0,127}{12}\sqrt{2}}{\frac{4}{5}(sin\,79^0\,33',4+0,1\,cos\,79^0\,33',4)+\frac{0,0127}{12}\sqrt{2}},$$

aus welchem

$$\varepsilon-\xi=5^0\,34',3 \quad , \quad \varepsilon=175^0\,7',7$$

folgt; die vertikale Ebene, welche das obere Lager halbirt, muß demnach mit der Richtung der Kraft P einen Winkel $\pi-\varepsilon=4^0\,52',3$ einschließen, welcher also kleiner als ρ ist, da man hat

$$f=0,1=tang\,\rho=tang\,5^0\,42,7\ .$$

Auf gleiche Weise findet man weiter aus einer der Gleichungen (x) den Werth

$$N_0'\,r_2=0,0794\,Q$$

und damit als Gleichung der drehenden Bewegung

$$\frac{Q}{g}k^2\frac{d\varphi}{dt}=PR-0,00159\,Q\,r_,-0,05469\,Q\,r_,$$
$$=PR-0,05628\,Q\,r_,=(0,2R-0,05628\,r_,)\,Q\ .$$

Soll daher die drehende Bewegung eine gleichförmige werden, so muß

$$R=0,2814\,r_,\ ,$$

sein, es darf also R nicht ganz dreimal so groß als der obere cylindrische Zapfen der Welle werden.

Zweiter Abschnitt.

Innere Zustände eines veränderlichen Systems.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze des innern Gleichgewichtes und der innern Bewegung.

§. 29.

Die äußern Zustände eines veränderlichen Systems, welche wir im vorhergehenden Abschnitte untersucht haben, lassen sich auch als diejenigen bezeichnen, welche ein außerhalb des Systems befindlicher unbeweglicher Beobachter an demselben wahrnehmen würde, der das System nur als ein zusammengehörendes Ganze in's Auge faßt, und dessen Lage ohne Rücksicht auf die in ihm vorgehenden Veränderungen mit andern unbeweglichen Punkten des Raumes vergleicht. Die innern Zustände dagegen werden sich der Wahrnehmung eines dem System selbst angehörigen Beobachters darbieten, welcher, an der äußern Bewegung desselben Theil nehmend, sein Augenmerk auf die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte des Systems richtet und deren Zustände beurtheilt. Diese Zustände werden offenbar für die einzelnen Punkte sehr verschieden sein, und man kann daher nur im Allgemeinen von einem innern örtlichen Zustande des ganzen Systems reden; man kann nur allgemein sagen, dasselbe ist innerlich im Gleichgewicht oder in Bewegung; insbesondere aber lassen sich Gesetze des innern Gleichgewichtes oder der innern Bewegung nur für bestimmte Punkte oder für die einzelnen unveränderlichen Theile des Systems aufstellen, je nachdem dasselbe auf die eine oder die andere Weise zusammengesetzt ist;

indem man dann diese Untersuchungen auf alle Punkte oder Theile des Systems ausdehnt und die Lage derselben für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt, gelangt man dazu, die dauernde oder die vorübergehende augenblickliche Gestalt des Systems darzustellen, welche nun den entsprechenden innern Zustand desselben in jenem Augenblicke oder auf die Dauer kennzeichnet.

In der allgemeinsten Auffassung haben wir es nach dem zuvor Gesagten bei der Untersuchung der innern Zustände veränderlicher Systeme immer mit den Bedingungen des relativen Gleichgewichtes und den Gesetzen der relativen Bewegung eines materiellen Punktes oder eines festen Systems zu thun; in den meisten Fällen der Anwendung wird jedoch das System im Zustande des äußern Gleichgewichtes vorausgesetzt, und unter dieser Voraussetzung werden dann inneres Gleichgewicht und innere Bewegung absolute Zustände des Systems. In beiden Fällen liefern uns daher die beiden vorhergehenden Bücher die Mittel zur Untersuchung dieser innern Zustände, wenn die Zusammensetzung des Systems gehörig berücksichtigt wird und die zwischen den einzelnen Punkten oder Theilen desselben thätigen Kräfte mit den äußern Kräften in die dort abgeleiteten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht und in die Aenderungsgesetze der Bewegung eingeführt werden. Dazu muß also wieder zuerst die Gesammtwirkung ermittelt werden, welche von diesen innern Kräften auf einen Punkt oder einen festen Theil des Systems ausgeübt wird, und in dieser Beziehung ergibt sich, wie schon in den einleitenden Betrachtungen bemerkt wurde, ein wesentlicher Unterschied, je nachdem das System nur aus einzelnen materiellen Punkten oder festen Theilen von bestimmter Anzahl besteht, oder für unsere Vorstellung ein stetig-zusammenhängendes System von materiellen Punkten ist, von denen man weder Zahl noch Größe kennt, namentlich wenn in diesem Falle auch die Function ihrer gegenseitigen Wirkung unbekannt oder nicht im Voraus gegeben ist. Denn während sich im ersten Falle jene Gesammtwirkung nach der im ersten Abschnitt des ersten und des zweiten Buches angegebenen Weise für irgend eine Lage der einzelnen materiellen Punkte oder festen Theile direct bestimmen läßt, kann dieselbe im zweiten Falle nur als unbekannte Kraft in die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines Punktes eingeführt werden, und diese nehmen dadurch, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, eine ganz andere Form und Behandlung an.

I. Nicht stetige veränderliche Systeme.

§. 30.

Betrachten wir zuerst ein System von n einzelnen materiellen Punkten M_1, M_2, M_3, M_i, u. s. f., deren Zahl begrenzt ist und deren Massen m_1, m_2, m_3, m_i, u. s. f. gegeben sind oder als bekannt vorausgesetzt werden.

Durch den Mittelpunkt der Masse dieses Systems denken wir uns drei unter sich rechtwinklige Achsen gezogen, welche vorerst noch zu beliebig gewählten festen Achsen parallel bleiben sollen, und deren Lage gegen die letztern am Ende der Zeit t durch die Coordinaten X, Y, Z ihres Anfangspunktes bestimmt sei. In Bezug auf diese beweglichen Achsen seien dann x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M_1, x_2, y_2, z_2 die des Punktes M_2, u. s. f., X_1, Y_1, Z_1 die zu jenen Achsen parallelen rechtwinkligen Componenten der Resultirenden R_1 aller auf den Punkt M_1 wirkenden äußern Kräfte, X_2, Y_2, Z_2 die entsprechenden Componenten für den Punkt M_2, u. s. f.; ferner seien wieder $J_{1,2}$ die zwischen den Punkten M_1 und M_2, $J_{1,3}$ die zwischen M_1 und M_3, $J_{2,3}$ die zwischen M_2 und M_3 thätigen innern Kräfte, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ die Richtungswinkel für $J_{1,2}$ in Bezug auf jene Coordinatenachsen, wenn diese Kraft an M_1 angreifend gedacht wird, $\alpha_{1,3}$, $\beta_{1,3}$, $\gamma_{1,3}$ die Winkel, welche die Richtung der an M_1 angreifenden Kraft $J_{1,3}$ bestimmen, $\alpha_{2,3}$, $\beta_{2,3}$, $\gamma_{2,3}$ die, welche die Richtung der an M_2 wirkenden $J_{2,3}$ mit den drei Achsen bildet, u. s. f. Man hat dann wie in §. 5 als Componenten der fördernden Gesammtwirkung aller an M_1 thätigen Kräfte

$$X_1 + J_{1,2}\cos\alpha_{1,2} + J_{1,3}\cos\alpha_{1,3} + J_{2,3}\cos\alpha_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n}\cos\alpha_{1,n}\,,$$

$$Y_1 + J_{1,2}\cos\beta_{1,2} + J_{1,3}\cos\beta_{1,3} + J_{2,3}\cos\beta_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n}\cos\beta_{1,n}\,,$$

$$Z_1 + J_{1,2}\cos\gamma_{1,2} + J_{1,3}\cos\gamma_{1,3} + J_{2,3}\cos\gamma_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n}\cos\gamma_{1,n}\,,$$

oder einfacher

$$X_1 + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i}\cos\alpha_1 \quad , \quad Y + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i}\cos\beta_1 \quad , \quad Z + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i}\cos\gamma_1 \,.$$

für den Punkt M_2 werden diese Componenten

$$X_2 - J_{1,2}\cos\alpha_{1,2} + J_{2,3}\cos\alpha_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n}\cos\alpha_{2,n}\,,$$

$$Y_2 - J_{1,2}\cos\beta_{1,2} + J_{2,3}\cos\beta_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n}\cos\beta_{2,n}\,,$$

$$Z_2 - J_{1,2}\cos\gamma_{1,2} + J_{2,3}\cos\gamma_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n}\cos\gamma_{2,n}\,,$$

indem man dann diese Untersuchungen auf alle Punkte oder Theile des Systems ausdehnt und die Lage derselben für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt, gelangt man dazu, die dauernde oder die vorübergehende augenblickliche Gestalt des Systems darzustellen, welche nun den entsprechenden innern Zustand desselben in jenem Augenblicke oder auf die Dauer kennzeichnet.

In der allgemeinsten Auffassung haben wir es nach dem zuvor Gesagten bei der Untersuchung der innern Zustände veränderlicher Systeme immer mit den Bedingungen des relativen Gleichgewichtes und den Gesetzen der relativen Bewegung eines materiellen Punktes oder eines festen Systems zu thun; in den meisten Fällen der Anwendung wird jedoch das System im Zustande des äußern Gleichgewichtes vorausgesetzt, und unter dieser Voraussetzung werden dann inneres Gleichgewicht und innere Bewegung absolute Zustände des Systems. In beiden Fällen liefern uns daher die beiden vorhergehenden Bücher die Mittel zur Untersuchung dieser innern Zustände, wenn die Zusammensetzung des Systems gehörig berücksichtigt wird und die zwischen den einzelnen Punkten oder Theilen desselben thätigen Kräfte mit den äußern Kräften in die dort abgeleiteten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht und in die Aenderungsgesetze der Bewegung eingeführt werden. Dazu muß also wieder zuerst die Gesammtwirkung ermittelt werden, welche von diesen innern Kräften auf einen Punkt oder einen festen Theil des Systems ausgeübt wird, und in dieser Beziehung ergibt sich, wie schon in den einleitenden Betrachtungen bemerkt wurde, ein wesentlicher Unterschied, je nachdem das System nur aus einzelnen materiellen Punkten oder festen Theilen von bestimmter Anzahl besteht, oder für unsere Vorstellung ein stetig-zusammenhängendes System von materiellen Punkten ist, von denen man weder Zahl noch Größe kennt, namentlich wenn in diesem Falle auch die Function ihrer gegenseitigen Wirkung unbekannt oder nicht im Voraus gegeben ist. Denn während sich im ersten Falle jene Gesammtwirkung nach der im ersten Abschnitt des ersten und des zweiten Buches angegebenen Weise für irgend eine Lage der einzelnen materiellen Punkte oder festen Theile direct bestimmen läßt, kann dieselbe im zweiten Falle nur als unbekannte Kraft in die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines Punktes eingeführt werden, und diese nehmen dadurch, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, eine ganz andere Form und Behandlung an.

oder nach §. 10

$$-\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . X \;,\quad -\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Y \;,\quad -\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z \;,$$

und man hat demnach als fördernde Componenten der relativen oder innern Gesammtwirkung aller auf den Punkt M_i wirkenden Kräfte die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l}
X_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\alpha_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . X \\
Y_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\beta_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Y \\
Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\gamma_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z
\end{array}\right\} ,$$

Soll sich nun das System im Zustande des innern Gleichgewichtes befinden, so muß jeder einzelne Punkt im Gleichgewicht sein, es müssen daher für einen jeden die drei Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
X_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . X - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\alpha_{i,k} = 0 \\
Y_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Y - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\beta_{i,k} = 0 \\
Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\gamma_{i,k} = 0
\end{array}\right\} \quad (45.$$

erfüllt werden. Wir erhalten also im Ganzen $3n$ Bedingungen, durch welche man die $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, u. s. f. sämmtlicher Punkte, oder die Gestalt des Systems für das innere Gleichgewicht wird bestimmen können.

Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so findet innere Bewegung statt und es werden dann $3n$ Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l}
m_i\frac{d^2x_i}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . X - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\alpha_{i,k} \\
m_i\frac{d^2y_i}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Y - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\beta_{i,k} \\
m_i\frac{d^2z_i}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i}\cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k}\cos\gamma_{i,k}
\end{array}\right\} \quad (46.$$

dazu dienen, die Bewegung eines jeden der n Punkte zu bestimmen, wenn die anfängliche Lage und Geschwindigkeit für einen jeden gegeben ist. Diese Gleichungen ergeben sich direct aus denen für die absolute Bewegung des Punktes M_i, wenn man denselben für sich allein, aber der Gesammtwirkung sämmtlicher äußeren und inneren Kräfte unterworfen betrachtet, deren Componenten durch die Werthe (45) gegeben sind; denn die Coordinaten jenes Punktes am Ende der Zeit t in Bezug auf die festen Achsen sind offenbar

$$X + x_i \quad , \quad Y + y_i \quad , \quad Z + z_i \; ;$$

man hat daher für die absolute Bewegung desselben die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d^2 X}{dt^2} + m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \, , \\ m_i \frac{d^2 Y}{dt^2} + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \, , \\ m_i \frac{d^2 Z}{dt^2} + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} \, , \end{aligned} \right.$$

aus welchen die Gleichungen (48) hervorgehen, wenn man für die Aenderungsgesetze $\frac{d^2 X}{dt^2}$, $\frac{d^2 Y}{dt^2}$, $\frac{d^2 Z}{dt^2}$ die aus den Gleichungen (12) (§. 10) für die äußere fortschreitende Bewegung sich ergebenden Werthe einführt.

In manchen Fällen dürfte es zweckmäßiger sein, nicht gerade den Mittelpunkt der Masse, sondern einen andern Punkt des Systems, z. B. den Punkt M_1, als Anfangspunkt zu wählen. Bezeichnen wir für diesen Fall die Masse des genannten Punktes mit m_1, seine Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen mit x_1, y_1, z_1, so hat man für die Bewegung dieses Punktes in Bezug auf dieselben Achsen die Gleichungen:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = X_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \alpha_{1,k} \, , \quad m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = Y_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \beta_{1,k} \, ,$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = Z_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \gamma_{1,k} \; ;$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes M_i im System sind dann $x_1 + x_i'$, $y_1 + y_i'$, $z_1 + z_i'$ und die Gleichungen seiner innern Bewegung in Bezug auf parallel bleibende Achsen sind daher

$$\left.\begin{array}{l}
m_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} = X_i - m_i \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} = Y_i - m_i \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} = Z_i - m_i \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k}
\end{array}\right\} (48.$$

und nehmen mit den vorhergehenden Werthen von $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ die Form an:

$$\left.\begin{array}{l}
m_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{m_1}\left(X_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos\alpha_{1,k}\right) \\
\qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{m_1}\left(Y_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos\beta_{1,k}\right) \\
\qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{m_1}\left(Z_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos\gamma_{1,k}\right) \\
\qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k}
\end{array}\right\} (48.$$

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht müssen offenbar dieselben bleiben wie früher, und da man für diesen Fall die Bedingungen $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 Z}{dt^2}$ hat, so wird man leicht von den Gleichungen (47) auf die Gleichungen (45) zurückschließen.

In dem besondern Falle, wo die äußern Kräfte X, Y, Z den Massen der einzelnen Punkte proportional, und daher entweder constant oder blos Functionen der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunktes der Masse sind, so daß man hat

$$X_i = m_i f_x(X, Y, Z), \quad Y_i = m_i f_y(X, Y, Z), \quad Z_i = m_i f_z(X, Y, Z),$$

nehmen die Componenten der äußern Resultirenden die Form an:

$$\Sigma X = f_x(X, Y, Z)\Sigma . m, \quad \Sigma Y = f_y(X, Y, Z)\Sigma . m, \quad \Sigma Z = f_z(Y, X, Z)\Sigma . m;$$

in diesem Falle werden daher die Gleichungen für die innere Bewegung unabhängig von den äußern Kräften, und man findet einfach

$$49.)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} \end{cases}$$

als Gleichungen der innern Bewegung in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse, während die Gleichungen (48) für die innere Bewegung in Bezug auf den Punkt M_1 die Form annehmen

$$50.)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i'}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} - \dfrac{m_i}{m_1} \sum\limits_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \alpha_{1,k} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i'}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} - \dfrac{m_i}{m_1} \sum\limits_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \beta_{1,k} \\ m_i \dfrac{d^2 z_i'}{dt^2} = \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} - \dfrac{m_i}{m_1} \sum\limits_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \gamma_{1,k}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht die Bedingungen für das innere Gleichgewicht des Systems, wenn man darin $\frac{d^2 x_i'}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_i'}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_i'}{dt^2}$ gleich Null setzt.

§. 31.

Beziehen wir nun die Bewegung der einzelnen Punkte auf ein Coordinatensystem der ξ, η, ζ, dessen Anfangspunkt wieder der Mittelpunkt der Masse des Systems ist, welches aber neben der fortschreitenden Bewegung dieses Punktes zugleich eine bekannte drehende Bewegung besitzt, so daß die Winkel ω, ϑ und ψ, durch welche die Richtung dieser sich drehenden Achsen in Bezug auf die festen bestimmt wird, in Function der Zeit gegeben sind.

Für diesen Fall zerlegen wir die an dem Punkte M_i thätige äußere Resultirende R_i nach den sich drehenden Achsen der ξ, η, ζ und bezeichnen die entsprechenden Componenten derselben mit Ξ_i, H_i, Z_i; ebenso zerlegen wir jede der innern Kräfte J nach diesen Achsen und bezeichnen deren Componenten durch $J \cos \lambda$, $J \cos \mu$, $J \cos \nu$, so daß

man nun für die entsprechenden Componenten der Gesammtwirkung aller am M_i thätigen Kräfte die Ausdrücke erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&\Xi_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos \lambda_{i,k} \\
&H_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos \mu_{i,k} \\
&Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos \nu_{i,k}
\end{aligned}\right\} .$$

Wir haben dann auch für die zu denselben Achsen der ξ, η und ζ parallelen Componenten der aus den fördernden Kräften

$$m_i \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . X, \quad m_i \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Y, \quad m_i \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z$$

sich ergebenden Resultirenden, welche die äußere fortschreitende Bewegung des Punktes M_i zu erzeugen vermag, die Werthe: $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . \Xi$, $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . H$, $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z$, und es bleibt uns noch zufolge der in §§. 118 und 119 des ersten Buches abgeleiteten Gesetze die Kraft zu bestimmen, welche als Ursache für die Aenderung der drehenden Bewegung eines Punktes von der Masse m_i betrachtet werden kann, der am Ende der Zeit t dieselbe Lage hat, wie der Punkt M_i, dessen Coordinaten also ξ_i, η_i, ζ_i sind und der von diesem Augenblicke an mit den Achsen der ξ, η, und ζ fest verbunden bleibt. Bezeichnen wir die zu diesen Achsen parallelen Componenten dieser Kraft mit $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$ und $\mathfrak{Z}_i$, so haben wir zur Bestimmung derselben nach §. 189 des zweiten Buches oder nach §. 14 im vorhergehenden Abschnitte, wenn daselbst ξ, η und ζ als unveränderlich genommen und die Werthe von u_ξ, u_η und u_ζ in die Gleichungen (g) eingeführt werden, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{X}_i &= m_i \left(\zeta_i \frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta_i \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{p}(\mathfrak{q}\eta_i + \mathfrak{r}\zeta_i) - (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2)\xi_i \right) \\
\mathfrak{Y}_i &= m_i \left(\xi_i \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \xi_i \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{q}(\mathfrak{p}\xi_i + \mathfrak{r}\zeta_i) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2)\eta_i \right) \\
\mathfrak{Z}_i &= m_i \left(\eta_i \frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi_i \frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{r}(\mathfrak{p}\xi_i + \mathfrak{q}\eta_i) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)\zeta_i \right)
\end{aligned}\right\} , \text{(a.}$$

worin $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, wie an den genannten Orten die Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ des Coordinatensystems der ξ, η, ζ vorstellen, und durch die aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= -\frac{d\omega}{dt}\cos\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{q} &= \frac{d\omega}{dt}\sin\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\cos\psi \\ \mathfrak{r} &= \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right.$$

sich ergebenden Werthe in Function von t zu ersetzen sind.

Endlich seien $\mathfrak{V}_i$ die innere Geschwindigkeit des Punktes M_i in Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ, und $\mathfrak{u}_i = \frac{d\xi_i}{dt}$, $\mathfrak{v}_i = \frac{d\eta_i}{dt}$, $\mathfrak{w}_i = \frac{d\zeta_i}{dt}$ ihre zu diesen Achsen parallelen Componenten, also

$$\frac{\mathfrak{u}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos l_i \quad , \quad \frac{\mathfrak{v}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos m_i \quad , \quad \frac{\mathfrak{w}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos n_i$$

die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit jenen Achsen einschließt; ferner seien p, q, r die Winkel, welche die augenblickliche Drehungsachse mit denselben Achsen bildet und für welche man hat

$$\cos p = \frac{\mathfrak{p}}{\varphi} \quad , \quad \cos q = \frac{\mathfrak{q}}{\varphi} \quad , \quad \cos r = \frac{\mathfrak{r}}{\varphi},$$

l_i, m_i, n_i die Winkel einer Geraden, welche auf den beiden eben bestimmten Richtungen senkrecht steht, so daß sich die Beziehungen (Einl. §. 21):

$$\cos l_i = -\frac{\cos m_i \cos r - \cos n_i \cos q}{\sin \delta_i}, \quad \cos m_i = -\frac{\cos n_i \cos p - \cos l_i \cos r}{\sin \delta_i},$$

$$\cos n_i = -\frac{\cos l_i \cos q - \cos m_i \cos p}{\sin \delta_i},$$

oder

$$\cos l_i = -\frac{\mathfrak{v}_i \mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i \mathfrak{q}}{\mathfrak{V}_i}, \quad \cos m_i = -\frac{\mathfrak{w}_i \mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i \mathfrak{r}}{\mathfrak{V}_i},$$

$$\cos n_i = -\frac{\mathfrak{u}_i \mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i \mathfrak{p}}{\mathfrak{V}_i}$$

ergeben, worin die Wurzelgröße

$$\sqrt{(\mathfrak{u}_i \mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i \mathfrak{p})^2 + (\mathfrak{w}_i \mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i \mathfrak{r})^2 + (\mathfrak{v}_i \mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i \mathfrak{q})^2}\,,$$

durch $\mathfrak{W}_i$ ersetzt ist. $F_i = 2 m_i \mathfrak{W}_i$ sei dann die Kraft, welche dem Punkte M_i in der Einheit der Zeit die Beschleunigung $2\mathfrak{W}_i$ zu ertheilen vermag, die von der Winkelgeschwindigkeit φ des Coordinatensystems und der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_i$ abhängt und für die man auch noch die Beziehung hat

$$2\mathfrak{W}_i = 2\varphi\, \mathfrak{V}_i \sin \delta_i\,,$$

wenn δ_i den Winkel bezeichnet, welchen die augenblickliche Drehungs-Achse mit der Richtung der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_i$ bildet; die Componenten $F_i \cos l_i$, $F_i \cos m_i$, $F_i \cos n_i$ dieser Kraft werden demnach die Werthe annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
F_i \cos l_i &= -2 m_i (\mathfrak{v}_i \mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i \mathfrak{q}) = -2 m_i \left(\mathfrak{r}\frac{d\eta_i}{dt} - \mathfrak{q}\frac{d\zeta_i}{dt}\right)\\
F_i \cos m_i &= -2 m_i (\mathfrak{w}_i \mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i \mathfrak{r}) = -2 m_i \left(\mathfrak{p}\frac{d\zeta_i}{dt} - \mathfrak{r}\frac{d\xi_i}{dt}\right)\\
F_i \cos n_i &= -2 m_i (\mathfrak{u}_i \mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i \mathfrak{p}) = -2 m_i \left(\mathfrak{q}\frac{d\xi_i}{dt} - \mathfrak{p}\frac{d\eta_i}{dt}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (b.$$

Mit diesen Bezeichnungen und Werthen erhalten wir für die relative oder innere Bewegung des Punktes M_i die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \Xi_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . \Xi - \mathfrak{X}_i + F_i \cos l_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \lambda_{i,k}\,,\\
m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= H_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . H - \mathfrak{Y}_i + F_i \cos m_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \mu_{i,k}\\
m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z - \mathfrak{Z}_i + F_i \cos n_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \nu_{i,k}
\end{aligned}\right\}, \quad (51.$$

und so immer drei von derselben Form für jeden andern Punkt, also wieder 3n Gleichungen zur Bestimmung der 3n Coordinaten ξ, η, ζ aller Punkte des Systems.

Soll dieses System in Bezug auf die sich drehenden Achsen im ruhenden Gleichgewichte bleiben, so muß $\mathfrak{P}_i$ also auch $\mathfrak{W}_i$ und F_i für alle Punkte Null sein, und man hat demnach wieder 3n Bedingungen von der Form:

$$52.)\begin{cases} \Xi_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . \Xi - \mathfrak{X}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \lambda_{i,k} = 0 , \\ H_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . H - \mathfrak{Y}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \mu_{i,k} = 0 , \\ Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z - \mathfrak{Z}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \nu_{i,k} = 0 , \end{cases}$$

durch welche die Gleichgewichtslage jedes einzelnen Punktes und damit die entsprechende Gestalt des Systems bestimmt werden kann.

Befindet sich das System im Zustande des äußern Gleichgewichtes oder besitzt nur eine geradlinige gleichförmige fortschreitende Bewegung, so kommen die vorhergehenden Gleichungen (48) und (49) für die innere Bewegung des Punktes M_i auf die einfacheren

$$53.)\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} \end{cases}$$

zurück, da in den erstern die Kräfte $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$ und $\Sigma . Z$, in den letztern die Kräfte $\Sigma . \Xi$, $\Sigma . H$, $\Sigma . Z$, $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ und F_i Null werden und die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i mit x_i, y_i, z_i, die Componenten Ξ_i, H_i, Z_i mit X_i, Y_i, Z_i gleichbedeutend sind. Ebenso werden die Bedingungen für das innere Gleichgewicht des Punktes M_i einfach folgende:

$$\left.\begin{aligned}
X_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} &= 0 \\
Y_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} &= 0 \\
Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (54.$$

und wenn diese Bedingungen und jene Gleichungen wieder für jeden einzelnen Punkt des Systems hergestellt sind, so werden dadurch einerseits die Gestalt, in welcher das System im Gleichgewicht bleiben kann, und anderseits die Gesetze der innern Bewegung desselben bestimmt werden können.

In dem besondern Falle endlich, wo das System eine drehende Bewegung um eine feste Achse besitzt, wird man diese als eine der Coordinaten-Achsen der ξ, η oder ζ, z. B. als die der ζ nehmen, und die Ebenen der $\xi\eta$ und $\xi\zeta$ durch einen bestimmten Punkt derselben legen; man hat dann einen festen Anfangspunkt und die förderndern Wirkungen $\Sigma.\Xi$, $\Sigma.H$, $\Sigma.Z$, welche auch die Widerstände N gegen die fortschreitende und drehende Bewegung der Achse in sich begreifen, werden Null; ferner werden die Componenten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ der Winkelgeschwindigkeit φ des Systems Null, und $\mathfrak{r}$ gleich φ selbst, also auch $\cos \mathrm{p} = \cos \mathrm{q} = 0$, $\cos \mathrm{r} = 1$. Man findet damit für die Kräfte $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ die Werthe:

$$\mathfrak{X}_i = -m_i \eta_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \xi_i \varphi^2 \quad , \quad \mathfrak{Y}_i = m_i \xi_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \eta_i \varphi^2 \quad , \quad \mathfrak{Z}_i = 0 \; ;$$

für die Componente $\mathfrak{W}_i$ ergibt sich

$$\mathfrak{W}_i = \varphi \sqrt{\mathfrak{u}_i^2 + \mathfrak{v}_i^2} = \varphi\, \mathfrak{V}_i \sin \mathfrak{n}_i \; ;$$

die Cosinus der Richtungswinkel der Kraft $F_i = 2\, m_i\, \mathfrak{W}_i$ werden aber

$$\cos \mathrm{l}_i = -\varphi \frac{\mathfrak{v}_i}{\mathfrak{W}_i} \quad , \quad \cos \mathrm{m}_i = +\varphi \frac{\mathfrak{u}_i}{\mathfrak{W}_i} \quad , \quad \cos \mathrm{n}_i = 0$$

und ihre Componenten sind demnach

$$F_i \cos \mathrm{l}_i = -2 m_i \varphi \frac{d\eta_i}{dt} \quad , \quad F_i \cos \mathrm{m}_i = +2 m_i \varphi \frac{d\xi_i}{dt} \quad , \quad F_i \cos \mathrm{n}_i = 0 \; .$$

Mit diesen Werthen nehmen die Gleichungen (51) für die innere Bewegung des Punktes M_i die Form an:

$$55.)\quad \begin{cases} m_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \Xi_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \\ \qquad + m_i \eta_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \xi_i \varphi^2 - 2 m_i \varphi \frac{d\eta_i}{dt} , \\ m_i \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} = H_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \\ \qquad + m_i \xi_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \eta_i \varphi^2 + 2 m_i \varphi \frac{d\xi_i}{dt} , \\ m_i \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} , \end{cases}$$

und werden noch etwas einfacher für den Fall, wo die drehende Bewegung in eine gleichförmige übergeht, $\frac{d\varphi}{dt}$ also Null wird. Für das ruhende Gleichgewicht zieht man daraus unter der letztern Voraussetzung und mit der Beachtung, daß für diesen Zustand auch $\frac{d\xi_i}{dt}$ und $\frac{d\eta_i}{dt}$ Null werden müssen, die Bedingungen:

$$56.)\quad \begin{cases} \Xi_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - m_i \xi_i \varphi^2 = 0 , \\ H_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - m_i \eta_i \varphi^2 = 0 , \\ Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = 0 , \end{cases}$$

welche auf alle Punkte des Systems ausgedehnt dessen Gestalt in dem betreffenden Falle bestimmen werden.

§. 32.

In gleicher Weise wollen wir nun die innern Zustände eines veränderlichen Systems, welches aus einer gegebenen Anzahl von festen Körpern besteht, deren Größe, Gestalt und Masse als bekannt vorausgesetzt wird und welche auf irgend eine Weise auf einander wirken oder zwischen denen beliebige Kräfte thätig sind, durch Gleichungen ausdrücken.

Diese Körper wollen wir, um sie zu benennen, mit A_1, A_2, A_3, u. s. f. bezeichnen; die Masse des Körpers A_i sei M_i; die Coordinaten ihres Mittelpunktes in Bezug auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems ist, x_i, y_i, z_i, in Bezug auf ein Coordinatensystem, das denselben Anfangspunkt hat, aber eine gegebene drehende Bewegung besitzt, ξ_i, η_i, ζ_i; X_i, Y_i, Z_i seien die zu den parallel fortschreitenden Achsen parallelen Componenten der äußern fördernden Wirkung, welche von materiellen Punkten außerhalb des Systems auf den Körper A_i ausgeübt wird, Ξ_i, H_i, Z_i die Componenten derselben fördernden Wirkung nach den sich drehenden Achsen; ferner seien $J_{1,i}$, $J_{2,i}$, $J_{3,i}$, u. s. f. die fördernden Wirkungen, welche durch die zwischen den Massen M_1 und M_i, M_2 und M_i, M_3 und M_i, u. s. f. thätigen Kräfte in der Masse M_i hervorgerufen werden, $\pi-\alpha_{1,i}$, $\pi-\beta_{1,i}$, $\pi-\gamma_{1,i}$ seien die Richtungswinkel der Kraft $J_{1,i}$ gegen die parallel fortschreitenden Achsen, $\pi-\alpha_{2,i}$, $\pi-\beta_{2,i}$, $\pi-\gamma_{2,i}$ die der Kraft $J_{2,i}$, u. s. f., und allgemein $\pi-\alpha_{h,i}$, $\pi-\beta_{h,i}$, $\pi-\gamma_{h,i}$ die der fördernden Kraft $J_{h,i}$, wenn $h < i$; dagegen seien $\alpha_{i,i+1}$, $\beta_{i,i+1}$, $\gamma_{i,i+1}$ diese Richtungswinkel für die fördernde Kraft $J_{i,i+1}$, welche von der Masse M_{i+1} in M_i hervorgerufen wird, und so allgemein $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$ diese Winkel für die Richtung der fördernden Wirkung $J_{i,k}$, für welche $k > i$ ist. Die Winkel, welche dieselben Kräfte J mit den sich drehenden Achsen bilden, wollen wir in ähnlicher Weise durch die Buchstaben λ, μ, ν bezeichnen, so daß $\pi-\lambda_{h,i}$, $\pi-\mu_{h,i}$, $\pi-\nu_{h,i}$ diese Winkel für die an M_i thätige Kraft $J_{h,i}$, und $\lambda_{i,k}$, $\mu_{i,k}$, $\nu_{i,k}$ die entsprechenden für die an M_i angreifende fördernde Kraft $J_{i,k}$ vorstellen. Mit diesen Bezeichnungen erhalten die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Körpers A_i oder vielmehr des Mittelpunktes seiner Masse in Bezug auf die parallel bleibenden Coordinaten-Achsen und den Mittelpunkt der Masse des Systems, dessen Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen immer wieder X, Y, Z seien, dieselbe Form, wie die Gleichungen (46), und man hat demnach

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i - M_i \frac{d^2 X}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i - M_i \frac{d^2 Y}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i - M_i \frac{d^2 Z}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\gamma_{i,k}
\end{aligned}\right\} \quad (57.$$

Bezeichnen wir dann weiter die Winkel, welche die sich drehenden Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ im Mittelpunkt der Masse des Systems mit den festen Achsen am Ende der Zeit t einschließen mit $\widehat{\omega}$, $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\psi}$, die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit dieses Coordinatensystems mit $\widehat{\varphi}$, und die zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten derselben mit $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$, so daß wir wieder die Beziehungen:

$$\text{a.)}\quad \left\{\begin{aligned} \widehat{\mathfrak{p}} &= -\frac{d\widehat{\omega}}{dt}\cos\widehat{\psi}\sin\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\vartheta}}{dt}\sin\widehat{\psi}\,, \\ \widehat{\mathfrak{q}} &= \frac{d\widehat{\omega}}{dt}\sin\widehat{\psi}\sin\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\vartheta}}{dt}\cos\widehat{\psi}\,, \\ \widehat{\mathfrak{r}} &= \frac{d\widehat{\omega}}{dt}\cos\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\psi}}{dt}\,, \end{aligned}\right.$$

und für die Winkel $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r}$, welche die augenblickliche Drehungsachse des Coordinatensystems der ξ, η, ζ mit diesen Achsen selbst bildet, die Gleichungen:

$$\cos\widehat{p} = \frac{\widehat{\mathfrak{p}}}{\widehat{\varphi}}\,, \qquad \cos\widehat{q} = \frac{\widehat{\mathfrak{q}}}{\widehat{\varphi}}\,, \qquad \cos\widehat{r} = \frac{\widehat{\mathfrak{r}}}{\widehat{\varphi}}\,,$$

erhalten, und lassen wir die Bezeichnungen $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$, $\mathfrak{V}_i$, $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{W}_i$, F_i, l_i, m_i, n_i des vorhergehenden Paragraphen für die dem Mittelpunkte der Masse M_i zukommenden entsprechenden Größen bestehen, so werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung dieses Mittelpunktes in Bezug auf die sich drehenden Achsen übereinstimmend mit den Gleichungen (51) die Form annehmen:

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} M_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \Xi_i - \frac{M_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.\Xi - \mathfrak{X}_i + F_i\cos l_i - \sum_{h=1}^{h=i-1}.\,J_{h,i}\cos\lambda_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n}.\,J_{i,k}\cos\lambda_{i,k} \\ M_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= H_i - \frac{M_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.H - \mathfrak{Y}_i + F_i\cos m_i - \sum_{h=1}^{h=i-1}.\,J_{h,i}\cos\mu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n}.\,J_{i,k}\cos\mu_{i,k} \\ M_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= Z_i - \frac{m_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.Z - \mathfrak{Z}_i + F_i\cos n_i - \sum_{h=1}^{h=i-1}.\,J_{h,i}\cos\nu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n}.\,J_{i,k}\cos\nu_{i,k}\,. \end{aligned}\right.$$

Wenn der Mittelpunkt der Masse des Körpers A_1 als Anfang der parallel beweglichen Achsen genommen werden soll, so ergeben sich für die innere fortschreitende Bewegung des Körpers A_i in Bezug auf diese Achsen Gleichungen von derselben Form, wie die Gleichungen (47) und (48) und diese und die Gleichungen (57) kommen wieder auf Gleichungen von der Form der Gleichungen (49) und (50) zurück, wenn die äußern fördernden Kräfte X_i, Y_i, Z_i nur Functionen von der Masse M_i des betreffenden Körpers A_i und von den Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Mittelpunktes der Masse des ganzen Systems werden.

Diese letztere Annahme begreift natürlich auch als besondern Fall diese in sich, daß die äußern fördernden Kräfte X_i, Y_i, Z_i Null sind und das System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, oder eine gleichförmige geradlinige fortschreitende Bewegung besitzt. Im Allgemeinen tritt aber dieser äußere Zustand ein, nicht nur, wenn die Kräfte X_i, Y_i, Z_i einzeln Null sind, sondern auch, wenn die Resultirenden $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$, $\Sigma . Z$ fortwährend Null sind und bleiben; in diesem Falle sind es dann die den Gleichungen (53) entsprechenden, welche die innere fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i ausdrücken.

§. 33.

Um ebenso die Gesetze der innern drehenden Bewegung des gegebenen Systems beziehungsweise eines jeden der festen Körper, aus denen es besteht, in Gleichungen darzustellen, denken wir uns durch den Mittelpunkt der Masse des Körpers A_i die drei Hauptachsen gezogen, und die Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dieses Körpers in Bezug auf diese Achsen bestimmt. Seien dann ferner $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ die um dieselben Achsen drehenden Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ_i desselben um seine augenblickliche Drehungsachse, $M_i^{(\xi)}$, $M_i^{(\eta)}$, $M_i^{(\zeta)}$ die in gleicher Weise drehenden Wirkungen, welche von außerhalb des Systems liegenden Punkten oder Körpern auf den Körper A_i ausgeübt werden, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\xi)}$, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\eta)}$, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\zeta)}$ die denselben Achsen entsprechenden Componenten der von dem Körper A_1 auf A_i ausgeübten innern drehenden Wirkung, also $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)}$ die von der gegenseitigen Wirkung der Körper A_h und A_i herrührenden und an A_i angreifenden Momente, u. s. f. Endlich werden wir die Winkel, welche die Lage der natürlichen Drehungsachsen der Masse M_i in Bezug auf die festen oder in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen feststellen, mit ϑ_i, ω_i, ψ_i

bezeichnen, und haben dann mit Beachtung der in §. 221 des zweiten Buches ausgesprochenen Bemerkung, daß die relative drehende Bewegung eines festen Systems in Bezug auf parallel fortschreitende Achsen dieselbe ist, wie in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, einerseits die Gleichungen:

$$59.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_i \dfrac{d\mathfrak{p}_i}{dt} = (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\, \mathfrak{q}_i \mathfrak{r}_i + M_i^{(\xi)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)} \\ \mathfrak{B}_i \dfrac{d\mathfrak{q}_i}{dt} = (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\, \mathfrak{p}_i \mathfrak{r}_i + M_i^{(\eta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)} \\ \mathfrak{C}_i \dfrac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\, \mathfrak{p}_i \mathfrak{q}_i + M_i^{(\zeta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)} \end{cases}$$

als Aenderungsgesetze der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$, und diese sind dann anderseits wieder mit den Beziehungen:

$$60.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_i = -\dfrac{d\omega_i}{dt} \cos\psi_i \sin\vartheta_i + \dfrac{d\vartheta_i}{dt} \sin\psi_i \\ \mathfrak{q}_i = \dfrac{d\omega_i}{dt} \sin\psi_i \sin\vartheta_i + \dfrac{d\vartheta_i}{dt} \cos\psi_i \\ \mathfrak{r}_i = \dfrac{d\omega_i}{dt} \cos\vartheta_i + \dfrac{d\psi_i}{dt} \end{cases}$$

zu verbinden, um die Lage jener natürlichen Drehungsachsen gegen die parallel beweglichen Coordinatenachsen zu bestimmen.

Soll dagegen die drehende Bewegung der einzelnen Körper gegen ein sich drehendes Coordinatensystem untersucht werden, so werden wir die Winkel, durch welche die Lage der Achsen dieses letztern gegen feste oder parallel fortschreitende Achsen in Function der Zeit ausgedrückt wird, durch $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\omega}$, $\widehat{\psi}$ bezeichnen, und mit ϑ_i', ω_i', ψ_i' die Winkel, welche die Lage der natürlichen Drehungsachsen des Körpers A_i gegen die sich drehenden Achsen der ξ, η, ζ in Function der Zeit bestimmen. Wir haben dann zwischen den ebengenannten Winkeln und den vorhergehenden, welche die Lage derselben Hauptachsen in Bezug auf parallel fortschreitende oder feste Coordinatenachsen feststellen, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta_1' &= \cos\vartheta_1\cos\widehat{\vartheta} + \sin\vartheta_1\sin\widehat{\vartheta}\cos(\omega_1 - \widehat{\omega})\\ \cos\vartheta_1 &= \cos\vartheta_1'\cos\widehat{\vartheta} - \sin\vartheta_1'\sin\widehat{\vartheta}\cos(\omega_1' + \widehat{\psi})\\ \cos\widehat{\vartheta} &= \cos\vartheta_1'\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1'\sin\vartheta_1\cos(\psi_1 - \psi_1')\end{aligned}\right\}, (61.$$

welche sich einfach und unmittelbar aus dem sphärischen Dreieck $ZZ_{,}Z'$, Fig. 10, ergeben, wenn man beachtet, daß die drei Seiten $ZZ_{,}$, ZZ' und $Z_{,}Z'$ desselben entsprechende Bogen der Winkel $\widehat{\vartheta}$, ϑ_1 und ϑ_1' sind, und daß man für die drei Winkel Z, $Z_{,}$ und Z' dieses Dreiecks die Werthe hat:

$$Z = \omega_1 - \widehat{\omega} \quad , \quad Z_{,} = \pi - (\omega_1' + \widehat{\psi}) \quad , \quad Z' = \psi_1 - \psi_1' \; .$$

In den meisten Fällen dürfte dann, wie schon am Ende des zweiten Buches ausgesprochen wurde, der einfachste Gang der Untersuchung dieser relativen Bewegung darin bestehen, daß man dieselbe zuerst unmittelbar in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem feststellt, also die Winkel ϑ_1, ω_1 und ψ_1 in Function der Zeit t ausdrückt, und dann mittels der vorhergehenden Beziehungen und den bekannten Functionen $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\omega}$ und $\widehat{\psi}$ die Winkel ϑ_1', ω_1' und ψ_1' in Bezug auf die sich drehenden Coordinaten-Achsen ableitet. Diese Ableitung bietet nicht die geringste Schwierigkeit, da man durch die erste der Gleichungen (61) direct den Winkel ϑ_1', und mit diesem aus der zweiten und dritten die Winkel ω_1' und ψ_1' berechnen kann.

Um indessen nichts zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir hier auch die Gleichungen für die unmittelbare Untersuchung der relativen drehenden Bewegung in Bezug auf ein selbst in drehender Bewegung begriffenes Coordinatensystem ableiten.

Dazu seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Masse M_1 in Bezug auf die drei Hauptachsen im Mittelpunkte dieser Masse, ξ', η', ζ' seine Coordinaten in Bezug auf drei Achsen, welche den Anfangspunkt mit den vorhergehenden gemeinschaftlich haben und zu den sich drehenden Achsen parallel bleiben, und x, y, z seine Coordinaten in Bezug auf das mit demselben Mittelpunkte der Masse M_1 parallel zu festen Achsen fortschreitende Coordinatensystem. Ferner seien a, b, c die Cosinus der Winkel $\widehat{\mathfrak{x}x}$, $\widehat{\mathfrak{x}y}$, $\widehat{\mathfrak{x}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{x}$

mit den Achsen der x, y, z bildet, a′, b′, c′ die der Winkel $\widehat{\mathfrak{y}x}$, $\widehat{\mathfrak{y}y}$, $\widehat{\mathfrak{y}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{y}$, a″, b″, c″ die der Winkel $\widehat{\mathfrak{z}x}$, $\widehat{\mathfrak{z}y}$, $\widehat{\mathfrak{z}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{z}$ mit denselben Achsen einschließt. Ebenso seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mit den sich drehenden Achsen der ξ', η', ζ' bilden, und $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{a}'$, $\hat{b}'$, $\hat{c}'$, $\hat{a}''$, $\hat{b}''$, $\hat{c}''$ die Cosinus der Winkel zwischen den letztern Achsen der ξ', η', ζ' und den parallel fortschreitenden der x, y, z.

Man hat dann zwischen je neun dieser Cosinus, die sich auf dieselben Achsensysteme beziehen, die bekannten sechs Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, daß diese Achsensysteme rechtwinklige sind (Einl. §. 23). Zwischen den neun Coordinaten des Punktes m in Bezug auf die drei verschiedenen Coordinatensysteme bestehen aber auch die Beziehungen:

$$\text{a.)}\quad \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = a\mathfrak{x} + a'\mathfrak{y} + a''\mathfrak{z} \\ y = b\mathfrak{x} + b'\mathfrak{y} + b''\mathfrak{z} \\ z = c\mathfrak{x} + c'\mathfrak{y} + c''\mathfrak{z} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x = \hat{a}\xi' + \hat{a}'\eta' + \hat{a}''\zeta' \\ y = \hat{b}\xi' + \hat{b}'\eta' + \hat{b}''\zeta' \\ z = \hat{c}\xi' + \hat{c}'\eta' + \hat{c}''\zeta' \end{array}\right\}, \\[2ex] \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} \xi' = \mathfrak{a}\mathfrak{x} + \mathfrak{a}'\mathfrak{y} + \mathfrak{a}''\mathfrak{z} \\ \eta' = \mathfrak{b}\mathfrak{x} + \mathfrak{b}'\mathfrak{y} + \mathfrak{b}''\mathfrak{z} \\ \zeta' = \mathfrak{c}\mathfrak{x} + \mathfrak{c}'\mathfrak{y} + \mathfrak{c}''\mathfrak{z} \end{array}\right\}; \end{array}\right.$$

durch Elimination von ξ', η' und ζ' aus den drei letzten und den drei mittleren ergeben sich für x, y und z die neuen Werthe:

$$\text{b.)}\quad \left\{\begin{array}{l} x = (\hat{a}\mathfrak{a} + \hat{a}'\mathfrak{b} + \hat{a}''\mathfrak{c})\mathfrak{x} + (\hat{a}\mathfrak{a}' + \hat{a}'\mathfrak{b}' + \hat{a}''\mathfrak{c}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\hat{a}\mathfrak{a}'' + \hat{a}'\mathfrak{b}'' + \hat{a}''\mathfrak{c}'')\mathfrak{z} \\[1ex] y = (\hat{b}\mathfrak{a} + \hat{b}'\mathfrak{b} + \hat{b}''\mathfrak{c})\mathfrak{x} + (\hat{b}\mathfrak{a}' + \hat{b}'\mathfrak{b}' + \hat{b}''\mathfrak{c}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\hat{b}\mathfrak{a}'' + \hat{b}'\mathfrak{b}'' + \hat{b}''\mathfrak{c}'')\mathfrak{z} \\[1ex] z = (\hat{c}\mathfrak{a} + \hat{c}'\mathfrak{b} + \hat{c}''\mathfrak{c})\mathfrak{x} + (\hat{c}\mathfrak{a}' + \hat{c}'\mathfrak{b}' + \hat{c}''\mathfrak{c}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\hat{c}\mathfrak{a}'' + \hat{c}'\mathfrak{b}'' + \hat{c}''\mathfrak{c}'')\mathfrak{z} \end{array}\right.$$

und die Vergleichung der Coeffizienten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in diesen Gleichungen mit denen derselben Coordinaten in den drei ersten der Gleichungen (a) führt zu folgenden neun Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} a = \widehat{a}\,\mathfrak{a} + \widehat{a'}\,\mathfrak{b} + \widehat{a''}\,\mathfrak{c} \\ a' = \widehat{a}\,\mathfrak{a}' + \widehat{a'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{a''}\,\mathfrak{c}' \\ a'' = \widehat{a}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{a'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{a''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} b = \widehat{b}\,\mathfrak{a} + \widehat{b'}\,\mathfrak{b} + \widehat{b''}\,\mathfrak{c} \\ b' = \widehat{b}\,\mathfrak{a}' + \widehat{b'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{b''}\,\mathfrak{c}' \\ b'' = \widehat{b}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{b'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{b''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\}, \\ \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} c = \widehat{c}\,\mathfrak{a} + \widehat{c'}\,\mathfrak{b} + \widehat{c''}\,\mathfrak{c} \\ c' = \widehat{c}\,\mathfrak{a}' + \widehat{c'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{c''}\,\mathfrak{c}' \\ c'' = \widehat{c}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{c'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{c''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\} \end{array}\right\} (c.$$

Sind dann wie im vorhergehenden Paragraphen $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ des Coordinatensystems der ξ, η, ζ, parallel zu diesen Achsen genommen, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit φ_i des Körpers A_i, um seine natürlichen Drehungsachsen für einen Beobachter, welcher dem parallel bleibenden Coordinatensystem angehört, $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{r}_i'$ die Componenten der relativen Winkelgeschwindigkeit φ_i' desselben Körpers um dieselben Achsen für einen Beobachter, welcher an der Bewegung der Achsen der ξ, η, ζ Theil nimmt, so erhalten wir für diese neun Componenten aus je drei der Gleichungen (a) durch dieselbe Behandlung, welche mit den Gleichungen (a) in §. 184 des zweiten Buches vorgenommen wurde, und mit der Beachtung, daß zu diesem Zwecke in den drei mittlern der vorhergehenden Gleichungen (a) die Coordinaten ξ', η', ζ' als unveränderlich zu betrachten sind, d. h. als einem Punkte angehörig, welcher mit den Achsen der ξ, η, ζ fest verbunden bleibt, wie in §. 185 des vorhergehenden Buches die analytischen Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_i = a''\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{dc'}{dt} = -\left(a'\dfrac{da''}{dt} + b'\dfrac{db''}{dt} + c'\dfrac{dc''}{dt}\right) \\ \mathfrak{q}_i = a\dfrac{da''}{dt} + b\dfrac{db''}{dt} + c\dfrac{dc''}{dt} = -\left(a''\dfrac{da}{dt} + b''\dfrac{db}{dt} + c''\dfrac{dc}{dt}\right) \\ \mathfrak{r}_i = a'\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{dc}{dt} = -\left(a\dfrac{da'}{dt} + b\dfrac{db'}{dt} + c\dfrac{dc'}{dt}\right) \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{aligned}
\widehat{p} &= \widehat{a}''\frac{d\widehat{a}'}{dt} + \widehat{b}''\frac{d\widehat{b}'}{dt} + \widehat{c}''\frac{d\widehat{c}'}{dt} = -\left(\widehat{a}'\frac{d\widehat{a}''}{dt} + \widehat{b}'\frac{d\widehat{b}''}{dt} + \widehat{c}'\frac{d\widehat{c}''}{dt}\right),\\
\widehat{q} &= \widehat{a}\frac{d\widehat{a}''}{dt} + \widehat{b}\frac{d\widehat{b}''}{dt} + \widehat{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt} = -\left(\widehat{a}''\frac{d\widehat{a}}{dt} + \widehat{b}''\frac{d\widehat{b}}{dt} + \widehat{c}''\frac{d\widehat{c}}{dt}\right),\\
\widehat{r} &= \widehat{a}'\frac{d\widehat{a}}{dt} + \widehat{b}'\frac{d\widehat{b}}{dt} + \widehat{c}'\frac{d\widehat{c}}{dt} = -\left(\widehat{a}\frac{d\widehat{a}'}{dt} + \widehat{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt} + \widehat{c}\frac{d\widehat{c}'}{dt}\right),
\end{aligned}\right.$$

und

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{a}''\frac{d\mathfrak{a}'}{dt} + \mathfrak{b}''\frac{d\mathfrak{b}'}{dt} + \mathfrak{c}''\frac{d\mathfrak{c}'}{dt} = -\left(\mathfrak{a}'\frac{d\mathfrak{a}''}{dt} + \mathfrak{b}'\frac{d\mathfrak{b}''}{dt} + \mathfrak{c}'\frac{d\mathfrak{c}''}{dt}\right),\\
\mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}''}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{b}''}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\mathfrak{c}''}{dt} = -\left(\mathfrak{a}''\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{b}''\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \mathfrak{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}\right),\\
\mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{a}'\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \mathfrak{c}'\frac{d\mathfrak{c}}{dt} = -\left(\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}'}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{b}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\mathfrak{c}'}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (c) geben aber auch die Aenderungsgesetze in Bezug auf t:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \widehat{a}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{a}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{a}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{a}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{a}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{a}''}{dt}\\
\frac{db}{dt} &= \widehat{b}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{b}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{b}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{b}''}{dt}\\
\frac{dc}{dt} &= \widehat{c}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{c}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{c}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{c}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt}
\end{aligned}\right.$$

u. s. f.

und wenn diese in die obigen Werthe von $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{r}_1$ eingeführt werden, so erhält man für die letzte dieser Componenten den Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{r}_1 = {} & (\widehat{a}\mathfrak{a}' + \widehat{a}'\mathfrak{b}' + \widehat{a}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{a}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{a}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{a}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{a}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{a}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{a}''}{dt}\right)\\
& + (\widehat{b}\mathfrak{a}' + \widehat{b}'\mathfrak{b}' + \widehat{b}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{b}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{b}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{b}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{b}''}{dt}\right)\\
& + (\widehat{c}\mathfrak{a}' + \widehat{c}'\mathfrak{b}' + \widehat{c}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{c}\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \widehat{c}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt} + \widehat{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt} + \mathfrak{a}\frac{d\widehat{c}}{dt} + \mathfrak{b}\frac{d\widehat{c}'}{dt} + \mathfrak{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Führt man dann die Multiplikation aus, so ergibt sich mit Beachtung der Bedingungsgleichungen:

$$\widehat{\mathfrak{a}}^2 + \widehat{\mathfrak{b}}^2 + \widehat{\mathfrak{c}}^2 = 1 \quad , \quad \widehat{\mathfrak{a}}\,\widehat{\mathfrak{a}'} + \widehat{\mathfrak{b}}\,\widehat{\mathfrak{b}'} + \widehat{\mathfrak{c}}\,\widehat{\mathfrak{c}'} = 0$$

u. s. f. u. s. f.

$$\widehat{\mathfrak{a}}\,\frac{d\widehat{\mathfrak{a}}}{dt} + \widehat{\mathfrak{b}}\,\frac{d\widehat{\mathfrak{b}}}{dt} + \widehat{\mathfrak{c}}\,\frac{d\widehat{\mathfrak{c}}}{dt} = 0$$

u. s. f.

und mit Berücksichtigung der vorhergehenden Werthe der Componenten $\widehat{\mathfrak{p}}, \widehat{\mathfrak{q}}, \widehat{\mathfrak{r}}$, der einfache Ausdruck:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i' + (\mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b})\widehat{\mathfrak{r}} + (\mathfrak{a}'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{c}')\widehat{\mathfrak{q}} + (\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c})\widehat{\mathfrak{p}} .$$

Man hat ferner nach §. 21 der Einleitung für die Cosinus $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ der Winkel, welche eine Gerade, die auf zwei andern unter sich senkrechten Geraden senkrecht steht, mit drei unter sich rechtwinkligen Achsen bildet, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Cosinus der Winkel zwischen den letztern Geraden und denselben Achsen vorstellen, die Beziehungen:

$$\mathfrak{a}'' = \mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c} \quad , \quad \mathfrak{b}'' = \mathfrak{a}'\mathfrak{c} - \mathfrak{a}\mathfrak{c}' \quad , \quad \mathfrak{c}'' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} ,$$

und mit diesen findet man durch den vorhergehenden Werth von $\mathfrak{r}_i$, sowie durch ähnliche Umwandlungen in Betreff der für die Componenten $\mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{q}_i$ sich ergebenden Werthe die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{r}_i &= \mathfrak{r}_i' + \mathfrak{a}''\widehat{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}''\widehat{\mathfrak{q}} + \mathfrak{c}''\widehat{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{q}_i &= \mathfrak{q}_i' + \mathfrak{a}'\widehat{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}'\widehat{\mathfrak{q}} + \mathfrak{c}'\widehat{\mathfrak{r}} \\ \mathfrak{p}_i &= \mathfrak{p}_i' + \mathfrak{a}\widehat{\mathfrak{p}} + \mathfrak{b}\widehat{\mathfrak{q}} + \mathfrak{c}\widehat{\mathfrak{r}} \end{aligned}\right\} \quad (d$$

Die drei letzten Glieder dieser Gleichungen sind aber auch die zu den Achsen der $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$, und $\mathfrak{x}$ parallelen Componenten der Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ des Coordinatensystems der ξ', η', ζ'; bezeichnet man diese demnach mit $\widehat{\varphi}_z$, $\widehat{\varphi}_y$, $\widehat{\varphi}_x$, so hat man die einfachen Beziehungen:

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i' + \widehat{\varphi}_x \quad , \quad \mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_i' + \widehat{\varphi}_y \quad , \quad \mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_i' + \widehat{\varphi}_z \quad (62.$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers A_i für einen unbeweglichen Beobachter die Resultirende ist aus der Winkelgeschwindigkeit der sich drehenden Achsen und der relativen Winkelgeschwindigkeit, welche ein Beobachter wahrnimmt, der gegen die letztern Achsen eine unveränderliche Lage behält. Die Lage der augenblicklichen Drehungsachse des Körpers gegen die drei natürlichen Drehungsachsen desselben bestimmt sich wieder durch die Verhältnisse der Componenten der Winkelgeschwindigkeit zu dieser selbst; man hat daher für die Winkel λ, μ, ν, welche die Drehungsachse für die absolute drehende Bewegung mit den genannten Achsen macht, die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{\mathfrak{p}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{p}_i' + \widehat{\varphi_x}}{\varphi_i}, \qquad \cos\mu = \frac{\mathfrak{q}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{q}_i' + \widehat{\varphi_y}}{\varphi_i},$$

$$\cos\nu = \frac{\mathfrak{r}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{r}_i' + \widehat{\varphi_z}}{\varphi_i},$$

worin

$$\varphi_i = \sqrt{\mathfrak{p}_i^2 + \mathfrak{q}_i^2 + \mathfrak{r}_i^2}$$

$$= \sqrt{(\mathfrak{p}_i' + \widehat{\varphi_x})^2 + (\mathfrak{q}_i' + \widehat{\varphi_y})^2 + (\mathfrak{r}_i' + \widehat{\varphi_z})^2}$$

ist, während die Winkel λ', μ', ν', welche die augenblickliche Drehungs-Achse für die relative Winkelgeschwindigkeit mit denselben Achsen bildet, durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda' = \frac{\mathfrak{p}_i'}{\varphi_i'}, \qquad \cos\mu' = \frac{\mathfrak{q}_i'}{\varphi_i'}, \qquad \cos\nu' = \frac{\mathfrak{r}_i'}{\varphi_i'}$$

bestimmt werden, wozu man hat

$$\varphi_i' = \sqrt{\mathfrak{p}_i'^2 + \mathfrak{q}_i'^2 + \mathfrak{r}_i'^2}.$$

Die Lage dieser letztern Drehungsachse ist also in dem Körper A_i eine andere als die erstere, oder der dem beweglichen Coordinatensystem angehörende Beobachter sieht den Körper in jedem Augenblicke um eine andere Achse drehen, als der unbewegliche Beobachter, und wenn man die absolute Winkelgeschwindigkeit φ_i des Körpers in Längeneinheiten auf diejenige Hälfte der entsprechenden augenblicklichen Drehungsachse aufträgt, von welcher aus gesehen, die drehende Bewegung eine positive

ist, die Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ dagegen in gleichen Längeneinheiten aber in entgegengesetztem Sinne genommen auf eine durch den Mittelpunkt der Masse M_i gelegte und zu der augenblicklichen Drehungsachse des Coordinatensystems der ξ, η, ζ parallele Gerade, so wird die Diagonale des über diesen Winkelgeschwindigkeiten construirten Parallelogrammes die Größe der augenblicklichen relativen Winkelgeschwindigkeit und die Lage der entsprechenden Drehungsachse im Körper A_i bestimmen.

In §. 189 des zweiten Buches wurden die zu den natürlichen Drehungsachsen parallelen fördernden Componenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, sowie die um diese Achsen drehenden Wirkungen einer Kraft $\mathfrak{P}$ abgeleitet, welche einem materiellen Punkte von der Masse m, der einem sich drehenden festen Körper angehört, wenn er frei und für sich allein wäre, dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie in Verbindung mit dem festen Körper erhält. Die drehenden Componenten dieser Kraft nehmen in unserm jetzigen Falle die Bezeichnung und Form an:

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{x} = \mathfrak{Z}'\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}'\mathfrak{z} \quad , \quad \mathfrak{M}_\mathfrak{y} = \mathfrak{X}'\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}'\mathfrak{x} \quad , \quad \mathfrak{M}_\mathfrak{z} = \mathfrak{Y}'\mathfrak{x} - \mathfrak{X}'\mathfrak{y}$$

und durch die Componenten der absoluten Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt erhalten sie Werthe von derselben Form, wie die Werthe (131) in dem genannten Paragraphen, in welchen man nur die ξ, η, ζ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ersetzen darf. Man hat daher

$$\mathfrak{M}_\mathfrak{x} = m(\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} - m\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} - m\mathfrak{x}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}$$
$$- m(\mathfrak{q}_i\mathfrak{z} - \mathfrak{r}_i\mathfrak{y})(\mathfrak{p}_i\mathfrak{x} + \mathfrak{q}_i\mathfrak{y} + \mathfrak{r}_i\mathfrak{z})$$

u. s. f.

und ersieht daraus, daß diese Componenten blos von der Winkelgeschwindigkeit des Körpers und den Coordinaten des betreffenden Punktes in Bezug auf dessen Hauptachsen im Schwerpunkte abhängen, daß also auch die Gesammtwirkungen der um dieselben Achsen drehenden Componenten für alle Punkte des Körpers A_i dieselbe Form behalten, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \Sigma.\mathfrak{M}_\mathfrak{x} &= \mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} - \mathfrak{q}_i\mathfrak{r}_i(\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i) \\ \Sigma.\mathfrak{M}_\mathfrak{y} &= \mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} - \mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i(\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i) \\ \Sigma.\mathfrak{M}_\mathfrak{z} &= \mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} - \mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i(\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i) \end{aligned}\right\}$$

Wenn man daher in diese Werthe die einfachen Beziehungen (62) zwischen den Componenten der absoluten Winkelgeschwindigkeit und den Componenten der relativen Winkelgeschwindigkeit einführt, so werden dieselben unserer Untersuchung entsprechend die Form annehmen:

$$\text{e.)}\left\{\begin{aligned}
&\Sigma.\mathfrak{M}_x = \mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i'}{dt} - \mathfrak{q}_i'\mathfrak{r}_i'(\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i) + \mathfrak{A}_i\frac{d\varphi_x}{dt} - \varphi_y\varphi_z(\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i),\\
&\Sigma.\mathfrak{M}_y = \mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i'}{dt} - \mathfrak{p}_i'\mathfrak{r}_i'(\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i) + \mathfrak{B}_i\frac{d\varphi_y}{dt} - \varphi_x\varphi_z(\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i),\\
&\Sigma.\mathfrak{M}_z = \mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i'}{dt} - \mathfrak{p}_i'\mathfrak{q}_i'(\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i) + \mathfrak{C}_i\frac{d\varphi_z}{dt} - \varphi_x\varphi_y(\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i).
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man endlich, daß die beiden letzten Glieder in jeder Zeile eine um die entsprechende Achse drehende Kraft vorstellen, welche dem Körper A_i in Bezug auf diese Achse dieselbe Winkelbeschleunigung ertheilen kann, welche das Coordinatensystem der ξ', η', ζ' in demselben Augenblick um eine parallele Achse besitzt und bezeichnet diese drehenden Kräfte den Achsen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ entsprechend, mit $\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_x$, $\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_y$, $\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_z$, so daß man hat

$$\text{f.)}\left\{\begin{aligned}
&\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_x = \mathfrak{A}_i\frac{d\overset{\frown}{\varphi}_x}{dt} - (\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i)\overset{\frown}{\varphi}_y\overset{\frown}{\varphi}_z\\
&\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_y = \mathfrak{B}_i\frac{d\overset{\frown}{\varphi}_y}{dt} - (\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i)\overset{\frown}{\varphi}_x\overset{\frown}{\varphi}_z\\
&\overset{\frown}{\mathfrak{M}}_z = \mathfrak{C}_i\frac{d\overset{\frown}{\varphi}_z}{dt} - (\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i)\overset{\frown}{\varphi}_x\overset{\frown}{\varphi}_y
\end{aligned}\right.$$

dann die drehenden Wirkungen der äußern Kräfte um dieselben Achsen mit $M_i^{(x)}$, $M_i^{(y)}$, $M_i^{(z)}$, die einer der innern Kräfte mit $\mathfrak{J}_{i,h}^{(x)}$, $\mathfrak{J}_{i,h}^{(y)}$, $\mathfrak{J}_{i,h}^{(z)}$, so werden nun die Gleichungen für die innere drehende Bewegung des Körpers A_i in Bezug auf die in drehender Bewegung begriffenen Achsen der ξ, η, ζ folgende Form erhalten:

$$\text{63.)}\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i'}{dt} = (\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i)\mathfrak{q}_i'\mathfrak{r}_i' + M_i^{(x)} - \overset{\frown}{\mathfrak{M}}_x + \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{J}_{i,h}^{(x)},\\
&\mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i'}{dt} = (\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i)\mathfrak{p}_i'\mathfrak{r}_i' + M_i^{(y)} - \overset{\frown}{\mathfrak{M}}_y + \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{J}_{i,h}^{(y)},\\
&\mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i'}{dt} = (\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i)\mathfrak{p}_i'\mathfrak{q}_i' + M_i^{(z)} - \overset{\frown}{\mathfrak{M}}_z + \sum_{h=1}^{h=n}\mathfrak{J}_{i,h}^{(z)}.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen sind die innern Kräfte $\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{I}_{i,h}^{(x)}$ u. s. f. nur Functionen der Winkel ϑ_i', ω_i' und ψ_i', durch welche die Lage der Hauptachsen des Körpers A_i gegen die beweglichen Achsen der ξ, η, ζ bestimmt werden, die Kräfte $M_i^{(x)}$, u. s. f. sind Functionen dieser letztern Winkel und der in Function der Zeit t gegebenen Winkel $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\omega}$, $\widehat{\psi}$, und die Kräfte $\widehat{\mathfrak{M}}_x$, u. s. f. sind Functionen der ebenfalls als bekannt vorausgesetzten Winkelgeschwindigkeiten $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$ und der Winkel ϑ_i', ω_i', ψ_i'. Es sind demnach nur diese letztern und die innern Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{r}_i'$ als unbekannte und zu bestimmende Functionen der Zeit in den Gleichungen (63) enthalten und man hat daher diese Gleichungen wieder mit den Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_i' &= -\frac{d\omega_i'}{dt}\cos\psi_i'\sin\vartheta_i' + \frac{d\vartheta_i'}{dt}\sin\psi_i' \\ \mathfrak{q}_i' &= \frac{d\omega_i'}{dt}\sin\psi_i'\sin\vartheta_i' + \frac{d\vartheta_i'}{dt}\cos\psi_i' \\ \mathfrak{r}_i' &= \frac{d\omega_i'}{dt}\cos\vartheta_i' + \frac{d\psi_i'}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (64.$$

zu verbinden, um aus denselben jene Functionen von t, oder die Gesetze der innern drehenden Bewegung abzuleiten.

§. 34.

Was nun noch die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines aus festen Körpern gebildeten veränderlichen Systems betrifft, so wird man dieselben für jeden einzelnen dieser Körper leicht aus dem Vorhergehenden folgern können.

In Bezug auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen geben die Gleichungen (57) für das Gleichgewicht des Mittelpunktes der Masse M_i oder für das Gleichgewicht des Körpers A_i längs dieser Achsen, indem man darin die Aenderungsgesetze $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ Null setzt, die Bedingungen:

$$65.)\quad\begin{cases} X_i - M_i \dfrac{d^2 X}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} = 0 \,, \\ Y_i - M_i \dfrac{d^2 Y}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} = 0 \,, \\ Z_i - M_i \dfrac{d^2 Z}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = 0 \,. \end{cases}$$

Die Bedingungen für das ruhende Gleichgewicht desselben Körpers um seine Hauptachsen folgen aus den Gleichungen (59), wenn darin die Componenten der Winkelgeschwindigkeit gleich Null genommen werden und sind einfach

$$66.)\quad\begin{cases} M_i^{(\xi)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)} = 0 \,, \qquad M_i^{(\eta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)} = 0 \,, \\ M_i^{(\zeta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)} = 0 \,; \end{cases}$$

man kann aber die innern und äußern drehenden Wirkungen nun ebensowohl auf die Coordinaten-Achsen selbst beziehen, und diesen Bedingungen die Form geben:

$$67.)\quad\begin{cases} M_i^{(x)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(x)} = 0 \,, \qquad M_i^{(y)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(y)} = 0 \,, \\ M_i^{(z)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \; \mathfrak{J}_{h,i}^{(z)} = 0 \,, \end{cases}$$

indem man die an dem Körper A_i angreifenden und um die Achsen der x, y und z drehenden Wirkungen der äußern Kräfte mit $M_i^{(x)}$, $M_i^{(y)}$, $M_i^{(z)}$, mit $\mathfrak{J}_{h,i}^{(x)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(y)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(z)}$ dagegen die um dieselben Achsen drehenden Kräfte bezeichnet, welche in Folge der Wechselwirkung zwischen dem Körper A_h und Körper A_i an dem letztern thätig sind.

Ebenso wird man die Bedingungen für das Gleichgewicht in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem aus den Gleichungen (58) und (63) ableiten; die erstern geben übereinstimmend mit den Gleichungen (52) für das ruhende relative Gleichgewicht des Mittelpunktes der Masse M_i die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\Xi_i - \mathfrak{X}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \lambda_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . \Xi = 0 \\
\left(H_i - \mathfrak{Y}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \mu_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . H = 0 \\
\left(Z_i - \mathfrak{Z}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \nu_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . Z = 0
\end{array}\right\}, \quad (88.$$

und aus den letztern zieht man für das ruhende relative Gleichgewicht des Körpers A_i um seine Hauptachsen die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c}
M_i^{(x)} - \widehat{\mathfrak{M}}_x + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(x)} = 0, \quad M_i^{(y)} - \widehat{\mathfrak{M}}_y + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(y)} = 0, \\
M_i^{(z)} - \widehat{\mathfrak{M}}_z + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(z)} = 0
\end{array}\right\},$$

welche mit den Werthen (f) von $\widehat{\mathfrak{M}}_x$, $\widehat{\mathfrak{M}}_y$, $\widehat{\mathfrak{M}}_z$ auch die Form erhalten

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_x}}{dt} = (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\, \widehat{\varphi_y}\, \widehat{\varphi_z} + M_i^{(x)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(x)} \\
\mathfrak{B}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_y}}{dt} = (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\, \widehat{\varphi_x}\, \widehat{\varphi_z} + M_i^{(y)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(y)} \\
\mathfrak{C}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_z}}{dt} = (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\, \widehat{\varphi_x}\, \widehat{\varphi_y} + M_i^{(z)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(z)}
\end{array}\right\} \quad (89.$$

und nun aussprechen, was ohnehin einleuchtet, daß der Körper A_i durch die Gesammtwirkung der innern und äußern drehenden Kräfte eine absolute drehende Bewegung um seine Hauptachsen im Schwerpunkt erhalten muß, welche der des Coordinatensystems der ξ, η, ζ in Bezug auf parallelen Achsen gleich und mit ihr in gleichem Sinne gerichtet ist.

Wir erhalten demnach für alle n Körper des Systems in jedem Falle 6 n Bedingungsgleichungen, welche zur Bestimmung der Gleichgewichtslage ihrer Mittelpunkte und ihrer natürlichen Drehungsachsen nothwendig sind und genügen.

In besondern Fällen nehmen sowohl die vorhergehenden Bedingungsgleichungen für das innere Gleichgewicht, als die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gesetze für die innere Bewegung eines aus festen

Körpern bestehenden Systems wieder einfachere Formen an, welche sich aus ihnen nach den in §. 31 für ein aus materiellen Punkten bestehendes System und für solche besondere Fälle dargestellten Gleichungen leicht ableiten lassen.

II. Stetige veränderliche Systeme.

§. 35.

Kommen wir nun zu der Untersuchung des innern Zustandes eines Systems, welches für unsere Vorstellung und insbesondere für die mathematische Behandlung als ein System von stetig aufeinanderfolgenden materiellen Punkten zu betrachten ist, in welchem aber die zwischen den einzelnen Punkten thätigen Kräfte unbekannt sind, von welchem nur die anfängliche äußere Form und das für den Anfang der Bewegung geltende Gesetz, durch welches die geometrische Dichte in einem durch seine Coordinaten bestimmten Punkte ausgedrückt wird, gegeben ist.

Bei einem solchen System haben wir eine zweifache stetige Aenderung zu beachten und zu unterscheiden, einmal die stetige Aenderung in der Lage eines Punktes in Folge seiner Bewegung, also in Bezug auf die Aenderung der Zeit, und dann den stetigen Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern. Für diesen letztern sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes als völlig unabhängige Veränderliche zu betrachten; in Bezug auf die stetige Aenderung der Lage durch die Bewegung und mit der Zeit dagegen werden jene Veränderliche von einer vierten, der Zeit t, abhängig und stellen noch unbekannte Functionen dieser letztern vor. Wir wollen daher die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit wie gewöhnlich durch das Differential-Zeichen d andeuten; die Anfangswerthe solcher Aenderungsverhältnisse dagegen, welche sich auf den Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern ohne Rücksicht auf die Bewegung beziehen, durch das Variationszeichen δ, wie es in der Einleitung §. 43 u. f. angewendet wurde.

Darnach werden $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ wieder die Componenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ eines Punktes sein, dessen Lage am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein festes Coordinatensystem bestimmt wird; diese Componenten sind dann aber,

wie die Geschwindigkeit v selbst, Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t, wobei die erstern selbst als Functionen von t gedacht werden müssen; wir müssen daher auch die vollständigen Aenderungsgesetze dieser Functionen in Bezug auf t, übereinstimmend mit der in der Einleitung §. 32 u. f. angewendeten Bezeichnung durch $\frac{d.u_x}{dt}$, $\frac{d.u_y}{dt}$, $\frac{d.u_z}{dt}$ vorstellen, um sie von den theilweisen Aenderungsgesetzen $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$, $\frac{du_z}{dt}$ in Bezug auf t allein zu unterscheiden. Wir haben dann nach den am genannten Orte ausgeführten Entwickelungen für jene vollständigen Aenderungsgesetze die entwickelten Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.u_x}{dt} &= \frac{du_x}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{du_x}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\
\frac{d.u_y}{dt} &= \frac{du_y}{dt} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\
\frac{d.u_z}{dt} &= \frac{du_z}{dt} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}, \qquad a.$$

und ganz ähnliche Beziehungen ergeben sich auch für die Aenderungsgesetze der Componenten u_x', u_y', u_z' der relativen Geschwindigkeit v' eines Punktes $x'y'z'$ in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem und für die Aenderungsgesetze der Componenten u_ξ, u_η, u_ζ der relativen Geschwindigkeit v_ξ eines Punktes $\xi\eta\zeta$ in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem.

Denken wir uns nun das System zuerst auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen der x', y', z' bezogen, deren Anfangspunkt der augenblickliche Mittelpunkt der Masse des Systems sei, und dann am Ende der Zeit t einen Theil desselben in dem Punkte $x'y'z'$ durch drei zu den entsprechenden Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen begrenzt, so haben wir für den so begrenzten Raum V den Ausdruck (Buch II., §. 58):

$$V = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} dz' \,.\, 1$$

Körpern bestehenden Systems wieder einfachere Formen an, welche sich aus ihnen nach den in §. 31 für ein aus materiellen Punkten bestehendes System und für solche besondere Fälle dargestellten Gleichungen leicht ableiten lassen.

II. Stetige veränderliche Systeme.

§. 35.

Kommen wir nun zu der Untersuchung des innern Zustandes eines Systems, welches für unsere Vorstellung und insbesondere für die mathematische Behandlung als ein System von stetig aufeinanderfolgenden materiellen Punkten zu betrachten ist, in welchem aber die zwischen den einzelnen Punkten thätigen Kräfte unbekannt sind, von welchem nur die anfängliche äußere Form und das für den Anfang der Bewegung geltende Gesetz, durch welches die geometrische Dichte in einem durch seine Coordinaten bestimmten Punkte ausgedrückt wird, gegeben ist.

Bei einem solchen System haben wir eine zweifache stetige Aenderung zu beachten und zu unterscheiden, einmal die stetige Aenderung in der Lage eines Punktes in Folge seiner Bewegung, also in Bezug auf die Aenderung der Zeit, und dann den stetigen Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern. Für diesen letztern sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes als völlig unabhängige Veränderliche zu betrachten; in Bezug auf die stetige Aenderung der Lage durch die Bewegung und mit der Zeit dagegen werden jene Veränderliche von einer vierten, der Zeit t, abhängig und stellen noch unbekannte Functionen dieser letztern vor. Wir wollen daher die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit wie gewöhnlich durch das Differential-Zeichen d andeuten; die Anfangswerthe solcher Aenderungsverhältnisse dagegen, welche sich auf den Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern ohne Rücksicht auf die Bewegung beziehen, durch das Variationszeichen δ, wie es in der Einleitung §. 43 u. f. angewendet wurde.

Darnach werden $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ wieder die Componenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ eines Punktes sein, dessen Lage am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein festes Coordinatensystem bestimmt wird; diese Componenten sind dann aber

Die weitere Entwickelung dieses Integrals gibt mit der entsprechenden Aenderung in der Ordnung der Integration und mit Berücksichtigung des Werthes von V den Ausdruck:

$$\frac{\Delta_t V}{\Delta t} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} \\ + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} + \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} \\ + \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} \end{array} \right\},$$

und der Anfangswerth dieses Aenderungsverhältnisses führt auf das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d . V}{d t} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \, . \, u_z + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \, . \, u_y + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \, . \, u_x \, ,$$

da die vier letzten Integrale offenbar mit Δt verschwinden. Nimmt man dann von diesem Aenderungsgesetz des Raumes in Bezug auf die Zeit das Uebergangsgesetz in Bezug auf die von der Zeit unabhängige Aenderung von x', y', z', oder für den Uebergang von dem Punkte x' y' z' zu einem folgenden, so ergibt sich mit der Beachtung, daß

$$\frac{\delta^3 . \frac{d V}{d t}}{\delta x' \delta y' \delta z'} = \frac{d . \frac{\delta^3 V}{\delta x' \delta y' \delta z'}}{d t} = \frac{d \varrho}{d t}$$

gesetzt werden kann, wenn man mit ϱ die am Ende einer beliebigen Zeit eingetretene **geometrische Raumausdehnung** in dem Punkte x' y' z' bezeichnet, die Beziehung:

$$\frac{d \varrho}{d t} = \frac{\delta u_{x'}}{\delta x'} + \frac{\delta u_{y'}}{\delta y'} + \frac{\delta u_{z'}}{\delta z'} \, , \qquad (70)$$

welche demnach sowohl das zeitliche Aenderungsgesetz der örtlichen Raumänderung oder Raumausdehnung ϱ, als das Uebergangsgesetz der auf die Zeit bezogenen Raumänderung $\frac{dV}{dt}$ ausdrückt.

In Folge dieser Raumänderung, welche durch die innere Bewegung erzeugt wird, ändert sich auch die geometrische Dichte q in dem Punkte $x' y' z'$; diese Aenderung ist aber durch die Volumenänderung bedingt, da die Masse M des begrenzten Theiles stetig und unverändert bleiben muß, und es wird sich zunächst darum handeln, die entsprechende Beziehung zwischen der Aenderung der Dichte und der Volumenausdehnung festzustellen. Dazu wollen wir, um keinen Zweifel über diese neue Beziehung obwalten zu lassen, wieder zur unmittelbaren Betrachtung der Aenderungsverhältnisse zurückgehen. Am Ende der Zeit t haben wir mit einstweiliger Weglassung der Accente bei x, y und z für die begrenzte Masse M (Buch II., §. 22.) den Ausdruck:

$$M = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \, . \, q \; ;$$

nach der Zeit $t + \Delta t$ wird die Dichte q in dem Punkte xyz in $q + \Delta_t q$ übergehen, wenn $\Delta_t q$ die Aenderung von q in Bezug auf t allein vorstellt, und die obern Grenzen x, y, z der Integrale werden wieder $x + \Delta_t x$, $y + \Delta_t y$, $z + \Delta_t z$; der vorstehende Werth der Masse M, welche selbst ungeändert bleibt, nimmt daher nach dieser Zeit die Form an:

$$M = \int_{x_0}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y_0}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \delta z \, . \, (q + \Delta_t q) \, .$$

Es ist aber auch wie vorher

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \delta z . (q + \Delta_t q) &= \int_{z_0}^{z} \delta z . (q + \Delta_t q) + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z . (q + \Delta_t q) \\ &= \int_{z_0}^{z} \delta z . q + \int_{z_0}^{z} \delta z . \Delta_t q + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z . q + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z . \Delta_t q \; ; \end{aligned} \right.$$

und damit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q) &= \int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ &=\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.\Delta_t q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.\Delta_t q\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.q+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.\Delta_t q+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.q\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.\Delta_t q\,.\end{aligned}\right\}$$

Zuletzt findet man durch eine ähnliche Zerlegung

$$\left.\begin{aligned}\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ =\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ +\int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\end{aligned}\right\}$$

und die Entwickelung dieses Ausdruckes gibt mit entsprechenden Aenderungen in der Ordnung der Integration folgende zwölf Glieder:

(b.)

$$
\begin{aligned}
M = & \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \,.\, q + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \,.\, \Delta_t q \\
& + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, q + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, q + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \,.\, q \\
& + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, \Delta_t q + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, \Delta_t q \\
& \qquad + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \,.\, \Delta_t q \\
& + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, (q+\Delta_t q) + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, (q+\Delta_t q) \\
& \qquad + \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, (q+\Delta_t q) \\
& + \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, (q+\Delta_t q) \,.
\end{aligned}
$$

Beachtet man nun den Werth von M für das Ende der Zeit t, womit die linke Seite der vorstehenden Gleichung auf Null kommt und das erste Glied der rechten Seite hinausfällt, nimmt dann das Aenderungsverhältniß der so reduzirten Gleichung zu Δt, und geht zu den Anfangswerthen der einzelnen Glieder dieses Verhältnisses zurück, so ergeben sich für die beiden ersten dieser Glieder folgende Ausdrücke:

$$\text{Anf}:\frac{\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\Delta_t q}{\Delta t}=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\text{Anf}:\frac{\Delta_t q}{\Delta t}$$

$$=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\frac{\delta q}{d t}$$

$$\text{Anf}:\frac{\int_{y_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,q}{\Delta t}=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,\text{Anf}:\frac{\Delta_z\,.\,Q_z}{\Delta t}$$

$$=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\ \text{Anf}:\frac{\Delta_z\,.\,Q_z}{\Delta z}\,.\,\frac{\Delta_t z}{\Delta t}$$

$$=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q\frac{d z}{d t}=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q u_z$$

in deren letzteren Q_z das Integral der Function q in Bezug auf z allein vorstellt, so daß man hat

$$\frac{d Q_z}{d z}=q\ .$$

Auf ähnliche Weise findet man für die beiden folgenden Glieder die Werthe:

$$\text{Anf}:\frac{\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{z_0}^{z}\delta z\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\,.\,q}{\Delta t}=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_y$$

$$\text{Anf}:\frac{\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x\,.\,q}{\Delta t}=\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x$$

während leicht zu sehen ist, daß die Anfangswerthe aller übrigen Glieder wegen der doppelten und mehrfachen Aenderungen, welche mit Δt verschwinden, auf Null zurückkommen müssen. So gibt z. B. das fünfte Glied

$$\text{Anf:}\ \frac{\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,\Delta_t q}{\Delta t}\quad \text{zuerst Anf:}\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\ .\ \frac{\Delta_t q}{\Delta t}$$

und wenn Anf: $\frac{\Delta_t q}{\Delta t} = q'$ gesetzt wird, so folgt weiter

$$\text{Anf:}\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z\ .\ \frac{\Delta_t q}{\Delta t}=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z}\delta z\,.\,q'=0\ ,$$

wie für alle folgenden Glieder. Man zieht also aus dem vorhergehenden Ausdruck (b) die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\frac{dq}{dt}+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q u_z+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{x_0}^{x}\delta z\,.\,q u_y\\&\qquad+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x=0\ ,\end{aligned}\right.$$

und daraus endlich in Bezug auf die gleichzeitige unabhängige Aenderung von x', y', z' das Uebergangsgesetz:

$$71.)\qquad \frac{dq}{dt}+\frac{\delta\,.\,q u_{z'}}{\delta z'}+\frac{\delta\,.\,q u_{y'}}{\delta y'}+\frac{\delta\,.\,q u_{x'}}{\delta x'}=0\ .$$

Entwickelt man die drei letzten Glieder dieses Ausdruckes weiter, so wird derselbe

$$\frac{dq}{dt}+u_{x'}\frac{\delta q}{\delta x'}+u_{y'}\frac{\delta q}{\delta y'}+u_{z'}\frac{\delta q}{\delta z'}=-q\left(\frac{\delta u_{x'}}{\delta x'}+\frac{\delta u_{y'}}{\delta y'}+\frac{\delta u_{z'}}{\delta z'}\right),$$

und wenn man beachtet, daß die linke Seite das vollständige Aenderungsgesetz $\frac{d.q}{dt}$ der Dichte q als Function der vier Veränderlichen x′, y′, z′ und t in Bezug auf die Zeit ist, und die Gleichung (70) berücksichtigt wird, so hat man die einfache Beziehung:

$$\frac{d.q}{dt} + q\frac{d.\varrho}{dt} = 0 \qquad (72^a.$$

und daraus folgen die Gleichungen:

$$\varrho - \varrho_0 = log\,\frac{q_0}{q} \quad , \qquad q = q_0\,e^{\varrho_0 - \varrho} \quad , \qquad (72^b.$$

worin q_0 die Dichte und ϱ_0 die geometrische Raumausdehnung des Punktes x′ y′ z′ am Ende der Zeit t_0 bedeuten, und welche das Gesetz ausdrücken, nach welchem sich die Dichte in Bezug auf die räumliche Ausdehnung ändert.

§. 36.

In derselben Weise, wie wir das Aenderungsgesetz der begrenzten Masse M in Bezug auf die Zeit abgeleitet haben, finden wir auch das erste und zweite Aenderungsgesetz der Momente Mx′, My′, Mz′, durch welche die Lage des Mittelpunktes jener begrenzten Masse in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems ist, bestimmt wird, und erhalten dadurch die Beziehungen für die innere Bewegung jenes Mittelpunktes. Lassen wir vorerst wieder die Accente bei den Veränderlichen x, y, z hinweg, was dasselbe ist, als wenn wir den Mittelpunkt der ganzen Masse als unbeweglich betrachten, oder den Mittelpunkt der begrenzten Masse auf ein festes Coordinatensystem beziehen, so haben wir am Ende der Zeit t [Buch II, §. 22 (16)]

$$\left.\begin{aligned} Mx &= \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qx\,, \quad My = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qy\,, \\ Mz &= \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qz\,; \end{aligned}\right\} (c$$

nach der Zeit t + Δt dagegen werden diese Ausdrücke in

$$
\text{d.)} \left\{ \begin{aligned}
M(x+\Delta_t x) &= \int_{x_0}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y_0}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, x(q+\Delta_t q) \\
M(y+\Delta_t y) &= \int_{x_0}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y_0}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, y(q+\Delta_t q) \\
M(z+\Delta_t z) &= \int_{x_0}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y_0}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, z(q+\Delta_t q)
\end{aligned} \right.
$$

übergehen, worin wieder $\Delta_t q$ die von der Zeit allein abhängige Aenderung der Dichte in dem Punkte xyz vorstellt. Zerlegen wir dann den Werth von $M(x+\Delta_t x)$ in ähnlicher Weise, wie den obigen Werth von M am Ende der Zeit $t+\Delta t$, so ergibt sich mit Hinweglassung derjenigen Glieder, worin sich die mit Δt verschwindenden Aenderungen zu sehr häufen, und mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (c) der Ausdruck:

$$
\text{(e.)} \left\{ \begin{aligned}
M\Delta_t x &= \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \,.\, x\Delta_t q \\
&+ \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, qx + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, qx + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \,.\, qx \\
&+ \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, x\Delta_t q + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, x\Delta_t q + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \,.\, x\Delta_t q \\
&+ \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, qx + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \,.\, qx \\
&+ \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \,.\, qx \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned} \right.
$$

aus welchen wieder das Aenderungsverhältniß $M\frac{\Delta_t x}{\Delta t}$ und dessen Anfangswerth $M\frac{dx}{dt}$ gezogen werden kann. Nach dem Vorhergehenden wird man für den letztern und die den andern Coordinatenachsen entsprechenden $M\frac{dy}{dt}$, $M\frac{dz}{dt}$ nun leicht die Ausdrücke ableiten:

$$\left.\begin{array}{l}
M\frac{dx}{dt}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.x\frac{dq}{dt} \\
\quad+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.xq\frac{dz}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z.xq\frac{dy}{dt}+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.xq\frac{dx}{dt} \\
M\frac{dy}{dt}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.y\frac{dq}{dt} \\
\quad+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.yq\frac{dz}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.yq\frac{dy}{dt}+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.yq\frac{dx}{dt} \\
M\frac{dz}{dt}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.z\frac{dq}{dt} \\
\quad+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.zq\frac{dz}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z.zq\frac{dq}{dt}+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.zq\frac{dx}{dt}
\end{array}\right\}(f.$$

und daraus für den Uebergang zu dem Punkte: $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die einfachen Gesetze

$$\left.\begin{array}{c}
\frac{\partial^3.M\frac{dx}{dt}}{\partial x\partial y\partial z}=q\frac{dx}{dt}=qu_x\,,\quad \frac{\partial^3.M\frac{dy}{dt}}{\partial x\partial y\partial z}=q\frac{dy}{dt}=qu_y \\
\frac{\partial^3.M\frac{dz}{dt}}{\partial x\partial y\partial z}=q\frac{dz}{dt}=qu_z
\end{array}\right\}(72$$

erhalten, wenn man beachtet, daß die Veränderlichen x, y, z für diesen Uebergang von einander unabhängig sind, daß man daher einerseits hat

$$\frac{\delta . x q u_z}{\delta z} = x \frac{\delta . q u_z}{\delta z} , \quad \frac{\delta . y q u_z}{\delta z} = y \frac{\delta . q u_z}{\delta z} , \text{ u. s. f.}$$

auf der andern Seite aber auch

$$\frac{\delta . x q u_x}{\delta x} = x \frac{\delta . q u_x}{\delta x} + q u_x ,$$

$$\frac{\delta . y q u_y}{\delta y} = y \frac{\delta . q u_y}{\delta y} + q u_y ,$$

$$\frac{\delta . z q u_z}{\delta z} = z \frac{\delta . q u_z}{\delta z} + q u_z ;$$

und daß demnach die erste der Gleichungen (f) zuerst das Gesetz:

$$\frac{\delta . M \frac{dx}{dt}}{\delta x \delta y \delta z} = q u_x + x \left(\frac{dq}{dt} + \frac{\delta . q u_z}{\delta z} + \frac{\delta . q u_y}{\delta y} + \frac{\delta . q u_x}{\delta x} \right) ,$$

gibt, welches mit Berücksichtigung der Bedingung (71) auf die erste der Gleichungen (72) zurückkommt.

Aus diesen Gleichungen schließt man rückwärts auf die für das Ende der Zeit t geltenden Beziehungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \frac{dx}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_x , \quad M \frac{dy}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_y , \\ M \frac{dz}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_z , \end{array} \right.$$

und folgert aus diesen durch eine wiederholte Aenderung von t auf ähnlichem Wege wie vorher die zweiten Aenderungsgesetze $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$. Man zieht z. B. aus der ersten die Aenderung:

$$M\Delta_t\frac{dx}{dt}=\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\partial y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,(q+\Delta_t q)(u_x+\Delta_t u_x)\\&\qquad-\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q u_x\\&=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,(q\Delta_t u_x+u_x\Delta_t q)\\&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z.q u_x+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{y}^{y+\Delta_t y}\partial y.q u_x+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\partial x.q u_x\\&+\text{etc.}\end{aligned}\right.$$

und erhält damit als Anfangswerth des Aenderungsverhältnisses $M\frac{\Delta_t\frac{dx}{dt}}{\Delta t}$ den Ausdruck:

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=\left\{\begin{aligned}&\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\frac{du_x}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,u_x\frac{dq}{dt}\\&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\,.\,q u_x u_z+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q u_x u_y+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q u_x^2\end{aligned}\right.$$

Auf gleichem Wege ergeben sich die Werthe:

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\frac{du_y}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,u_y\frac{dq}{dt}$$

$$+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\,.\,q\,u_y u_z+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_y^2+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_x u_y\,,$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2}=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\frac{du_z}{dt}+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,u_z\frac{dq}{dt}$$

$$+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\,.\,q\,u_z^2+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_y u_z+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_x u_z\,,$$

und daraus folgen nun für den Punkt $x'y'z'$ mit Berücksichtigung der Gleichungen (a) und (71) die Uebergangsgesetze:

73.)

$$\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2x'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'}=q\frac{du_{x'}}{dt}+q\,u_{z'}\frac{\partial u_{x'}}{\partial z'}+q\,u_{y'}\frac{\partial u_{x'}}{\partial y'}+q\,u_{x'}\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'}$$

$$=q\frac{d\,.\,u_{x'}}{dt}\,,$$

$$\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2y'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'}=q\frac{du_{y'}}{dt}+q\,u_{z'}\frac{\partial u_{y'}}{\partial z'}+q\,u_{y'}\frac{\partial u_{y'}}{\partial y'}+q\,u_{x'}\frac{\partial u_{y'}}{\partial x'}$$

$$=q\frac{d\,.\,u_{y'}}{dt}\,,$$

$$\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2z'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'}=q\frac{du_{z'}}{dt}+q\,u_{z'}\frac{\partial u_{z'}}{\partial z'}+q\,u_{y'}\frac{\partial u_{z'}}{\partial y'}+q\,u_{x'}\frac{\partial u_{z'}}{\partial x'}$$

$$=q\frac{d\,.\,u_{z'}}{dt}$$

aus welchen man leicht erkennen wird, daß sie auch die Componenten der geometrischen Kraft P vorstellen, die in dem Punkte $x' y' z'$ wirkend, dem System dieselbe innere Bewegung ertheilen würde, wie die Gesammtwirkung der äußern und innern Kräfte.

§. 37.

Der bisher betretene Weg führt uns nun zu den allgemeinen Gleichungen der innern Bewegung und des innern Gleichgewichtes eines stetigen Systems von materiellen Punkten, deren gegenseitige Wirkungen nicht bekannt sind, und zwar durch folgende Betrachtung.

Wenn wir uns wie bisher in dem System einen Theil durch drei zu den festen oder parallel fortschreitenden Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen in dem Punkte $x' y' z'$ abgegrenzt denken, und den von den weggenommenen Theilen auf die Grenzflächen dieses begrenzten Theiles ausgeübten Druck oder Zug und Schub wie sonst den Widerstand fester Flächen als unbekannte Kräfte in Rechnung bringen, so können wir jenen begrenzten Theil des Systems als frei betrachten, und die Gleichungen für die relative Bewegung desselben werden uns durch die in dem Punkte $x' y' z'$ stattfindenden Uebergangsgesetze die Beziehungen liefern zwischen den auf diesen Punkt ausgeübten innern Wirkungen, den äußern geometrischen Kräften, welche an ihm thätig sind, und seiner innern Beschleunigung.

Sei also $T^{(x)}$ der geometrische Druck oder Zug, den derjenige Theil des Systems auf den Punkt $x' y' z'$ ausübt, welcher durch die zur Achse der x senkrechte Ebene abgeschnitten worden, $T_x^{(x)}$, $T_y^{(x)}$, $T_z^{(x)}$ seine Componenten nach den Achsen der x, y und z; ebenso sei $T^{(y)}$ der geometrische Druck oder Zug, der auf jenen Punkt durch den senkrecht zur Achse der y abgeschnittenen Theil des Systems ausgeübt wird, und $T_x^{(y)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(y)}$ seine drei rechtwinklichen Componenten, und in gleicher Weise sollen $T_x^{(z)}$, $T_y^{(z)}$, $T_z^{(z)}$ die Componenten des geometrischen Zuges $T^{(z)}$ bezeichnen, welchen der senkrecht zur Achse der z weggenommene Theil auf denselben Punkt hervorbringt. Bezeichnen wir dann die entsprechenden Componenten des physischen Druckes oder Zuges, welcher auf je eine der drei ebenen Schnittflächen O_x, O_y, O_z ausgeübt wird, mit $\mathfrak{T}_x^{(x)}$, $\mathfrak{T}_y^{(x)}$, $\mathfrak{T}_z^{(x)}$, $\mathfrak{T}_x^{(y)}$, $\mathfrak{T}_y^{(y)}$, $\mathfrak{T}_z^{(y)}$ und $\mathfrak{T}_x^{(z)}$, $\mathfrak{T}_y^{(z)}$, $\mathfrak{T}_z^{(z)}$, so ist nach den in §. 3 ausgesprochenen Bemerkungen $T_x^{(x)}$ das Aenderungsgesetz von $\mathfrak{T}_x^{(x)}$ in Bezug auf die Aenderung von O_x, also

$$T_x^{(x)} = \frac{\frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(x)}}{\partial y' \, \partial z'}}{\frac{\partial^2 O_x}{\partial y' \, \partial z'}} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(x)}}{\partial y' \, \partial z'},$$

weil für den zur Ebene der $y' z'$ parallelen ebenen Schnitt $\frac{\partial^2 . O_x}{\partial y' \, \partial z'} = 1$ ist (Buch II. §. 35). Ebenso hat man

$$T_y^{(x)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_y^{(x)}}{\partial y' \, \partial z'}, \quad T_z^{(x)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_z^{(x)}}{\partial y' \, \partial z'}, \quad T_x^{(y)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(y)}}{\partial x' \, \partial z'},$$

$$T_x^{(z)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(z)}}{\partial x' \, \partial y'}, \text{ u. s. f.}$$

und umgekehrt ergeben sich damit für den begrenzten Theil des Systems die fördernden physischen Wirkungen:

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_x^{(z)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{y_0}^{y'} \partial y' . T_x^{(z)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(z)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{y_0}^{y'} \partial y' . T_y^{(z)}, \\ \qquad \mathfrak{T}_z^{(z)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{y_0}^{y'} \partial y' . T_z^{(z)}, \\ \mathfrak{T}_x^{(y)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{z_0}^{z'} \partial z . T_x^{(y)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(y)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{z_0}^{z'} \partial z' . T_y^{(y)}, \\ \qquad \mathfrak{T}_z^{(y)} = \int_{x_0}^{x'} \partial x' \int_{z_0}^{z'} \partial z' . T_z^{(y)}, \\ \mathfrak{T}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y'} \partial y' \int_{z_0}^{z'} \partial z' . T_x^{(x)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y'} \partial y' \int_{z_0}^{z'} \partial z' . T_y^{(x)}, \\ \qquad \mathfrak{T}_z^{(x)} = \int_{y_0}^{y'} \partial y' \int_{z_0}^{z'} \partial z' . T_z^{(x)} \end{array} \right.$$

von denen je drei mit demselben untern Index längs derselben Achse thätig sind.

Bezeichnen wir ferner die an dem Punkte $x'\,y'\,z'$ wirkenden äußern geometrischen Componenten mit qX, qY, qZ, die entsprechenden Componenten der auf den begrenzten Theil des Systems ausgeübten physischen Wirkung einfach mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so haben wir (Buch II., §. 146)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qX \; , \quad \mathfrak{Y} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qY \; , \\ \qquad\qquad \mathfrak{Z} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qZ \; ; \end{array}\right\} \text{(b.}$$

damit nehmen die Gleichungen für die relative fortschreitende Bewegung der begrenzten Masse M oder vielmehr ihres Mittelpunktes in Bezug auf die mit dem Mittelpunkte X Y Z der ganzen Masse parallel fortschreitenden Achsen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} M\frac{d^2x'}{dt^2} = \mathfrak{X} - M\frac{d^2X}{dt^2} + \mathfrak{X}^{(x)}_x + \mathfrak{X}^{(y)}_x + \mathfrak{X}^{(z)}_x \\ M\frac{d^2y'}{dt^2} = \mathfrak{Y} - M\frac{d^2Y}{dt^2} + \mathfrak{X}^{(x)}_y + \mathfrak{X}^{(y)}_y + \mathfrak{X}^{(z)}_y \\ M\frac{d^2z'}{dt^2} = \mathfrak{Z} - M\frac{d^2Z}{dt^2} + \mathfrak{X}^{(x)}_z + \mathfrak{X}^{(y)}_z + \mathfrak{X}^{(z)}_z \end{array}\right\} ;$$

und geben in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung der Begrenzung für den Punkt $x'\,y'\,z'$ die Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^3 . M\frac{d^2x'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} = \frac{\partial^3 . \mathfrak{X}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} - \frac{d^2X}{dt^2}\,\frac{\partial^3 . M}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} \\ \qquad + \frac{\partial^3 . \mathfrak{X}^{(x)}_x}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} + \frac{\partial^3 . \mathfrak{X}^{(y)}_x}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} + \frac{\partial^3 . \mathfrak{X}^{(z)}_x}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} , \\ \text{u. s. f.} \end{array}\right\}$$

welche mit Berücksichtigung der Gleichungen (73) und der vorhergehenden Werthe (a) und (b) auf folgende zurückkommen

$$74^a.)\quad \begin{cases} q\,\dfrac{d\,.\,u_{x'}}{dt} = q\,X - q\,\dfrac{d^2\,\mathfrak{X}}{dt^2} + \dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x'} + \dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y'} + \dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z'}\,, \\[2ex] q\,\dfrac{d\,.\,u_{y'}}{dt} = q\,Y - q\,\dfrac{d^2\,\mathfrak{Y}}{dt^2} + \dfrac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x'} + \dfrac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y'} + \dfrac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z'}\,, \\[2ex] q\,\dfrac{d\,.\,u_{z'}}{dt} = q\,Z - q\,\dfrac{d^2\,\mathfrak{Z}}{dt^2} + \dfrac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x'} + \dfrac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y'} + \dfrac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z'}\,, \end{cases}$$

und so die Gleichungen für die innere Bewegung des Punktes $x'\,y'\,z'$ vorstellen.

§. 38.

Es wird einleuchten, daß die Gesetze für die drehende Bewegung der begrenzten Masse M keine neuen Beziehungen für die innere Bewegung des Punktes $x'\,y'\,z'$ liefern können, da diese Bewegung durch die vorstehenden Gleichungen vollständig bestimmt ist, und die Gleichungen für die drehende Bewegung eines Punktes um den Anfang der Coordinaten unmittelbar aus den Gleichungen seiner Bewegung längs der Coordinatenachsen abgeleitet werden können. Es lassen sich aber durch die Gleichungen der drehenden Bewegung der Masse M, wenn man daraus die Uebergangsgesetze für den Punkt $x'\,y'\,z'$ zieht, und sie mit den Gesetzen der drehenden Bewegung dieses Punktes vergleicht, welche aus den Gleichungen (74) durch die in §. 71 des ersten Buches angegebene Behandlung hervorgehen, wichtige Beziehungen zwischen den Größen $T_y^{(x)}$, $T_x^{(y)}$, $T_z^{(x)}$, $T_x^{(z)}$, u. s. f. ableiten, durch welche diese neun Unbekannten auf sechs zurückgeführt werden. Beachtet man übrigens, daß diese Beziehungen von dem Zustand des Systems unabhängig sein müssen, daß sie also ebensowohl für den Zustand des innern Gleichgewichtes, wie für den der Bewegung bestehen, so wird man einsehen, daß es genügt, die einfacheren Gleichungen für das Gleichgewicht der begrenzten Masse M zu Hülfe zu nehmen, um jene Beziehungen zu erhalten.

Seien dazu $\mathfrak{x}_x^{(x)}$, $\mathfrak{y}_x^{(x)}$, $\mathfrak{z}_x^{(x)}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen geometrischen Kräfte $T_x^{(x)}$ oder des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{T}_x^{(x)}$ in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, $\mathfrak{x}_y^{(x)}$, $\mathfrak{y}_y^{(x)}$, $\mathfrak{z}_y^{(x)}$

die des Mittelpunktes der Kräfte $T_y^{(x)}$; $\mathfrak{x}_x^{(y)}$, $\mathfrak{y}_x^{(y)}$, $\mathfrak{z}_x^{(y)}$ die des Mittelpunktes der Kräfte $T_x^{(y)}$ u. s. f., so hat man nach der Lehre von der Zusammensetzung paralleler Kräfte (Buch II. §. 23) die Beziehungen:

$$\mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{x}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{x} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, xT_x^{(x)} = x\int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, T_x^{(x)} \;, \qquad \mathfrak{x}_x^{(x)} = x$$

$$\mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{y}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z}^{z} dz \,.\, yT_x^{(x)} \;, \qquad \mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{z}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, zT_x^{(x)}$$

$$\mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{x}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, xT_y^{(x)} = x\int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, T_y^{(x)} \;, \qquad \mathfrak{x}_y^{(x)} = x$$

$$\mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{y}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, yT_y^{(x)} \;, \qquad \mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{z}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, zT_y^{(x)}$$

u. s. f.

und schließt daraus, was übrigens ohnehin klar ist,

$$\mathfrak{x}_x^{(x)} = \mathfrak{x}_y^{(x)} = \mathfrak{x}_z^{(x)} = x \;, \qquad \mathfrak{y}_x^{(y)} = \mathfrak{y}_y^{(y)} = \mathfrak{y}_z^{(y)} = y \;,$$
$$\mathfrak{z}_x^{(z)} = \mathfrak{z}_y^{(z)} = \mathfrak{z}_z^{(z)} = z \,.$$

Ferner bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte X oder des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{X}$ mit x_1, y_1, z_1, die des Angriffspunktes der $\mathfrak{Y}$ mit x_2, y_2, z_2, die entsprechenden für die Kraft $\mathfrak{Z}$ mit x_3, y_3, z_3, und haben dann die Gleichungen

$$\mathfrak{X}z_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, qzX \;, \qquad \mathfrak{X}y_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, qyX \;,$$

$$\mathfrak{Y}x_2 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, qxY \;, \qquad \mathfrak{Z}y_3 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz \,.\, qyZ \;,$$

u. s. f.

Damit werden nun die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der begrenzten Masse M längs der festen Coordinatenachsen

$$\text{c.)}\quad \begin{cases} \mathfrak{X} + \mathfrak{X}_x^{(x)} + \mathfrak{X}_x^{(y)} + \mathfrak{X}_x^{(z)} = 0 \\ \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}_y^{(x)} + \mathfrak{X}_y^{(y)} + \mathfrak{X}_y^{(z)} = 0 \\ \mathfrak{Z} + \mathfrak{X}_z^{(x)} + \mathfrak{X}_z^{(y)} + \mathfrak{X}_z^{(z)} = 0 \end{cases}$$

und diejenigen für das Gleichgewicht um diese Achsen sind

$$\text{d.)}\quad \begin{cases} 0 = (\mathfrak{Z}y_3 - \mathfrak{Y}z_2) + \left(\mathfrak{X}_z^{(x)}\mathfrak{y}_z^{(x)} - \mathfrak{X}_y^{(x)}\mathfrak{z}_y^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{X}_z^{(y)}\mathfrak{y}_z^{(y)} - \mathfrak{X}_y^{(y)}\mathfrak{z}_y^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{X}_z^{(z)}\mathfrak{y}_z^{(z)} - \mathfrak{X}_y^{(z)}\mathfrak{z}_y^{(z)}\right), \\ 0 = (\mathfrak{X}z_1 - \mathfrak{Z}x_3) + \left(\mathfrak{X}_x^{(x)}\mathfrak{z}_x^{(x)} - \mathfrak{X}_z^{(x)}\mathfrak{x}_z^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{X}_x^{(y)}\mathfrak{z}_x^{(y)} - \mathfrak{X}_z^{(y)}\mathfrak{x}_z^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{X}_x^{(z)}\mathfrak{z}_x^{(z)} - \mathfrak{X}_z^{(z)}\mathfrak{x}_z^{(z)}\right), \\ 0 = (\mathfrak{Y}x_2 - \mathfrak{X}y_1) + \left(\mathfrak{X}_y^{(x)}\mathfrak{x}_y^{(x)} - \mathfrak{X}_x^{(x)}\mathfrak{y}_x^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{X}_y^{(y)}\mathfrak{x}_y^{(y)} - \mathfrak{X}_x^{(y)}\mathfrak{y}_x^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{X}_y^{(z)}\mathfrak{x}_y^{(z)} - \mathfrak{X}_x^{(z)}\mathfrak{y}_x^{(z)}\right). \end{cases}$$

Nimmt man dann von diesen Gleichungen die Uebergangsgesetze in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung von x, y und z, so geben die drei ersten die Bedingungen:

$$\text{75.)}\quad \begin{cases} qX + \dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} = 0, \\ qY + \dfrac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} = 0, \\ qZ + \dfrac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} + \dfrac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} + \dfrac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

welche übrigens auch aus den Gleichungen (74) hervorgehen, wenn darin die Bedingungen für das innere und äußere Gleichgewicht, nämlich

$$\frac{d \, . \, u_{x'}}{dt} = 0 \;, \quad \frac{d \, . \, u_{y'}}{dt} = 0 \;, \quad \frac{d \, . \, u_{z'}}{dt} = 0$$

und

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \;, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \;; \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

eingeführt werden. Die Gleichungen (d) geben für den Punkt xyz ebenso die Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= q(yZ - zY) + \frac{\delta . \left(y T^{(x)}_z - z T^{(x)}_y\right)}{\delta x} + \frac{\delta . \left(y T^{(y)}_z - z T^{(y)}_y\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta . \left(y T^{(z)}_z - z T^{(z)}_y\right)}{\delta z} \;, \\
0 &= q(zX - xZ) + \frac{\delta . \left(z T^{(x)}_x - x T^{(x)}_z\right)}{\delta x} + \frac{\delta . \left(z T^{(y)}_x - x T^{(y)}_z\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta . \left(z T^{(z)}_x - x T^{(z)}_z\right)}{\delta z} \;, \\
0 &= q(xY - yX) + \frac{\delta . \left(x T^{(x)}_y - y T^{(x)}_x\right)}{\delta x} + \frac{\delta . \left(x T^{(y)}_y - y T^{(y)}_x\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta . \left(x T^{(z)}_y - y T^{(z)}_x\right)}{\delta z} \;,
\end{aligned}\right\}$$

oder wenn man die Aenderungsgesetze der Producte $x T^{(x)}_y$, $y T^{(x)}_x$, u. s. f. entwickelt, und die Unabhängigkeit der Veränderlichen x, y und z beachtet,

$$
\text{f.)}\quad
\begin{cases}
0 = q(yZ - zY) + \left(y\dfrac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} - z\dfrac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(y\dfrac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} - z\dfrac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y}\right) \\
\qquad + \left(y\dfrac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z} - z\dfrac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_z^{(y)} - T_y^{(z)}\right), \\
0 = q(zX - xZ) + \left(z\dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} - x\dfrac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(z\dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} - x\dfrac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y}\right) \\
\qquad + \left(z\dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} - x\dfrac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_x^{(z)} - T_z^{(x)}\right), \\
0 = q(xY - yX) + \left(x\dfrac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} - y\dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(x\dfrac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} - y\dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y}\right) \\
\qquad + \left(x\dfrac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} - y\dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_y^{(x)} - T_x^{(y)}\right).
\end{cases}
$$

Multiplizirt man nun die erste der Gleichungen (75) mit y, die zweite mit x und addirt ihre Differenz zu der letzten der vorstehenden Gleichungen, und verfährt in entsprechender Weise in Bezug auf die übrigen Gleichungen, so ergeben sich die drei Beziehungen:

$$
\text{76.)}\quad T_y^{(x)} = T_x^{(y)} \quad , \quad T_x^{(z)} = T_z^{(x)} \quad , \quad T_z^{(y)} = T_y^{(z)}
$$

durch welche die neun Unbekannten, $T_z^{(x)}$, $T_y^{(x)}$, etc. auf sechs zurückgeführt werden. Wir können deßhalb die Bezeichnung vereinfachen, und werden nun die längs der Achsen der x, y und z wirkenden, also zu ihren Schnittebenen normalen Spannungen $T_x^{(x)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(z)}$ einfach mit T_x, T_y, T_z bezeichnen, die beiden Kräfte $T_y^{(x)}$ und $T_x^{(y)}$ dagegen, welche ihren Angriffspunkt in einer zur Achse der z senkrechten Richtung verschieben wollen, mit S_z, die senkrecht zur Achse der y verschiebenden $T_x^{(z)}$ und $T_z^{(x)}$ mit S_y, und die senkrecht zur x-Achse wirkenden $T_z^{(y)}$ und $T_y^{(z)}$ mit S_x. Damit nehmen die

Gleichungen (74ª) für die innere Bewegung des Punktes x′ y′ z′ in Bezug auf parallel fortschreitende Achsen die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d.u_x'}{dt} - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d.u_y'}{dt} - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d.u_z'}{dt} - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (74^b.$$

und geben für das innere Gleichgewicht desselben Punktes die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad (77.$$

Wenn das System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, die Lage der einzelnen Punkte also auf ein unbewegliches Coordinatensystem bezogen wird, so werden die Beschleunigungen $q\frac{d^2 x}{dt^2}$, $q\frac{d^2 y}{dt^2}$, $q\frac{d^2 z}{dt^2}$ Null, und man hat für die innere Bewegung des Punktes x y z die einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_z}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial z} + q\left(X - \frac{d.u_x}{dt}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S_x}{\partial z} + q\left(Y - \frac{d.u_y}{dt}\right) = 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + q\left(Z - \frac{d.u_z}{dt}\right) = 0
\end{aligned}\right\}; \quad (78.$$

für das innere Gleichgewicht desselben die Bedingungen:

$$
75^b.)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial S_z}{\partial y}+\frac{\partial S_y}{\partial z}+qX&=0\,,\\
\frac{\partial S_z}{\partial x}+\frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial S_x}{\partial z}+qY&=0\,,\\
\frac{\partial S_y}{\partial x}+\frac{\partial S_x}{\partial y}+\frac{\partial T_z}{\partial z}+qZ&=0\,,
\end{aligned}
\right.
$$

welche unter Berücksichtigung der Beziehungen (76) mit den direct abgeleiteten Gleichungen (75) übereinkommen.

§. 39.

Die Gleichungen (76) im vorigen Paragraphen sind nur einzelne besondere Fälle einer allgemeinen Eigenschaft der Kräfte T und S, welche sich durch folgende Betrachtung ableiten läßt.

Die vorhergehenden Gleichungen zeigen, daß die geometrischen Kräfte T nicht gleichartig sind mit den geometrischen Kräften qX, qY, qZ, wie es auch in der Natur der Sache liegt, da die erstern Aenderungsgesetze physischer Kräfte in Bezug auf die Aenderung der Fläche, die letztern dagegen Aenderungsgesetze physischer Kräfte in Bezug auf die Aenderung des Raumes vorstellen; es sind daher diese letztern erst mit den Aenderungsgesetzen der Kräfte T in Bezug auf die Aenderung einer Länge oder Entfernung gleichartig, und zwar zeigen die Gleichungen (75ᵃ), daß diese Aenderungsgesetze immer in Bezug auf die Aenderung der senkrechten Entfernung der entsprechenden Schnittebene vom Anfangspunkt zu nehmen sind. Denn vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichgewichtsbedingungen eines freien materiellen Punktes, so sieht man, daß die Aenderungsgesetze:

$$
\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x}
$$

als die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten einer Kraft $\frac{\partial T^{(x)}}{\partial x}$ zu betrachten sind, welche durch das Aenderungsgesetz der geometrischen Wirkung $T^{(x)}$ in einem Punkte der zur Achse der x senkrechten Schnittebene in Bezug auf die Aenderung ihrer senkrechten Entfernung x

vom Anfangspunkte gemessen wird. Ebenso sind die Aenderungsgesetze $\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y}$, $\frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y}$, $\frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y}$ die Componenten der Kraft $\frac{\partial T^{(y)}}{\partial y}$, also die Componenten des Aenderungsgesetzes der geometrischen Wirkung $T^{(y)}$ in einem Punkte der zur y=Achse senkrechten Schnittebene in Bezug auf die Aenderung ihrer senkrechten Entfernung y vom Anfangspunkte, u. s. f.

Legen wir nun durch diesen Anfangspunkt drei neue unter sich senkrechte Achsen der ξ, η, ζ, begrenzen das System in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ durch drei zu diesen Achsen senkrechte Ebenen, und bezeichnen mit $T_\xi^{(\xi)}$, $T_\eta^{(\xi)}$, $T_\zeta^{(\xi)}$ die Componenten der geometrischen Spannung $T^{(\xi)}$, welche in einem Punkte der zur ξ=Achse senkrechten Schnittebene stattfindet, mit $T_\xi^{(\eta)}$, $T_\eta^{(\eta)}$, $T_\zeta^{(\eta)}$ die Componenten der Kraft $T^{(\eta)}$ in einem Punkte der zur η=Achse senkrechten Schnittebene, mit $T_\xi^{(\zeta)}$, $T_\eta^{(\zeta)}$, $T_\zeta^{(\zeta)}$ die entsprechenden Componenten der Kraft $T^{(\zeta)}$, welche die geometrische Spannung des von der dritten Schnittebene abgetrennten Theiles für einen Punkt dieser Schnittebene vorstellt, dann noch mit $q\Xi$, qH, qZ die Componenten der äußern geometrischen Kraft für den Punkt $\xi\eta\zeta$, so haben wir für das Gleichgewicht dieses Punktes in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ die den Gleichungen (75ᵃ) im vorigen Paragraphen entsprechenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_\xi^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_\xi^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_\xi^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + q\Xi = 0 \\
\frac{\partial T_\eta^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_\eta^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_\eta^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + qH = 0 \\
\frac{\partial T_\zeta^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_\zeta^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_\zeta^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + qZ = 0
\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

Sind dann a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' die Cosinus der Winkel $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, $\widehat{\eta y}$ u. s. f., welche jede der drei neuen Achsen mit der ursprünglichen der x, y, z bildet, so hat man

$$\text{b.)}\quad \left\{ \begin{aligned} a\,\Xi + a'\,H + a''\,Z &= X\,, \\ b\,\Xi + b'\,H + b''\,Z &= Y\,, \\ c\,\Xi + c'\,H + c''\,Z &= Z\,, \end{aligned} \right.$$

und in gleicher Weise ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{c.)}\quad \left\{ \begin{aligned} & a\,\frac{\partial T_\xi^{(\xi)}}{\partial \xi} + a'\,\frac{\partial T_\eta^{(\xi)}}{\partial \xi} + a''\,\frac{\partial T_\zeta^{(\xi)}}{\partial \xi} = \frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} \\ & a\,\frac{\partial T_\xi^{(\eta)}}{\partial \eta} + a'\,\frac{\partial T_\eta^{(\eta)}}{\partial \eta} + a''\,\frac{\partial T_\zeta^{(\eta)}}{\partial \eta} = \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} \\ & a\,\frac{\partial T_\xi^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + a'\,\frac{\partial T_\eta^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + a''\,\frac{\partial T_\zeta^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} \\ & b\,\frac{\partial T_\xi^{(\xi)}}{\partial \xi} + b'\,\frac{\partial T_\eta^{(\xi)}}{\partial \xi} + b''\,\frac{\partial T_\zeta^{(\xi)}}{\partial \xi} = \frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi} \\ & b\,\frac{\partial T_\xi^{(\eta)}}{\partial \eta} + b'\,\frac{\partial T_\eta^{(\eta)}}{\partial \eta} + b''\,\frac{\partial T_\zeta^{(\eta)}}{\partial \eta} = \frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta} \\ & \text{u. s. f.,} \end{aligned} \right.$$

worin $\frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial T_z^{(\xi)}}{\partial \xi}$ die Componenten der Kraft $\frac{\partial T^{(\xi)}}{\partial \xi}$ nach den Achsen der x, y, z vorstellen, $\frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial T_z^{(\eta)}}{\partial \eta}$ die entsprechenden der Kraft $\frac{\partial T^{(\eta)}}{\partial \eta}$ u. s. f.

Multiplizirt man nun die Gleichungen (a) der Reihe nach zuerst mit a, a', a'', dann mit b, b', b'', und zuletzt mit c, c', c'' und nimmt jedesmal die Summe der Producte, so findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (b) und (c) die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + q X = 0 \\
\frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + q Y = 0 \\
\frac{\partial T_z^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_z^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_z^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + q Z = 0
\end{aligned}\right\} , \quad (d.$$

welche nun wieder das Gleichgewicht längs den Achsen der x, y, z, aber mittels der nach diesen Achsen zerlegten Kräfte $\frac{\partial T^{(\xi)}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial T^{(\eta)}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial T^{(\zeta)}}{\partial \zeta}$ ausdrücken und durch ihre Form die oben besprochene Eigenschaft der Kräfte T für beliebige Schnittebenen bestätigen. Vergleichen wir ferner die Gleichungen (d) mit den Bedingungen (75ª), so erhalten wir zwischen den Kräften $T^{(\xi)}$, $T^{(\eta)}$ und $T^{(\zeta)}$, welche längs der neuen Schnittebenen thätig sind und den Kräften $T^{(x)}$, $T^{(y)}$, $T^{(z)}$, welche die innere Wirkung in den ursprünglichen Schnittebenen ausdrücken, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} \\
\frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} \\
\frac{\partial T_z^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_z^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_z^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}
\end{aligned}\right\} , \quad (e.$$

worin die Kräfte T auf der linken Seite als Functionen von ξ, η, ζ, auf der rechten Seite als Functionen von x, y, z gedacht sind. Betrachten wir daher die Kräfte T auf der rechten Seite auch als Functionen von ξ, η, ζ und nehmen diese letztern Veränderlichen als willkürliche Functionen der x, y, z, insofern nämlich willkürlich, als in den Werthen von a, b, c, etc. eine freie Wahl gestattet ist, so geben uns die bekannten Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = ax + by + cz \\ \eta = a'x + b'y + c'z \\ \zeta = a''x + b''y + c''z \end{array}\right.$$

die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = a' \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = a''$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = b \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = b' \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = b''$$

u. s. f.

und wenn man beachtet, daß man nun auch die Beziehungen hat:

$$\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} = \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= a \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} + a' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} + a'' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} = b \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \xi} + b' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \eta} + b'' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \zeta}$$

u. s. f.

so nimmt die erste der Gleichungen (e) die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} - a \dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} - b \dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \xi} - c \dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \xi} \\ + \dfrac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} - a' \dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} - b' \dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \eta} - c' \dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \eta} \\ + \dfrac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} - a'' \dfrac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta} - b'' \dfrac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \zeta} - c'' \dfrac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \zeta} \end{array}\right\} = 0 \, ,$$

oder wenn noch die ξ, η, ζ als willkürliche Functionen einer neuen Veränderlichen s gedacht werden, von der Art, daß $\frac{\partial \xi}{\partial s} : \frac{\partial \eta}{\partial s} : \frac{\partial \zeta}{\partial s}$

die Cosinus der Winkel sind, durch welche die beliebige Richtung des Ueberganges von dem Punkte $\xi\eta\zeta$ zu einem folgenden bestimmt wird (vergl. Einl. §§. 32 und 35),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\delta\left(T_x^{(\xi)} - a\,T_x^{(x)} - b\,T_x^{(y)} - c\,T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \xi} \\
&+\frac{\delta\left(T_x^{(\eta)} - a'\,T_x^{(x)} - b'\,T_x^{(y)} - c'\,T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \eta} \\
&+\frac{\delta\left(T_x^{(\zeta)} - a''\,T_x^{(x)} - b''\,T_x^{(y)} - c''\,T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \zeta}
\end{aligned}\right\} = 0$$

Diese Gleichung muß für jede Richtung des Ueberganges oder für alle möglichen Werthe der willkürlichen Uebergangsgesetze $\frac{\delta s}{\delta \xi}, \frac{\delta s}{\delta \eta}, \frac{\delta s}{\delta \zeta}$ befriedigt werden, und dieß ist nur möglich, wenn die Factoren dieser Uebergangsgesetze selbst Null sind. Man erhält durch diesen Schluß, und wenn dieselben Umwandlungen auch mit den beiden letzten der Gleichungen (e) vorgenommen werden, die wichtigen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
T_x^{(\xi)} &= a\,T_x^{(x)} + b\,T_x^{(y)} + c\,T_x^{(z)} \\
T_y^{(\xi)} &= a\,T_y^{(x)} + b\,T_y^{(y)} + c\,T_y^{(z)} \\
T_z^{(\xi)} &= a\,T_z^{(x)} + b\,T_z^{(y)} + c\,T_z^{(z)} \\
T_x^{(\eta)} &= a'\,T_x^{(x)} + b'\,T_x^{(y)} + c'\,T_x^{(z)} \\
T_y^{(\eta)} &= a'\,T_y^{(x)} + b'\,T_y^{(y)} + c'\,T_y^{(z)} \\
T_z^{(\eta)} &= a'\,T_z^{(x)} + b'\,T_z^{(y)} + c'\,T_z^{(z)} \\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right\} \quad (79.$$

welche folgende allgemeine Gegenseitigkeit der Kräfte T für verschiedene Schnittebenen aussprechen:

Wenn man die Spannungen im Schnittpunkte dreier unter sich rechtwinkliger Ebenen nach den Normalen zu diesen Ebenen wie nach drei rechtwinkligen Achsen zerlegt, diese Componenten in Längeneinheiten auf die entsprechende Normale aufträgt, und dann auf irgend eine beliebige neue Richtung projicirt, so gibt die Summe der Projectionen der zu derselben Achse parallelen Componenten die derselben Achse entsprechende Componente des geometrischen Zuges, welcher in jenem Punkte für eine zu der neuen Richtung senkrechte Schnittebene stattfindet, oder welche die Wirkung des durch diese Ebene abgeschnittenen Theiles des Systems auf jenen Punkt vorstellt. Verbindet man dann die Gleichungen (76) mit den vorhergehenden Beziehungen, so nehmen die drei ersten derselben die Form an:

$$80^{a}.)\quad \begin{cases} T_x^{(\xi)} = a\,T_x^{(x)} + b\,T_y^{(x)} + c\,T_z^{(x)} \\ T_y^{(\xi)} = a\,T_x^{(y)} + b\,T_y^{(y)} + c\,T_z^{(y)} \\ T_z^{(\xi)} = a\,T_x^{(z)} + b\,T_y^{(z)} + c\,T_z^{(z)} \end{cases}$$

oder die noch einfachere:

$$80^{b}.)\quad T_x^{(\xi)} = T_\xi^{(x)}\,,\quad T_y^{(\xi)} = T_\xi^{(y)}\,,\quad T_z^{(\xi)} = T_\xi^{(z)}\,,$$

und sprechen nun mit Rücksicht auf die beliebige Lage der Achsen der x, y, z und der ξ, η, ζ den allgemeinen Satz aus:

Wenn ein stetiges System in einem beliebigen Punkte durch zwei beliebige Ebenen getheilt wird, so gibt die innere geometrische Wirkung für die erste Schnittebene nach der Normalen zu der zweiten dieselbe rechtwinklige Componente, wie die geometrische Spannung in der zweiten Schnittebene nach der Normalen zur ersten.

Aus diesem Satze, von welchem die Gleichungen (76), wie schon bemerkt, nur besondere Fälle sind, folgt weiter, daß wenn in einem System der geometrische Zug oder Druck für jede ebene Schnittfläche normal zu dieser gerichtet ist, er auch für jede Schnittfläche dieselbe Größe hat. Der umgekehrte Satz, daß die Spannungen in jeder Schnittebene normal zu dieser gerichtet sind, wenn sie alle gleiche Größe haben, ist aber, wie ich später zeigen werde, nur dann richtig, wenn die Spannungen auch alle gleichen Sinn

haben, d. h. entweder alle Zugkräfte oder alle Druckkräfte vorstellen, und diese besondere Eigenschaft ist es namentlich, welche die flüssigen Systeme von den stetigen veränderlichen Systemen der festen Aggregatform, die wir im gegenwärtigen Buche weiter untersuchen werden, unterscheidet.

§. 40.

Die Beziehungen, welche die Gleichungen (79) und (80) zwischen den Kräften T für verschiedene Schnittebenen feststellen, führen noch zu weitern wichtigen Folgerungen, welche sich am leichtesten ergeben, wenn wir jene Beziehungen anschaulich machen und die um einen Punkt herum stattfindenden Verhältnisse zusammen in einem geometrischen Bilde darstellen, wie wir es für die Massenmomente im vorhergehenden Buche gethan haben.

Durch den Punkt M oder xyz des Systems legen wir drei unter sich senkrechte Achsen, welche zu den Achsen der x, y und z parallel sind und dann noch eine vierte Gerade, welche gegen die erstern eine beliebige Lage hat, und daher mit ihnen die veränderlichen Winkel λ, μ, ν bildet; zu jeder dieser Geraden denken wir uns eine senkrechte Schnittebene und bezeichnen die geometrischen Spannungen für die drei ersten mit A, B, C, für die letzte mit T, ihre Componenten nach den Achsen durch A_x, B_x, C_x, T_x, A_y, B_y, C_y, T_y, u. s. f. Die Gleichungen (79) geben dann zwischen diesen Größen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= A_x \cos\lambda + B_x \cos\mu + C_x \cos\nu \\ T_y &= A_y \cos\lambda + B_y \cos\mu + C_y \cos\nu \\ T_z &= A_z \cos\lambda + B_z \cos\mu + C_z \cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (a.$$

und wenn man diese in's Quadrat erhebt und summirt, so folgt mit der Beachtung, daß man hat

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad , \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2$$

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \widehat{AB}$$

u. s. f.

der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} T^2 &= A^2 \cos^2\lambda + B^2 \cos^2\mu + C^2 \cos^2\nu \\ &+ 2AB\cos\widehat{AB}\cos\lambda\cos\mu + 2AC\cos\widehat{AC}\cos\lambda\cos\nu + 2BC\cos\widehat{BC}\cos\mu\cos\nu \end{aligned}\right\} \quad (b.\,,$$

aus welchem sich für beliebige Werthe von λ, μ, ν oder für jede Lage der vierten Schnittebene zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für T ergeben, und welcher dadurch zeigt, daß es in dem Punkte xyz für jede Schnittebene zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte T gibt, was übrigens ohnehin einleuchtet, da jeder der beiden Theile des Systems, welche durch eine solche Schnittebene entstehen, auf den andern die gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Wirkung ausüben muß.

Denkt man sich nun auf die vierte der Lage nach veränderliche Gerade von dem Punkte M aus eine Länge r aufgetragen, welche der Größe T verkehrt proportional ist, so daß man hat

$$r = \frac{1}{T} ,$$

und bezeichnet die Coordinaten des Endpunktes dieser Länge r in Bezug auf die Achsen, deren Anfangspunkt der Punkt M ist mit x', y', z', so hat man

$$x' = r \cos\lambda \quad , \quad y' = r \cos\mu \quad , \quad z' = r \cos\nu$$

und die Gleichung (b) nimmt damit die Form an:

$$\text{b}'.)\left\{\begin{aligned} 1 = & A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2 \\ & + 2AB \cos\widehat{AB} . x'y' + 2AC \cos\widehat{AC} . x'z' + 2BC \cos\widehat{BC} . y'z' \end{aligned}\right. ,$$

unter welcher sie als die eines Ellipsoides betrachtet werden kann, dessen Mittelpunkt mit dem Punkte xyz zusammenfällt, dessen Achsen jedoch im Allgemeinen nicht mit den Achsen der x, y, z parallel sind. Man kann aber die Achsen der x', y', z' immer so drehen, daß sie mit den Achsen des Ellipsoids zusammenfallen, und wenn man die diesen neuen Achsen der ξ, η, ζ entsprechenden Werthe von A, B, C, d. h. die geometrischen Zugkräfte für die zu diesen neuen Achsen senkrechten Schnittebenen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet, so muß man haben

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C} \cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} \cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0 ,$$

oder da im Allgemeinen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nicht Null sind

(d)

$$\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0$$

woraus zunächst folgt, daß die für die neuen Schnittebenen sich ergebenden Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ senkrecht zu einander gerichtet sind.

Für diese neuen Achsen wird dann die Gleichung des Ellipsoids einfach

$$1 = \mathfrak{A}^2 \xi^2 + \mathfrak{B}^2 \eta^2 + \mathfrak{C}^2 \zeta^2 \quad \ldots \quad (81.$$

und zeigt, daß die drei Achsen desselben den Zugkräften $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verkehrt proportional sind, und daß daher unter diesen die kleinste und die größte geometrische Spannung unter allen, welche um den Punkt M herum stattfinden, enthalten ist.

Die Spannung T ist im Allgemeinen nicht nach dem Fahrstrahl r gerichtet, da dieser normal zur Schnittebene ist, und man hat für den Winkel ϑ, welchen die Richtung von T mit dem Fahrstrahl bildet, die Beziehung:

$$T \cos \vartheta = T_x \cos \lambda + T_y \cos \mu + T_z \cos \nu ,$$

worin $T \cos \vartheta$ offenbar die zur Schnittebene normale Componente von T vorstellt. Führt man dann die Werthe (a) für T_x, T_y und T_z ein, so kann man den Ausdruck für $T \cos \vartheta$ in doppelter Weise ordnen; einmal hat man

$$\left.\begin{aligned} T \cos \vartheta = & (A_x \cos \lambda + B_x \cos \mu + C_x \cos \nu) \cos \lambda \\ & + (A_y \cos \lambda + B_y \cos \mu + C_y \cos \nu) \cos \mu \\ & + (A_z \cos \lambda + B_z \cos \mu + C_z \cos \nu) \cos \nu \end{aligned}\right\} \quad (c.$$

und dann wird auch

$$\left.\begin{aligned} T \cos \vartheta = & (A_x \cos \lambda + A_y \cos \mu + A_z \cos \nu) \cos \lambda \\ & + (B_x \cos \lambda + B_y \cos \mu + B_z \cos \nu) \cos \mu \\ & + (C_x \cos \lambda + C_y \cos \mu + C_z \cos \nu) \cos \nu \end{aligned}\right\} \quad (c'.$$

und die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke führt unmittelbar ohne die Gleichungen (76) zu den Beziehungen (80^a) und (80^b), in welchen jene selbst enthalten sind.

Bezeichnen wir nun diesen Beziehungen gemäß, die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der innern Kraft $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_\xi$,

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, die der Spannung $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}_\eta$, $\mathfrak{F}$, und die der Kraft $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}_\zeta$, so gehen die Bedingungen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \ , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \ , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0$$

in die folgenden über

$$82^a.)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} = 0 \ , \\ (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta)\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{F} = 0 \ , \\ (\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta)\mathfrak{F} + \mathfrak{D}\mathfrak{E} = 0 \ , \end{cases}$$

und geben die neuen Bedingungen:

$$d.)\qquad \mathfrak{D} = 0 \ , \quad \mathfrak{E} = 0 \ , \quad \mathfrak{F} = 0 \ ,$$

oder

$$e.)\quad \begin{cases} \mathfrak{D}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta)(\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta) \ , \quad \mathfrak{E}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)(\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta) \\ \mathfrak{F}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)(\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta) \ . \end{cases}$$

Die drei ersten derselben führen auf die weitere Folgerung:

$$\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A} \ , \quad \mathfrak{B}_\eta = \mathfrak{B} \ , \quad \mathfrak{C}_\zeta = \mathfrak{C}$$

und zeigen dadurch, daß die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach den Achsen der ξ, η, ζ selbst, also normal zu ihren Schnittebenen gerichtet sind; wir wollen sie daher **Hauptspannungen** für den Punkt M nennen; ihre Richtungen, oder die Achsen des Ellipsoids (81) die **Spannungs-Achsen** und dieses Ellipsoid selbst **Ellipsoid der Spannungen** für den Punkt M.

Aus dem Vorhergehenden werden wir demnach den Schluß ziehen, daß es für jeden Punkt eines stetigen Systems drei unter sich rechtwinklige Spannungsachsen gibt, oder drei senkrechte Schnittebenen, zu welchen der geometrische Zug oder Druck normal gerichtet ist.

Die Bedingungen (e) führen durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_\xi^2 + \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2 \ , \quad \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}_\eta^2 + \mathfrak{F}^2 \ , \quad \text{u. s. f.}$$

zu den Bedingungen:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{C}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta)^2 ,$$

sie entsprechen also nur dem besondern Falle, wo die Spannungen in drei unter sich senkrechten Schnittebenen gleich sind; in diesem Falle geht aber das Ellipsoid (81) in eine Kugelfläche über und zeigt, daß dann die Spannungen für alle Schnittflächen gleich sind. Ich werde auf diesen Fall zurückkommen.

Nach dem Vorhergehenden können wir nun die Größe der drei Hauptspannungen und die Lage der Spannungsachsen in Bezug auf drei andere unter sich rechtwinkliche Achsen, für welche die geometrischen Spannungen A, B, C der Größe und Richtung nach bekannt sind, dadurch bestimmen, daß wir die Lage der Normalen einer Schnittebene in dem Punkte M suchen, in welcher die geometrische Spannung T normal zu derselben gerichtet ist. Für diese Schnittebene wird die Richtung der entsprechenden Spannung, die wir mit $\widehat{T}$ bezeichnen wollen, mit dem entsprechenden Fahrstrahl $\widehat{r}$ zusammenfallen, man wird also haben

$$\widehat{T}_x = \widehat{T} \cos\lambda \quad , \quad \widehat{T}_y = \widehat{T} \cos\mu \quad , \quad \widehat{T}_z = \widehat{T} \cos\nu$$

woraus sich mit den Werthen (a) die Bedingungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} (\widehat{T} - A_x) \cos\lambda - B_x \cos\mu - C_x \cos\nu = 0 \\ (\widehat{T} - B_y) \cos\mu - A_y \cos\lambda - C_y \cos\nu = 0 \\ (\widehat{T} - C_z) \cos\nu - A_z \cos\lambda - B_z \cos\mu = 0 \end{aligned}\right\} . \qquad \text{(f.}$$

Eliminirt man aus diesen die Winkel-Functionen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, und ersetzt die Größen $B_x = A_y$ durch D, $C_x = A_z$ durch E, $C_y = B_z$ durch F, so findet man die nachstehende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} (\widehat{T} - A_x)(\widehat{T} - B_y)(\widehat{T} - C_z) - F^2(\widehat{T} - A_x) \\ - E^2(\widehat{T} - B_y) - D^2(\widehat{T} - C_z) + 2DEF = 0 \end{aligned}\right\} , \qquad (82^b.$$

welche in Bezug auf $\widehat{T}$ vom dritten Grade ist und durch ihre drei Wurzeln die Größe der drei Hauptspannungen gibt. Hat man

diese bestimmt, so wird man mittels der Gleichungen (f) und der Bedingungsgleichung:

$$cos^2 \lambda + cos^2 \mu + cos^2 \nu = 1$$

die entsprechenden Werthe von λ, μ, ν für die Richtungen der Normalen zu den betreffenden Schnittebenen oder für die Richtungen der Spannungsachsen erhalten.

In Bezug auf die Spannungsachsen und mit den Hauptspannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hat man nun für die Componenten der Spannung T in einer beliebigen Schnittebene, deren Normale die Winkel λ, μ, ν mit jenen Achsen bildet, die einfachen Werthe:

$$T_\xi = \mathfrak{A} \cos\lambda \quad , \qquad T_\eta = \mathfrak{B} \cos\mu \quad , \qquad T_\zeta = \mathfrak{C} \cos\nu \quad ,$$

und für die Winkel $\widehat{T\xi}$, $\widehat{T\eta}$, $\widehat{T\zeta}$, welche ihre Richtung mit jenen Achsen einschließt, die Functionen:

$$\cos \widehat{T\xi} = \frac{\mathfrak{A}}{T} \cos\lambda = \mathfrak{A}\,\xi \quad , \qquad \cos \widehat{T\eta} = \frac{\mathfrak{B}}{T} \cos\mu = \mathfrak{B}\,\eta$$

$$\cos \widehat{T\zeta} = \frac{\mathfrak{C}}{T} \cos\nu = \mathfrak{C}\,\zeta \;;$$

man schließt daraus, daß diese Richtung normal ist zu einer Fläche, welche durch die Gleichung:

83) $$\mathfrak{A}\,\xi_,^2 + \mathfrak{B}\,\eta_,^2 + \mathfrak{C}\,\zeta_,^2 = \pm 1$$

vorgestellt wird, und zwar in dem Punkte, wo der durch den Punkt $\xi \eta \zeta$ des Ellipsoids gezogene Fahrstrahl $r_,$ dieselbe schneidet, für welchen man also die Beziehungen hat:

$$\xi_, = r_, \cos\lambda = r_, \frac{\xi}{r} \;, \quad \eta_, = r_, \cos\mu = r_, \frac{\eta}{r} \;, \quad \zeta_, = r_, \cos\nu = r_, \frac{\zeta}{r} \;.$$

Denn die Winkel $\lambda_,$, $\mu_,$, $\nu_,$, welche die Normale in dem Punkte $\xi_, \eta_, \zeta_,$ der Fläche (83) mit den Achsen bildet, werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda_{,} = \frac{\mathfrak{A}\xi_{,}}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi_{,}^2+\mathfrak{B}^2\eta_{,}^2+\mathfrak{C}^2\zeta_{,}^2}} \quad , \qquad \cos\mu_{,} = \frac{\mathfrak{B}\eta_{,}}{\mathfrak{A}\xi_{,}}\cos\lambda_{,}$$

$$\cos\nu_{,} = \frac{\mathfrak{C}\zeta_{,}}{\mathfrak{A}\xi_{,}}\cos\lambda_{,} \; ,$$

und wenn man für $\xi_{,}$, $\eta_{,}$, $\zeta_{,}$ die vorstehenden Werthe einführt und die Gleichung (81) beachtet, so findet man

$$\cos\lambda_{,} = \mathfrak{A}\xi \quad , \quad \cos\mu_{,} = \mathfrak{B}\eta \quad , \quad \cos\nu_{,} = \mathfrak{C}\zeta \; ,$$

wie behauptet wurde.

Man wird aus dieser Betrachtung leicht schließen, daß der zum Punkte $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ der Fläche (83) vom Mittelpunkte aus gezogene Fahrstrahl $r_{,}$ der Quadratwurzel aus der zur entsprechenden Schnittebene normalen Componenten $T\cos\vartheta$ verkehrt proportional sein wird, und in der That gibt die Gleichung (c) oder (c′) unter der Form:

$$T\cos\vartheta = A_x\cos^2\lambda + B_y\cos^2\mu + C_z\cos^2\nu$$
$$+ 2D\cos\lambda\cos\mu + 2E\cos\lambda\cos\nu + 2F\cos\mu\cos\nu \; ,$$

wenn darin $\cos\lambda = \frac{x_{,}}{r_{,}}$, $\cos\mu = \frac{y_{,}}{r_{,}}$, $\cos\nu = \frac{z_{,}}{r_{,}}$ und $T\cos\vartheta = \pm\frac{1}{r_{,}^2}$ gesetzt wird, je nach dem Sinn, in welchem diese normale Spannung wirkt, je nachdem sie nämlich einen geometrischen Zug oder Druck vorstellt, die Gleichung:

$$A_x x_{,}^2 + B_y y'^2 + C_z z'^2 + 2Dx_{,}y_{,} + 2Ex_{,}z_{,} + 2Fy_{,}z_{,} = \pm 1 \; , \quad (84.$$

welche die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades mit einem Mittelpunkte vorstellt, auf diesen Mittelpunkt als Anfangspunkt aber auf beliebige Achsen bezogen. Läßt man dann diese Achsen wieder mit den Achsen der Fläche zusammenfallen, so hat man für diese wieder und nur die Bedingungen:

$$\mathfrak{D} = 0 \quad , \quad \mathfrak{E} = 0 \quad , \quad \mathfrak{F} = 0 \; .$$

also auch

$$\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B}_\eta = \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}_\zeta = \mathfrak{C} \; ;$$

die vorstehende Gleichung kommt dadurch auf die Gleichung (83) zurück und zeigt, daß die entsprechende Fläche verschiedene Gestalten annehmen wird, je nachdem die Zeichen der Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschieden sind oder nicht; daß aber in allen Fällen ihre drei Achsen den Quadratwurzeln dieser Hauptspannungen verkehrt proportional sind, und mit den Spannungsachsen zusammenfallen.

Wenn die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleiche Zeichen haben, also jede derselben einen geometrischen Zug, oder jede einen geometrischen Druck vorstellt, so ist diese Fläche ein Ellipsoid, und alle Spannungen haben um den Punkt M herum gleichen Sinn. Sind dagegen die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dem Sinne ihrer Wirkung nach verschieden, indem die eine einen Druck, jede der beiden andern einen Zug vorstellt, oder umgekehrt, so haben sie verschiedene Zeichen und die Gleichung (83) stellt dann die beiden conjugirten Hyperboloide

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{C}\zeta_{\prime}^2 - \mathfrak{A}\xi_{\prime}^2 - \mathfrak{B}\eta_{\prime}^2 &= +1 \\ \mathfrak{C}\zeta_{\prime}^2 - \mathfrak{A}\xi_{\prime}^2 - \mathfrak{B}\eta_{\prime}^2 &= -1 \end{aligned}\right.$$

vor, welche den Asymptoten-Kegel:

$$\mathfrak{C}\zeta_{\prime}^2 - \mathfrak{A}\xi_{\prime}^2 - \mathfrak{B}\eta_{\prime}^2 = 0$$

gemeinschaftlich haben, und von denen das zweite einen, das erste zwei Mäntel hat. In diesem Falle muß natürlich der Sinn der Spannungen um den Punkt M herum wechseln; wenn der verlängerte Fahrstrahl des Ellipsoids der Spannungen das Hyperboloid mit einem Mantel schneidet, so hat die Spannung denselben Sinn, wie diejenigen Hauptspannungen, deren Achsen dasselbe schneiden, also nach den obigen Gleichungen, wie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; für diejenigen Richtungen dagegen, welche das Hyperboloid mit zwei Mäntel schneiden, ist der Sinn der Spannung mit dem der Hauptspannung $\mathfrak{C}$ übereinstimmend. Den Uebergang von dem einen zum andern der beiden Hyperboloide bildet der Asymptotenkegel, und für diesen sind alle Normalen senkrecht zur Erzeugenden oder senkrecht zum Fahrstrahl; für diese Richtungen wirkt demnach die Spannung längs der betreffenden Schnittebene selbst, oder kommt auf einen bloßen geometrischen Schub zurück.

Zuletzt seien noch, um das allgemeine Gesetz der Spannungen um den Punkt M herum vollständig zu machen, T_1, T_2, T_3 die Spannungen für irgend drei unter sich senkrechte Schnittebenen, $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$,

$\cos\nu_1$, $\cos\lambda_2$, $\cos\mu_2$, u. s. f. die Winkel, welche die Normalen zu diesen Schnittebenen mit den Spannungs-Achsen bilden; man hat dann nach dem Vorhergehenden die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} T_1^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_1 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_1 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_1 \\ T_2^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_2 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_2 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_2 \\ T_3^2 = \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_3 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_3 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_3 \end{array}\right\},$$

und die Summe derselben gibt mit der Beachtung der Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2\lambda_1 + \cos^2\lambda_2 + \cos^2\lambda_3 = 1 \\ \cos^2\mu_1 + \cos^2\mu_2 + \cos^2\mu_3 = 1 \\ \cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3 = 1 \end{array}\right\},$$

welche ausdrücken, daß die Normalen zu den drei Schnittebenen senkrecht unter sich sind, die Beziehung:

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 \,. \qquad (84^a.$$

Man zieht daraus den Schluß, daß **die Summe der Quadrate der Spannungen in irgend drei unter sich senkrechten ebenen Schnitten im Punkte M eine unveränderliche Größe und der Summe der Quadrate der drei Hauptspannungen gleich ist***).

In gleicher Weise hat man aber auch durch die Gleichung (83) für die zu ihren Schnittebenen normalen Componenten $T_1 \cos\vartheta_1$, $T_2 \cos\vartheta_2$, $T_3 \cos\vartheta_3$ dieser Spannungen die Werthe:

---

*) Dieser Satz führt nach der obigen geometrischen Betrachtung für das Ellipsoid auf die Eigenschaft, daß wenn r_1, r_2, r_3 drei unter sich senkrechte Fahrstrahlen vom Mittelpunkt aus, a, b, c die drei Halbachsen desselben bezeichnen, man immer hat:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

und hätte auch umgekehrt aus dieser Eigenschaft abgeleitet werden können, welche übrigens nicht mit einer andern Beziehung:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

worin a′, b′, c′ drei conjugirte Halbmesser bedeuten, zu verwechseln ist und weniger bekannt sein dürfte, als diese.

$$\begin{cases} T_1 \cos\vartheta_1 = \mathfrak{A}\cos^2\lambda_1 + \mathfrak{B}\cos^2\mu_1 + \mathfrak{C}\cos^2\nu_1 \\ T_2 \cos\vartheta_2 = \mathfrak{A}\cos^2\lambda_2 + \mathfrak{B}\cos^2\mu_2 + \mathfrak{C}\cos^2\nu_2 \\ T_3 \cos\vartheta_3 = \mathfrak{A}\cos^2\lambda_3 + \mathfrak{B}\cos^2\mu_3 + \mathfrak{C}\cos^2\nu_3 \end{cases}$$

und leitet daraus wie vorher die Beziehung ab:

84[b].) $T_1 \cos\vartheta_1 + T_2 \cos\vartheta_2 + T_3 \cos\vartheta_3 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$,

welche ausspricht, daß auch die Summe der normalen Spannungen in drei unter sich rechtwinklichen Schnittebenen constant, und der Summe der drei Hauptspannungen gleich ist, die selbst normal zu ihren Schnittebenen sind.

§. 41.

Wir haben oben schon einen Fall berührt, wo die Spannungen in drei unter sich rechtwinkligen Ebenen gleich sind, und daraus den Schluß gezogen, daß in diesem Falle das Ellipsoid der Spannungen in eine Kugelfläche übergeht und daher alle Spannungen gleich groß sein müssen. Es müssen aber dabei wieder zwei Fälle unterschieden werden, nämlich der, wo die Spannungen auch in gleichem Sinne wirken, und der, wo es nicht der Fall ist. Im ersten Falle wird auch die Fläche (83) eine Kugelfläche und es können dann irgend drei unter sich senkrechte Geraden als Spannungsachsen genommen werden, da nun alle Spannungen auch normal zu ihren betreffenden Schnittebenen wirken. Im andern Falle dagegen wird die Fläche (83) zwar noch eine Umdrehungs-Fläche, aber ein gleichachsiges Doppel-Hyperboloid mit einem rechtwinkligen Asymptotenkegel; es gibt also hier noch eine besondere Hauptspannung und eine Spannungsachse, obgleich das Ellipsoid der Spannungen noch eine Kugelfläche ist und keine besondern Achsen mehr hat, und diese besondere Spannungsachse ist die Achse des Hyperboloids mit zwei Mänteln. Dieser Fall ist durch die Bedingungen (e) vorgesehen; denn führt man diese unter der Form:

$$D^2 = (A_x + C_z)(B_y + C_z) \quad , \qquad E^2 = (A_x + B_y)(B_y + C_z)$$

$$F^2 = (A_x + B_y)(A_x + C_z) \; ,$$

in die Gleichung (82[b]) ein, und beachtet, daß man damit

$$A^2 = A_x^2 + D^2 + E^2 = (A_x + B_y + C_z)^2$$

erhält, so wird diese die Form:

$$\widehat{T}^3 - A\widehat{T}^2 - A^2\widehat{T} + A^3 = 0$$

oder

$$(\widehat{T} - A)(\widehat{T} - A)(\widehat{T} + A) = 0$$

annehmen, sie hat also drei gleiche Wurzeln, aber von verschiedenen Zeichen.

Führt man dann diese Werthe in die Gleichungen (f) ein, um die Winkel λ, μ, ν der Richtung der Achsen zu bestimmen, so erhalten diese nur bestimmte Werthe für $\widehat{T} = -A$, und man findet unter Berücksichtigung der ursprünglichen Bedingungen (82[a]), nachdem darin die entsprechenden Vertauschungen in Bezug auf $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\eta$, $\mathfrak{D}$, u. s. f. vorgenommen worden, den Ausdruck:

$$\cos^2 \lambda = \frac{D^2E^2}{D^2E^2 + D^2F^2 + E^2F^2},$$

welcher mit den vorhergehenden Werthen von D^2, E^2 und F^2 die einfache Form

$$\cos^2 \lambda = \frac{A_y + C_z}{2(A_x + B_y + C_z)} = \frac{A - A_x}{2A}$$

annimmt, und woraus sich die Werthe von $\cos^2 \mu$, $\cos^2 \nu$ nach den Regeln der Symmetrie leicht ableiten lassen.

Wenn nun zwei der drei Hauptspannungen gleich werden, so wird das Ellipsoid (81) eine Umdrehungs-Ellipsoid; es werden daher die Spannungen für alle Schnitte, deren Normalen mit der dritten einzelnen Achse (der Umdrehungsachse) gleiche Winkel bilden, einander gleich; ebenso werden die Flächen (83) Umdrehungsflächen und zeigen, daß in allen jenen Schnitten die Spannungen auch auf gleiche Weise gerichtet sind, daß sie also in allen Schnitten, welche parallel zur dritten Achse sind, normal zu ihren Schnittebenen wirken, folglich auch alle Hauptspannungen sind, vorausgesetzt jedoch, daß die beiden gleichen Hauptspannungen auch in gleichem Sinne wirken.

Wenn diese beiden Spannungen dem Sinne nach entgegengesetzt sind, so unterscheidet sich das Gesetz (83) nicht wesentlich von dem allgemeinen Falle, wo die Hauptspannungen alle drei ungleich sind und eine den beiden andern dem Sinne nach entgegengesetzt ist. Es gibt dann nur drei Spannungen, welche normal zu ihren Schnittebenen wirken, also nur drei Hauptspannungen, und diese besondern Fälle werden es einleuchtend machen, daß es für die Bestimmung der Haupt-

spannungen nicht genügt, das Ellipsoid der Spannungen allein zu betrachten.

Endlich haben wir noch die Fälle zu untersuchen, wo eine oder zwei der Hauptspannungen Null sind. Im ersten Falle sei $\mathfrak{C} = 0$, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von gleichem Sinne; es gehen dann die Gleichungen (81) und (83) in

$$\mathfrak{A}^2 \xi^2 + \mathfrak{B}^2 \eta^2 = 1 ,$$

$$\mathfrak{A} \xi_{,}^2 + \mathfrak{B} \eta_{,}^2 = 1 ,$$

über und stellen nun elliptische Cylinder vor, deren Erzeugende zur Ebene der $\xi\eta$ senkrecht ist, und die zweite Fläche zeigt, daß nun alle Spannungen zu der Ebene der beiden Spannungsachsen parallel gerichtet sind, und daß wieder insbesondere die Spannungen für alle Schnitte, welche die ebengenannte Ebene nach derselben Geraden schneiden, unter sich parallele Richtungen haben. Diese Folgerungen bestehen auch für den Fall, in dem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in entgegengesetztem Sinne wirken, und die Fläche (83) unter der Form:

$$\mathfrak{A} \xi_{,}^2 - \mathfrak{B} \eta_{,}^2 = \pm 1$$

in zwei conjugirte hyperbolische Cylinderflächen mit zwei Asymptoten-Ebenen übergeht. Im letztern Falle gibt es aber wieder viele Richtungen, in denen die Spannung parallel zu der betreffenden Schnittebene gerichtet, also nur ein geometrischer Schub ist, und zwar findet dieß für alle Schnitte statt, welche senkrecht zu den beiden vorgenannten Asymptoten-Ebenen durch den Punkt M gelegt werden.

Wenn zwei der Hauptspannungen, z. B. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, Null sind, so kommt jede der Gleichungen (81) und (83) auf die zweier Ebenen zurück, welche zu der entsprechenden Spannungsachse senkrecht und vom Anfangspunkt um die Größen

$$\xi = \pm \frac{1}{\mathfrak{A}} , \quad \xi_{,} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$$

entfernt sind. Aus der ersten schließt man, daß nun die Spannungen wie die Cosinus der Neigungswinkel der Schnitt-Normalen gegen die Spannungsachse abnehmen, oder daß man hat

$$T = \mathfrak{A} \cos \lambda ,$$

und aus der zweiten folgt, daß alle Spannungen zu der Hauptspannung A parallel sind, was übrigens auch leicht aus den andern bisher abgeleiteten Beziehungen, namentlich aus den Gleichungen (80ᵇ) hervorgeht.

§. 42.

Nachdem wir durch die vorhergehende Betrachtung das Gesetz, nach welchem sich die Spannungen um den Punkt M herum regeln, kennen gelernt haben, kehren wir zu unsern Gleichungen der innern Bewegung dieses Punktes zurück. Dieser Gleichungen sind nur drei, und diese drei Gleichungen enthalten zehn Unbekannte, nämlich die drei normalen Spannungen T_x, T_y, T_z, die drei zur Schnittebene parallelen, tangentialen oder verschiebenden Spannungen S_z, S_y und S_x, die drei Geschwindigkeitscomponenten u_x', u_y', u_z' und die Dichte q. Zwischen den vier letztern Veränderlichen haben wir aber noch die durch die Gleichung (71) ausgedrückte Beziehung; es müssen demnach noch sechs neue Gleichungen gebildet werden, um die Aufgabe lösen zu können. Diese neuen Gleichungen hängen aber von der Natur des Systems ab, da sie die Beziehungen ausdrücken müssen, welche zwischen den sechs Spannungen T_x, T_y, S_x u. s. f. und den während einer beliebigen Zeit eingetretenen Aenderungen der Lage des Punktes M oder $x'y'z'$ in Bezug auf die übrigen Punkte des Systems bestehen, und welche nothwendig von den innern, zwischen diesen Punkten wirkenden Kräften abhängen, die sich jener Aenderung in der gegenseitigen Lage derselben widersetzen. Denn es leuchtet einerseits ein, daß zwischen zwei Punkten, welche gleiche und parallel gerichtete innere Geschwindigkeiten besitzen und daher immer dieselbe gegenseitige Lage und Entfernung behalten, keine Spannung stattfinden kann, daß aber eine solche Spannung entstehen wird, sobald eine Aenderung in ihrer gegenseitigen Entfernung oder Lage eintreten will, sobald die innere Geschwindigkeit des einen eine andere werden will, als die des andern, sei es der Größe oder Richtung nach. Dazu gehört aber auf der andern Seite, daß zwischen jenen Punkten innere Kräfte thätig sind, welche dieser eintretenden Aenderung in der gegenseitigen Lage Widerstand leisten; wenn in einer oder in der andern Richtung und in einem bestimmten Sinne genommen ein solcher innerer Widerstand fehlt, wie dieß z. B. bei den flüssigen Systemen vorausgesetzt wird, so kann in dieser Richtung und in diesem Sinne auch von keiner Spannung die Rede sein. Wir können deshalb jene Beziehungen zwischen den Spannungen und den von der Zeit unabhängigen Aenderungsgesetzen der Lage eines Punktes nur für Systeme von bestimmter Natur, unter bestimmten Voraussetzungen über

die Beschaffenheit des innern Widerstandes aufstellen, was im dritten Kapitel dieses Abschnittes für die stetigen veränderlichen Systeme der festen Aggregatform, also mit vorherrschender Cohäsion, und im folgenden Buche für die flüssigen Systeme geschehen wird.

Die genannten Aenderungsgesetze der Lage eines Punktes gegen die ihn umgebenden, also nach verschiedenen Richtungen hin betrachtet, werden aber durch ein ganz ähnliches allgemeines Gesetz geregelt, wie die Spannungen um diesen Punkt herum, und diese allen stetigen Systemen zukommende Eigenschaft haben wir hier noch zu erörtern.

Dazu wollen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes M im System am Ende der Zeit t und auf das parallel fortschreitende Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt wieder der Mittelpunkt der ganzen Masse des Systems sei, einfach mit x, y, z bezeichnen, und mit

$$x^{(0)} = x - \mathfrak{x} \quad , \quad y^{(0)} = y - \mathfrak{y} \quad , \quad z^{(0)} = z - \mathfrak{z}$$

die Coordinaten desselben materiellen Punktes M am Ende der Zeit t_0, so daß $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen Aenderungen seiner ursprünglichen Coordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ vorstellen, und daher als Functionen der vier unabhängigen Veränderlichen x, y, z und t betrachtet werden müssen. Für einen andern Punkt M', dessen Coordinaten am Ende der Zeit t durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezeichnet werden können, wird man am Ende der Zeit t_0 die Coordinaten

$$x - \mathfrak{x} + \Delta(x - \mathfrak{x}) \quad , \quad y - \mathfrak{y} + \Delta(y - \mathfrak{y}) \quad , \quad z - \mathfrak{z} + \Delta(z - \mathfrak{z})$$

gehabt haben, während also am Ende der Zeit t die Projectionen der gegenseitigen Entfernung

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

der beiden Punkte M und M' auf den Coordinaten-Achsen durch Δx, Δy, Δz gemessen werden, waren dieselben am Ende der Zeit t_0 nur

$$\Delta x - \Delta \mathfrak{x} \quad , \quad \Delta y - \Delta \mathfrak{y} \quad , \quad \Delta z - \Delta \mathfrak{z} \; ;$$

es werden demnach die Unterschiede $\Delta \mathfrak{x}$, $\Delta \mathfrak{y}$, $\Delta \mathfrak{z}$ dieser Projectionen die während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen Aenderungen jener Entfernung parallel zu den Coordinaten-Achsen genommen vorstellen, und die Anfangswerthe der Verhältnisse $\frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta s}$, $\frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta s}$, $\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\Delta s}$ dieser Aenderungen

zu der am Ende der Zeit t stattfindenden Entfernung Δs, oder die Uebergangsgesetze:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}\,,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}\,,\quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s}\,,$$

worin wieder s als eine Veränderliche zu betrachten ist, von welcher x, y, z willkürliche Functionen sind, können demnach als die Projectionen der während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen geometrischen Verlängerung oder Verkürzung, der positiven oder negativen **geometrischen Dehnung** des Systems in dem Punkte xyz bezeichnet werden, und zwar für diejenige Uebergangs-Richtung, welche durch die Functionen $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \cos\beta$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \cos\gamma$ bestimmt wird. Diese Uebergangs-Richtung darf aber nicht mit der Richtung der geometrischen Dehnung selbst verwechselt werden; denn diese wird durch die gegenseitigen Verhältnisse der Aenderungen $\Delta\mathfrak{x}$, $\Delta\mathfrak{y}$, $\Delta\mathfrak{z}$ bedingt, welche selbst wieder von jener Uebergangs-Richtung abhängen, sich mit dieser ändern.

Bezeichnen wir demnach diese positive oder negative geometrische Dehnung in dem Punkte xyz und für eine beliebige Uebergangs-Richtung mit $\mathfrak{d}$, ihre Projectionen oder Componenten nach den Coordinaten-Achsen mit $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, die Winkel ihrer Richtung mit diesen Achsen durch $\widehat{\mathfrak{d}x}$, $\widehat{\mathfrak{d}y}$, $\widehat{\mathfrak{d}z}$, so haben wir zuerst die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{d}_x = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}x} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s} &= \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\\
&= \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\cos\gamma\\
\mathfrak{d}_y = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial s} &= \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}\cos\gamma\\
\mathfrak{d}_z = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial s} &= \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma
\end{aligned}\right\}, \quad (a.$$

und wenn dann ϑ der Winkel ist zwischen der Richtung der Dehnung $\mathfrak{d}$ und der Uebergangsrichtung, so wird auch

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \mathfrak{d}_x\cos\alpha + \mathfrak{d}_y\cos\beta + \mathfrak{d}_z\cos\gamma\,, \qquad (b.$$

und mit den Werthen (a) nimmt diese Gleichung die doppelte Form an

$$\text{c.)}\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{d}\cos\vartheta = &\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\alpha\ ,\\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\beta\ ,\\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma\ ,\end{aligned}\right.$$

oder

$$\text{c}'.)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{d}\cos\vartheta = &\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha\ ,\\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta\ ,\\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma\ ,\end{aligned}\right.$$

welche zeigt, daß sowohl $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}$ als $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}$ die rechtwinkligen Componenten der geometrischen Dehnung $\mathfrak{a}$ für den zur Achse der x parallelen Uebergang vorstellen, daß man also

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \mathfrak{a}_x\quad,\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} = \mathfrak{a}_y\quad,\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x} = \mathfrak{a}_z$$

setzen kann; ebenso können $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}$ oder $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}$ als die Componenten $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$ der Dehnung $\mathfrak{b}$ für den zur Achse der y parallelen Uebergang, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}$ oder $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}$ als die Componenten $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$ der Dehnung $\mathfrak{c}$ für den zur Achse der z parallelen Uebergang genommen werden, und es folgen daraus die Beziehungen:

$$\text{85.)}\qquad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\ ,$$

welche den Gleichungen (76) für die Spannungen entsprechen und eine merkwürdige Uebereinstimmung zwischen den Spannungs- und Dehnungsverhältnissen um den Punkt M herum beurkunden.

Diese Uebereinstimmung wird indessen noch augenfälliger, wenn wir die Werthe (a) unter der Form

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_x &= \mathfrak{a}_x \cos\alpha + \mathfrak{b}_x \cos\beta + \mathfrak{c}_x \cos\gamma \\ \mathfrak{d}_y &= \mathfrak{a}_y \cos\alpha + \mathfrak{b}_y \cos\beta + \mathfrak{c}_y \cos\gamma \\ \mathfrak{d}_z &= \mathfrak{a}_z \cos\alpha + \mathfrak{b}_z \cos\beta + \mathfrak{c}_z \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (d.$$

in die Gleichung:

$$\mathfrak{d}^2 = \mathfrak{d}_x^2 + \mathfrak{d}_y^2 + \mathfrak{d}_z^2$$

einführen, und in der dadurch zum Vorschein kommenden Gleichung

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x'}{r} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y'}{r} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z'}{r}$$

setzen, wodurch sie mit der Beachtung der Beziehungen:

$$\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2 = \mathfrak{a}^2 \quad , \quad \mathfrak{b}_x^2 + \mathfrak{b}_y^2 + \mathfrak{b}_z^2 = \mathfrak{b}^2 \, ,$$

$$\mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_z = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos \widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \, ,$$

u. s. f.

die Form:

$$\left.\begin{aligned} 1 = \mathfrak{a}^2 x'^2 + \mathfrak{b}^2 y'^2 + \mathfrak{c}^2 z'^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.x'y' \\ + 2\mathfrak{a}\mathfrak{c} \cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}.x'z' + 2\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cos\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.y'z' \end{aligned}\right\} \quad (86.$$

annimmt und so wieder die Gleichung eines Ellipsoides vorstellt, auf den Mittelpunkt aber auf beliebige Achsen bezogen, dessen Fahrstrahl der geometrischen Dehnung, welche in der durch den Fahrstrahl angedeuteten Uebergangsrichtung stattfindet, verkehrt proportional ist, und dessen Achsen die Richtungen angeben, nach welchen die Dehnung eine größte und eine kleinste ist unter allen, die um den Punkt M herum statthaben.

Die auf die Uebergangsrichtung oder auf den Fahrstrahl projicirte Dehnung $\mathfrak{d} \cos\vartheta$ dagegen wird durch eine Fläche von der Form:

$$\mathfrak{a}_x x_,^2 + \mathfrak{b}_y y_,^2 + \mathfrak{c}_z z_,^2 + 2\mathfrak{f} x_, y_, + 2\mathfrak{g} x_, z_, + 2\mathfrak{h} y_, z_, = \pm 1 \quad (87.$$

anschaulich gemacht, welche aus dem Ausdruck (b) hervorgeht, wenn man in denselben die Werthe (d) einführt, der Symmetrie wegen die

in den Gleichungen (85) gleichgesetzten Coeffizienten oder ihre halben Summen: $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)$ durch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ bezeichnet und dann

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \pm\frac{1}{r_,^2}\;, \quad \cos\alpha = \frac{x_,}{r_,}\;, \quad \cos\beta = \frac{y_,}{r_,}\;, \quad \cos\gamma = \frac{z_,}{r_,}$$

setzt. Die Normale in dem Punkte $x,y,z,$ dieser Fläche bildet mit den Coordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, welche durch die Gleichungen:

$$V_,\cos\lambda = \mathfrak{a}_x x_, + \mathfrak{f} y_, + \mathfrak{g} z_,\;, \quad V_,\cos\mu = \mathfrak{f} x_, + \mathfrak{b}_y y_, + \mathfrak{h} z_,\;,$$
$$V_,\cos\nu = \mathfrak{g} x_, + \mathfrak{h} y_, + \mathfrak{c}_z z_,\;,$$

worin $V_,$ den Ausdruck:

$$\left[(\mathfrak{a}_x x_, + \mathfrak{f} y_, + \mathfrak{g} z_,)^2 + (\mathfrak{f} x_, + \mathfrak{b}_y y_, + \mathfrak{h} z_,)^2 + (\mathfrak{g} x_, + \mathfrak{h} y_, + \mathfrak{c}_z z_,)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt, bestimmt werden. Man wird sich aber durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Werthen von $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$ und dem daraus folgenden von $\mathfrak{d} = \sqrt{\mathfrak{d}_x^2 + \mathfrak{d}_y^2 + \mathfrak{d}_z^2}$ und mit Beachtung der Gleichungen (85) leicht überzeugen, daß man hat

$$V_,\cos\lambda = r_,\mathfrak{d}_x\;, \quad V_,\cos\mu = r_,\mathfrak{d}_y\;, \quad V_,\cos\nu = r_,\mathfrak{d}_z\;, \quad V_, = r_,\mathfrak{d}\;,$$

also auch

$$\cos\lambda = \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{d}}\;, \quad \cos\mu = \frac{\mathfrak{d}_y}{\mathfrak{d}}\;, \quad \cos\nu = \frac{\mathfrak{d}_z}{\mathfrak{d}}\;;$$

und wird daraus schließen, daß die Richtung der Dehnung $\mathfrak{d}$ für die durch den Fahrstrahl angedeutete Uebergangsrichtung mit der Normalen im Endpunkt des Fahrstrahls zusammenfällt.

Längs der drei Achsen der Fläche (87) fällt die Richtung des Fahrstrahles mit der der Normalen zusammen, folglich auch die Richtung der Dehnung mit der Richtung des Ueberganges, und wenn die Gleichung der Fläche auf diese Achsen bezogen wird, so nimmt sie die einfache Form:

$$\widehat{\mathfrak{a}}\xi^2 + \widehat{\mathfrak{b}}\eta^2 + \widehat{\mathfrak{c}}\zeta^2 = \pm 1$$

an und zeigt, daß die Dehnungen um den Punkt M herum wieder von drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$, $\widehat{\mathfrak{c}}$ abhängen, deren entsprechende Uebergangsrichtungen und eigene Richtungen durch die Achsen dieser Fläche, welche auch mit denen des Ellipsoids (86) zusammentreffen, und die man demnach die Dehnungsachsen nennen kann, bestimmt werden.

Die Lage dieser Dehnungsachsen wird aus den als bekannt vorausgesetzten Dehnungsverhältnissen nach drei beliebigen Achsen mittels der vorhergehenden Eigenschaft in ähnlicher Weise bestimmt, wie die Lage der Spannungsachsen. Wenn $\widehat{\mathfrak{d}}$ eine der drei Hauptdehnungen bezeichnet, und λ, μ, ν die Winkel sind, welche ihre Richtung und die entsprechende Uebergangsrichtung mit den drei Achsen der x, y, z, bildet, so hat man gemäß der Werthe (d)

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{d}}_x &= \widehat{\mathfrak{d}} \cos\lambda = \mathfrak{a}_x \cos\lambda + \mathfrak{b}_x \cos\mu + \mathfrak{c}_x \cos\nu \\
\widehat{\mathfrak{d}}_y &= \widehat{\mathfrak{d}} \cos\mu = \mathfrak{a}_y \cos\lambda + \mathfrak{b}_y \cos\mu + \mathfrak{c}_y \cos\nu \\
\widehat{\mathfrak{d}}_z &= \widehat{\mathfrak{d}} \cos\nu = \mathfrak{a}_z \cos\lambda + \mathfrak{b}_z \cos\mu + \mathfrak{c}_z \cos\nu
\end{aligned}\right\}$$

oder wenn für die $\mathfrak{b}_x$ und $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{c}_x$ und $\mathfrak{a}_z$, u. s. f. wieder die Bezeichnung $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ eingeführt wird

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x)\cos\lambda - \mathfrak{f}\cos\mu - \mathfrak{g}\cos\nu &= 0 \\
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y)\cos\mu - \mathfrak{f}\cos\lambda - \mathfrak{h}\cos\nu &= 0 \\
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z)\cos\nu - \mathfrak{g}\cos\lambda - \mathfrak{h}\cos\mu &= 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (e.$$

und die Elimination der Winkelfunctionen aus diesen drei Gleichungen führt zu der Schlußgleichung des dritten Grades:

$$\left.\begin{aligned}
&(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x)(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y)(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z) - \mathfrak{h}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x) - \mathfrak{g}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y) \\
&\quad - \mathfrak{f}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z) + 2\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h} = 0 ,
\end{aligned}\right\} (89.$$

durch deren Wurzeln die Größe der drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$ und $\widehat{\mathfrak{c}}$ gegeben ist. Werden diese dann eine nach der andern in die Gleichungen (e) eingeführt, so können daraus die entsprechenden Winkel λ, μ, ν

für jede derselben oder die Richtungen der drei Dehnungsachsen gefunden werden *).

*) Ein gleiches Verfahren kann in allen ähnlichen Fällen dazu dienen, die Lage und Größe der Halbachsen eines Ellipsoids oder Hyperboloids aus der allgemeinen Mittelpunktsgleichung abzuleiten, also insbesondere auch dazu die Lage der Hauptachsen und die entsprechenden Massemomente eines festen Systems zu bestimmen. Man hat dazu aus der Gleichung (129) des Ellipsoids der Massemomente in §. 163 des zweiten Buches für die Richtungswinkel λ, μ, ν der Normalen im Allgemeinen die Beziehungen:

$$\mathfrak{V}\cos\lambda = \mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta \;, \qquad \mathfrak{V}\cos\mu = \mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta \;,$$
$$\mathfrak{V}\cos\nu = \mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta \;,$$

worin $\mathfrak{V}$ den Ausdruck:

$$[(\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta)^2 + (\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta)^2 + (\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt. Für die Winkel eines Fahrstrahles $\mathfrak{r}$ mit den drei Coordinatenachsen der ξ, η, ζ hat man die Cosinus $\frac{\xi}{\mathfrak{r}}$, $\frac{\eta}{\mathfrak{r}}$, $\frac{\zeta}{\mathfrak{r}}$, und daher für die Lage der Halbachsen des Ellipsoids, welche zugleich Fahrstrahlen und Normalen sind, die Bedingungen:

$$\alpha.) \quad \frac{\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta}{\mathfrak{V}} = \frac{\xi}{\mathfrak{r}} \,, \quad \frac{\mathfrak{B}\eta = \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta}{\mathfrak{V}} = \frac{\eta}{\mathfrak{r}} \,, \quad \frac{\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta}{\mathfrak{V}} = \frac{\zeta}{\mathfrak{r}}$$

oder in anderer Form:

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta}{\xi} = \frac{\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta}{\eta} = \frac{\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta}{\zeta} \,.$$

Die Gleichung des Ellipsoids nimmt aber auch die Form an:

$$1 = (\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta)\,\xi + (\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta)\,\eta + (\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta)\,\zeta$$

und gibt mit den vorhergehenden Bedingungen die Werthe:

$$\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta = \frac{\xi}{\mathfrak{r}^2} \,, \quad \mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta = \frac{\eta}{\mathfrak{r}^2} \,, \quad \mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta = \frac{\zeta}{\mathfrak{r}^2} \,,$$
$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2} = \mathfrak{M} \,.$$

Man erhält damit aus den drei Gleichungen (α) die folgenden:

$$\beta.) \quad \begin{cases} (\mathfrak{M} - \mathfrak{A})\cos\lambda + \mathfrak{F}\cos\mu + \mathfrak{G}\cos\nu = 0 \,, \\ (\mathfrak{M} - \mathfrak{B})\cos\mu + \mathfrak{F}\cos\lambda + \mathfrak{H}\cos\nu = 0 \,, \\ (\mathfrak{M} - \mathfrak{C})\cos\nu + \mathfrak{G}\cos\lambda + \mathfrak{H}\cos\mu = 0 \,, \end{cases}$$

§. 43.

Wenn die drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$, $\widehat{\mathfrak{c}}$ gleichen Sinn haben, also alle drei zugleich eigentliche Ausdehnungen oder alle zugleich Stauungen vorstellen, dann wird die Fläche (88) ein Ellipsoid, welches keine weitern besondern Eigenschaften für die Dehnungen um den Punkt M herum kenntlich macht. Haben dagegen jene Hauptdehnungen verschiedenen Sinn, so daß zwei derselben z. B. $\widehat{\mathfrak{a}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}}$ Stauungen bedeuten, die dritte $\widehat{\mathfrak{c}}$ eine Ausdehnung, oder umgekehrt, so stellt die Gleichung (88) zwei conjugirte Hyperboloide mit einem gemeinschaftlichen Asymptotenkegel vor; das Hyperboloid mit zwei Mänteln umfaßt dann alle Uebergangsrichtungen, nach welchen die geometrische Dehnung denselben Sinn hat, wie die nach der reellen Achse dieser Fläche gerichtete dritte Hauptdehnung $\widehat{\mathfrak{c}}$; das Hyperboloid mit einem Mantel umfaßt alle Richtungen, nach welchen die Dehnung gleichen Sinn hat, wie die seinen beiden reellen Achsen entsprechenden Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}}$, und der Asymptotenkegel vereinigt diejenigen Richtungen, nach welchen die Richtung der Dehnung senkrecht ist zur Uebergangs-Richtung, nach denen also die Dehnungen in bloßen Verschiebungen bestehen, und daher weder eigentliche Dehnungen noch Stauungen sind.

Nach dem Vorhergehenden wird man nun für die Fälle, wo eine oder zwei der Hauptdehnungen Null sind, oder zwei derselben gleich werden, aus der Gleichung (88) für die Dehnungen um den Punkt M herum leicht ähnliche Folgerungen ziehen, wie die, welche wir im vorhergehenden §. für die Spannungen erhalten haben. Ebenso wird man noch aus dem Ellipsoid der Dehnungen, dessen Gleichung (86) in Bezug auf die Dehnungsachsen die Form:

$$\widehat{\mathfrak{a}}^2 \xi_{,}^2 + \widehat{\mathfrak{b}}^2 \eta_{,}^2 + \widehat{\mathfrak{c}}^2 \zeta_{,}^2 = 1 \qquad (90.$$

annimmt, den Schluß ziehen, daß wenn $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ die Dehnungen für irgend drei unter sich rechtwinklige Uebergangs-Richtungen sind,

---

aus welchen durch Elimination von λ, μ, ν wieder die Gleichung:

$$(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})(\mathfrak{M}-\mathfrak{B})(\mathfrak{M}-\mathfrak{C}) - \mathfrak{F}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{C}) - \mathfrak{G}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{B})$$
$$- \mathfrak{H}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) + 2\,\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0$$

hervorgeht, deren Wurzeln die Massemomente in Bezug auf die drei Hauptachsen geben, und einzeln in die vorhergehenden Gleichungen (β) eingeführt, zur Bestimmung der Richtungen dieser Hauptachsen dienen werden.

91a.) $$\mathfrak{d}_1^2 + \mathfrak{d}_2^2 + \mathfrak{d}_3^2 = \hat{\mathfrak{a}}^2 + \hat{\mathfrak{b}}^2 + \hat{\mathfrak{c}}^2 ,$$

daß also die Summe der Quadrate dieser drei Dehnungen immer der Summe der Quadrate der drei Hauptdehnungen gleich ist, und die Gleichung (88) führt wie dort zu der Beziehung:

91b.) $$\mathfrak{d}_1 \cos \vartheta_1 + \mathfrak{d}_2 \cos \vartheta_2 + \mathfrak{d}_3 \cos \vartheta_3 = \hat{\mathfrak{a}} + \hat{\mathfrak{b}} + \hat{\mathfrak{c}} ,$$

welche ausspricht, daß diese auf ihre Uebergangsrichtung projicirten Dehnungen ebenfalls eine unveränderliche Summe bilden, welche der Summe der drei Hauptdehnungen gleich ist.

Solche drei rechtwinklige Uebergangsrichtungen sind aber unsere ursprünglichen beliebigen Achsen der x', y', z' oder $x_,$, $y_,$, $z_,$ in den Gleichungen (86) und (87), und man wird nach dem Vorhergehenden leicht einsehen, daß

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \quad , \quad \mathfrak{b}_y = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \quad , \quad \mathfrak{c}_z = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$$

die zu jenen Achsen parallelen Projectionen oder Componenten der geometrischen Dehnungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für die durch dieselben Achsen angedeuteten Uebergangs-Richtungen sind, daß also für jede Lage dieser Achsen die Summe

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \hat{\mathfrak{a}} + \hat{\mathfrak{b}} + \hat{\mathfrak{c}}$$

eine unveränderliche Größe ist.

Diese Summe ist aber auch für Systeme, bei welchen die geometrischen Dehnungen immer sehr klein bleiben, wie dieß für die veränderlichen Systeme der festen Aggregatform meistens der Fall ist, sehr nahe gleich der während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen geometrischen Raumausdehnung, welche wir in §. 35 mit ϱ bezeichnet haben. Denn wenn V wie dort den Rauminhalt eines am Ende der Zeit t von drei unter sich senkrechten Ebenen im Punkte $x y z$ begrenzten Theiles von dem betreffenden System bezeichnet, so daß man hat

$$V = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z . 1 ,$$

und V_0 den Rauminhalt desselben Theiles am Ende der Zeit t_0 vorstellt, so daß

$$V_0 = \int_{x_0}^{x-\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 \,,$$

so wird die während der Zeit $t - t_0$ eingetretene Volumenänderung desselben Theiles durch

$$V - V_0 = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{x_0}^{x-\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1$$

ausgedrückt, und man findet dafür durch eine ähnliche Entwickelung, wie in dem genannten Orte, indem man beachtet, daß

$$\int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 = \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,,$$

$$\int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 = \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1$$

$$- \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 + \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,,$$

u. s. f.

den Ausdruck:

$$V - V_0 = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{x_0}^{y} \partial y \,.\, \mathfrak{z} + \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{y} + \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{x}$$

$$- \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \,.\, \mathfrak{z} - \int_{z_0}^{z} \partial z \int_{x-\mathfrak{x}}^{x} \partial x \,.\, \mathfrak{y} - \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{x}$$

$$+ \int_{x-\mathfrak{x}}^{x} \partial x \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,.$$

Daraus folgt dann als Anfangswerth des Verhältnisses $\frac{\Delta^3.(V-V_0)}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ oder als geometrische Raumausdehnung ϱ in dem Punkte xyz der obengenannte Werth:

$$92.) \qquad \varrho = \frac{\delta^3.(V-V_0)}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta z} + \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} + \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x},$$

wenn die Aenderungen $\Delta \mathfrak{x}$, $\Delta \mathfrak{y}$, $\Delta \mathfrak{z}$ der Coordinatenänderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ für den Uebergang von einem Punkte xyz zu einem folgenden $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ im Verhältniß zu den Aenderungen Δx, Δy, Δz, oder anders ausgedrückt, wenn die geometrischen Dehnungen $\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x}$, $\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y}$, $\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta z}$ immer klein genug bleiben, um die Glieder

$$\frac{\delta^3.\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y-\mathfrak{y}}^{y}\delta y.\mathfrak{z}}{\delta x \delta y \delta z}, \qquad \frac{\delta^3.\int_{z_0}^{z}\delta z\int_{x-\mathfrak{x}}^{x}\delta x.\mathfrak{y}}{\delta z \delta x \delta y}, \qquad \frac{\delta^3.\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z-\mathfrak{z}}^{z}\delta z.\mathfrak{x}}{\delta y \delta z \delta x},$$

welche mit den Producten $\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y}\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta z}$, $\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x}\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y}$ und $\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x}\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta \mathfrak{z}}$ homogen sind, und um so mehr das letzte Glied des Werthes von ϱ gegen die drei ersten Glieder vernachlässigen zu können, was wie schon bemerkt für die veränderlichen Systeme der festen Aggregatform immer zulässig ist.

Beachtet man dann, daß aus den Gleichungen:

$$x = x^{(0)} + \mathfrak{x}, \qquad y = y^{(0)} + \mathfrak{y}, \qquad z = z^{(0)} + \mathfrak{z}$$

die Aenderungsgesetze:

$$93.) \quad \frac{dx}{dt} = u_x = \frac{d.\mathfrak{x}}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = u_y = \frac{d.\mathfrak{y}}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = u_z = \frac{d.\mathfrak{z}}{dt}$$

hervorgehen, und daß man auch hat

$$\frac{d.\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x}}{dt} = \frac{\delta \frac{d.\mathfrak{x}}{dt}}{\delta x} = \frac{\delta u_x}{\delta x}, \qquad \text{u. s. f.},$$

so wird man aus dem vorhergehenden Werthe von ϱ leicht das frühere Aenderungsgesetz (70) desselben in Bezug auf die Zeit, nämlich

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

herleiten; dieser Ausdruck ist aber wie man sich aus der in §. 35 ausgeführten Ableitung oder nach der jetzigen Betrachtungsweise aus der Entwickelung der Beziehungen:

$$\varDelta_t V = \int_{x_0}^{x^{(0)}+\mathfrak{x}+\varDelta_t.\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y^{(0)}+\mathfrak{y}+\varDelta_t.\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z^{(0)}+\mathfrak{z}+\varDelta_t.\mathfrak{z}} \partial z \;.\; 1$$
$$- \int_{x_0}^{x^{(0)}+\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y^{(0)}+\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z^{(0)}+\mathfrak{z}} \partial z \;.\; 1$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\,.\,\frac{\partial^3 (V - V_0)}{\partial x \partial y \partial z}}{dt} = \frac{\partial^3 .\frac{dV}{dt}}{\partial x \partial y \partial z}$$

überzeugen wird, immer streng richtig, wenn auch die Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ nicht sehr klein sind.

§. 44.

Mittels der vorhergehenden Beziehungen (93) sind wir nun auch in den Stand gesetzt, die Geschwindigkeiten $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ in den allgemeinen Gleichungen (74) und (78) der Bewegung des Punktes M in Bezug auf ein parallel fortschreitendes oder in Bezug auf ein festes Coordinatensystem durch die von dem Ende einer bestimmten Zeit t_0 an eintretenden Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ seiner Lage auszudrücken. Dazu muß man aber beachten, daß in diesen Beziehungen die Aenderungsgesetze $\frac{d.\mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d.\mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d.\mathfrak{z}}{dt}$ die vollständigen Aenderungsgesetze von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in Bezug auf die Aenderung von t sind, daß also diese Beziehungen allgemein und streng betrachtet die entwickelte Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx'}{dt} &= u_{x'} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + u_{x'}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'} + u_{y'}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'} + u_{z'}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'} \\
\frac{dy'}{dt} &= u_{y'} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + u_{y'}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x'} + u_{y'}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'} + u_{z'}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z'} \\
\frac{dz'}{dt} &= u_{z'} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + u_{x'}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x'} + u_{y'}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y'} + u_{z'}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z'}
\end{aligned}\right\} \quad (94.$$

annehmen, und nur für sehr kleine geometrische Dehnungen auf die einfachen Werthe:

$$u_{x'} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\,, \qquad u_{y'} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\,, \qquad u_{z'} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \qquad (95.$$

zurückkommen.

Bezeichnet man zur Abkürzung wie früher die normalen Dehnungen $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z'}$ durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Dehnungen $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y'} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z'} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z'} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y'}$ durch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, und die Geschwindigkeiten $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ durch $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, und eliminirt aus den Gleichungen (94) die $u_{y'}$ und $u_{z'}$, so ergibt sich der Werth von $u_{x'}$ durch die Gleichung:

$$u_{x'}\left[(1-\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{f}^2(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{g}^2(1-\mathfrak{b})-\mathfrak{h}^2(1-\mathfrak{a})-2\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h}\right]$$

$$=\mathfrak{u}_x((1-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{h}^2)+\mathfrak{u}_y(\mathfrak{f}(1-\mathfrak{c})+\mathfrak{g}\mathfrak{h})+\mathfrak{u}_z(\mathfrak{g}(1-\mathfrak{b})+\mathfrak{f}\mathfrak{h})\,.$$

Werden darin alle Glieder, welche Producte der Dehnungen enthalten, vernachlässigt, so findet man zuerst

$$u_{x'}[1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = \mathfrak{u}_x(1-\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{g}\mathfrak{u}_z$$

und wenn dann auf der rechten Seite $-\mathfrak{a}\mathfrak{u}_x + \mathfrak{a}\mathfrak{u}_x$ zugesetzt, der Werth (92) der räumlichen Ausdehnung ϱ beachtet, und in gleicher Weise in Bezug auf $u_{y'}$ und $u_{z'}$ verfahren wird, so folgen die Ausdrücke:

$$(u_{x'}-\mathfrak{u}_x)(1-\varrho) = \mathfrak{a}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{g}\mathfrak{u}_z$$

$$(u_{y'}-\mathfrak{u}_y)(1-\varrho) = \mathfrak{f}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{b}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_z$$

$$(u_{z'}-\mathfrak{u}_z)(1-\varrho) = \mathfrak{g}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{h}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{c}\mathfrak{u}_z\,.$$

Man sieht hieraus, daß man noch die Summen:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x'}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'}\frac{d\mathfrak{y}}{dt}+\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z'}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

u. s. f.

muß vernachlässigen können, wenn $u_{x'} = \mathfrak{u}_x$, $u_{y'} = \mathfrak{u}_y$, $u_{z'} = \mathfrak{u}_z$ werden soll.

Unter dieser Voraussetzung hat man dann weiter

$$\frac{d.u_{x'}}{dt} = \frac{d.\mathfrak{u}_x}{dt} = \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \mathfrak{u}_x\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{dx'} + \mathfrak{u}_y\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y'} + \mathfrak{u}_z\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z'}$$

$$= \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'}}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'}}{dt}$$

$$= \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \mathfrak{u}_x\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{u}_y\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \mathfrak{u}_z\frac{d\mathfrak{g}}{dt}.$$

Die vorhergehende Voraussetzung:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{u}_x + \mathfrak{f}\,\mathfrak{u}_y + \mathfrak{g}\,\mathfrak{u}_z = 0$$

gibt aber auch

$$\mathfrak{u}_x\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{u}_y\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \mathfrak{u}_z\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = -\left(\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} + \mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}\right).$$

und damit kann man dem Werthe von $\frac{d.u_{x'}}{dt}$ noch die Form geben:

$$\frac{d.u_{x'}}{dt} = (1-\mathfrak{a})\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} - \mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} - \mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}.$$

Aehnliche Formen wird man dann auch für die vollständigen Aenderungsgesetze der Geschwindigkeiten $u_{y'}$ und $u_{z'}$ in Bezug auf die Aenderung der Zeit erhalten und daraus schließen, daß wenn die Aenderungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$ und $\mathfrak{u}_z$ in Bezug auf den Uebergang von einem Punkte zu einem andern, oder wenn die geometrischen Dehnungen durchaus sehr klein sind und bleiben, die Aenderungen dieser Dehnungen in Bezug auf die Zeit allein also vernachlässigt werden können, man die einfachen Beziehungen hat:

96.) $\frac{d.u_{x'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, $\frac{d.u_{y'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}$, $\frac{d.u_{z'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}$.

Unter denselben Voraussetzungen wird aber auch die Aenderung der geometrischen Raumausdehnung ϱ in Bezug auf die Zeit sehr klein sein, und daher das Aenderungsgesetz $\frac{d\varrho}{dt}$ gleich Null genommen werden dürfen, wodurch die Beziehung (72) auf die einfachen Gleichungen:

97.) $$\frac{d.q}{dt} = 0 \quad , \quad q = q_0 \, ,$$

zurückkommt, welche aussprechen, daß in diesem Falle die Dichte in irgend einem Punkte des Systems von der Zeit unabhängig und immer dieselbe bleibt, wie am Anfang derselben, oder richtiger ausgedrückt, daß die Aenderung der Dichte in irgend einem Punkte immer so klein ist, daß man dieselbe als unveränderlich betrachten darf.

Hat man demnach die geometrischen Spannungen T_x, T_y, S_z, u. s. f. je nach der Natur des Systems in Function der geometrischen Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}$, u. s. f. ausgedrückt, und die geometrischen Kräfte X, Y, Z mittels der Beziehungen

$$x' = x^{(0)} + \mathfrak{x} \quad , \quad y' = y^{(0)} + \mathfrak{y} \quad , \quad z' = z^{(0)} + \mathfrak{z}$$

ebenso in Function der Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so werden unter den vorhergehenden Beschränkungen die Gleichungen (74) die Form annehmen:

98.) $$\begin{cases} \frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2}\right) = q\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \\ \frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2}\right) = q\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} \\ \frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2}\right) = q\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} \end{cases}$$

und mit einer der Gleichungen (97) der Zahl nach genügen, um die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und q in Function der Veränderlichen x′, y′, z′ und t auszudrücken, also die Gesetze der innern Bewegung des Punktes x′ y′ z′ in Bezug auf das mit dem Mittelpunkte der Masse oder irgend einem andern Punkte des Systems nach einem bekannten Gesetze parallel fortschreitende Coordinatensystem zu bestimmen.

Die Gleichungen der innern Bewegung eines ähnlichen veränderlichen Systems, das sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, gehen aus den obigen einfach dadurch hervor, daß man den Anfangspunkt der x, y, z in einen Punkt verlegt, welcher keine innere Bewegung besitzt und die auf diesen Punkt sich beziehenden äußern Geschwindigkeiten $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ als unveränderlich annimmt, oder wenn das Gleichgewicht ein ruhendes sein soll, gleich Null setzt.

§. 45.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen über den innern Zustand eines stetigen veränderlichen Systems in Bezug auf ein parallel fortschreitendes rechtwinkliges Coordinatensystem lassen sich die entsprechenden allgemeinen Gleichungen für die innere Bewegung oder das innere Gleichgewicht eines solchen Systems in Bezug auf ein fortschreitendes und sich drehendes rechtwinkliges Coordinatensystem leicht aus der Vergleichung der Gleichungen (74) mit den für ein nicht stetig zusammenhängendes System von materiellen Punkten gefundenen Gleichungen (46) ableiten. Denn diese Vergleichung zeigt, daß die erstern dieser Gleichungen aus den letztern hervorgehen, wenn statt der Masse m_i eines beliebigen Punktes im nicht stetigen System die geometrische Dichte q in dem Punkte xyz des stetigen Systems, und statt der zu den Achsen der x, y oder z parallelen innern Wirkungen:

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \quad , \quad \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \quad ,$$

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k}$$

die entsprechenden Aenderungsgesetze der geometrischen Spannungen in drei zu jenen Achsen normalen Schnitten in dem betreffenden Punkte eingeführt werden. Wir schließen daraus weiter, daß auch die Gleichungen für die Bewegung eines stetigen veränderlichen Systems, beziehungsweise eines Punktes in demselben in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, welches zugleich eine drehende und eine fortschreitende Bewegung besitzt, sich durch ähnliche Substitutionen aus den entsprechenden Gleichungen (51) in §. 31 für den Punkt M_i eines nicht stetigen Systems sich ergeben müssen.

Sei demnach wieder das bewegliche Coordinatensystem das der ξ, η, ζ, sein Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des veränderlichen Systems, und seine Lage gegen die festen Coordinatenachsen der x, y, z am Ende der Zeit t durch die Coordinaten X, Y, Z jenes Anfangspunktes und die Winkel ϑ, ω und ψ in Function von t bestimmt; es werden dann auch seine augenblickliche Winkelgeschwindigkeit φ, deren Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ um die Achsen der ξ, η und ζ und damit die Lage der augenblicklichen Drehungsachse in Bezug auf diese Achsen sowohl, als in Bezug auf die festen Coordinatenachsen durch die in §. 185 bis 187 des zweiten Buches abgeleiteten Beziehungen zwischen diesen Größen gegeben sein.

Die geometrischen Componenten der an dem Punkte $\xi\eta\zeta$ des Systems angreifenden äußern Kraft bezeichne ich mit $q\Xi$, qH, qZ, behalte aber für die Componenten derjenigen Kräfte, welche nothwendig sind, um den betreffenden Punkt vom Ende der Zeit t an in Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ im Gleichgewicht zu halten, und welche nun ebenfalls in geometrische Kräfte übergehen, die in §. 31 angewendete Bezeichnung bei, nämlich die Bezeichnung $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ für die Componenten der Kraft, welche dem betreffenden Punkte diejenige Beschleunigung ertheilen kann, welche er vom Ende der Zeit t an erhalten würde, wenn er von diesem Augenblicke an mit den Achsen der ξ, η und ζ fest verbunden und der Anfangspunkt dieser Achsen unbeweglich wäre, und die Bezeichnung $F\cos l$, $F\cos m$, $F\cos n$ für die geometrischen Componenten der Kraft F, welche in demselben Punkte die Beschleunigung $2\varphi\mathfrak{V}\cos\delta$ zu erzeugen vermag, wenn wie am genannten Orte $\mathfrak{V}$ die innere Geschwindigkeit dieses Punktes und δ den Winkel zwischen ihrer Richtung und der augenblicklichen Drehungs-Achse des Systems bedeutet. Für die erstern Componenten wird man daher gemäß der Gleichungen (a) in §. 31 im jetzigen Falle die Werthe erhalten:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= q\left(\zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{p}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) - (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2)\xi\right)\\
\mathfrak{Y} &= q\left(\xi\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{q}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2)\eta\right)\\
\mathfrak{Z} &= q\left(\eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{r}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)\zeta\right)
\end{aligned}\right.$$

und die letztern Componenten werden durch die den Gleichungen (b) daselbst entsprechenden Ausdrücke:

$$F\cos l = -2q\left(r\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\zeta}{dt}\right), \quad F\cos m = -2q\left(p\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$F\cos n = -2q\left(q\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\eta}{dt}\right)$$

gegeben sein.

In den Gleichungen (51) wurden die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Kraft, welche die äußere Beschleunigung des Punktes M_i oder $\xi_i\,\eta_i\,\zeta_i$ parallel zu den festen Coordinaten zu erzeugen vermag, oder welche, im entgegengesetzten Sinne wirkend, diesen Punkt in Bezug auf das feste Coordinatensystem im Zustande des äußern Gleichgewichtes erhalten würde, durch

$$m_i\,\frac{\Sigma.\Xi}{\Sigma.m}\,, \quad m_i\,\frac{\Sigma.H}{\Sigma.m}\,, \quad m_i\,\frac{\Sigma.Z}{\Sigma.m}$$

bezeichnet. Im jetzigen Falle läßt sich mit dieser Bezeichnung keine klare Vorstellung mehr verbinden; es wird daher nothwendig werden, die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten dieser Kraft, deren Componenten nach den festen Achsen der x, y, z in den Gleichungen (74) bereits durch

$$q\,\frac{d^2X}{dt^2}\,, \quad q\,\frac{d^2Y}{dt^2}\,, \quad q\,\frac{d^2Z}{dt^2}$$

vorgestellt sind, in entsprechender Weise zu bezeichnen und auszudrücken. Dazu wollen wir die Resultirenden aus den geometrischen Componenten qX, qY, qZ der äußern Kraft und den vorhergenannten Kräften im entgegengesetzten Sinne genommen unter der Bezeichnung $q\widehat{X}$, $q\widehat{Y}$, $q\widehat{Z}$ zusammenfassen, so daß man die Beziehungen hat:

$$q\widehat{X} = q\left(X - \frac{d^2X}{dt^2}\right), \quad q\widehat{Y} = q\left(Y - \frac{d^2Y}{dt^2}\right), \quad q\widehat{Z} = q\left(Z - \frac{d^2Z}{dt^2}\right).$$

Die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Resultirenden dieser Kräfte werden wir dann durch $q\widehat{\Xi}$, $q\widehat{H}$, $q\widehat{Z}$ vorstellen, und haben zwischen diesen und jenen Componenten die bekannten Beziehungen:

$$\widehat{\Xi} = a\widehat{X} + b\widehat{Y} + c\widehat{Z}\,,$$
$$\widehat{H} = a'\widehat{X} + b'\widehat{Y} + c'\widehat{Z}\,,$$
$$\widehat{Z} = a''\widehat{X} + b''\widehat{Y} + c''\widehat{Z}\,,$$

in welchen wieder a, b, c, etc. die Cosinus der Winkel zwischen den festen Coordinatenachsen und den sich drehenden Achsen der ξ, η und ζ bezeichnen und wie die Winkel ϑ, ω, ψ in Function der Zeit t gegeben vorausgesetzt werden. Es darf kaum bemerkt werden, daß für den Fall, wo der Anfangspunkt der sich drehenden Coordinaten unbeweglich ist oder nur eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, die geometrischen Kräfte $q\widehat{\Xi}$, $q\widehat{H}$, $q\widehat{Z}$ und die Componenten $q\Xi$, qH, qZ gleichbedeutend werden, wie die $q\widehat{X}$, $q\widehat{Y}$, $q\widehat{Z}$ auf qX, qY, qZ zurückkommen.

Bezeichnen wir endlich noch den neuen Achsen entsprechend die Componenten der geometrischen Spannungen in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ und zwar in den drei zu den Achsen der ξ, η und ζ senkrechten Schnitten mit

$$T_\xi,\ S_\zeta,\ S_\eta,\quad S_\zeta,\ T_\eta,\ S_\xi,\quad S_\eta,\ S_\xi,\ T_\zeta,$$

die Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ nach denselben Achsen mit $\mathfrak{u}_\xi$, $\mathfrak{u}_\eta$, $\mathfrak{u}_\zeta$, und die vollständigen Aenderungsgesetze dieser Veränderlichen in Bezug auf die Zeit mit $\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt}$ u. s. f., so daß man hat

$$\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt} = \frac{d\mathfrak{u}_\xi}{dt} + \mathfrak{u}_\xi \frac{\partial \mathfrak{u}_\xi}{\partial \xi} + \mathfrak{u}_\eta \frac{\partial \mathfrak{u}_\xi}{\partial \eta} + \mathfrak{u}_\zeta \frac{\partial \mathfrak{u}_\xi}{\partial \zeta}$$

u. s. f.

so nehmen nun die Gleichungen für die innere Bewegung des Punktes $\xi\eta\zeta$ folgende Formen an:

$$99.)\ \begin{cases} \frac{\partial T_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial S_\eta}{\partial \zeta} + q(\widehat{\Xi} - \mathfrak{X} + F\cos l) = q\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt} \\ \frac{\partial S_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial T_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial S_\xi}{\partial \zeta} + q(\widehat{H} - \mathfrak{Y} + F\cos m) = q\frac{d.\mathfrak{u}_\eta}{dt} \\ \frac{\partial S_\eta}{\partial \xi} + \frac{\partial S_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial T_\zeta}{\partial \zeta} + q(\widehat{Z} - \mathfrak{Z} + F\cos n) = q\frac{d.\mathfrak{u}_\zeta}{dt} \end{cases}$$

und geben die Bedingungen des innern Gleichgewichtes, wenn die rechten Seiten gleich Null gesetzt werden. Für die Untersuchung der Bewegung dagegen müssen dieselben noch mit der Bedingungsgleichung (71) verbunden werden, in welche für unsern jetzigen Fall nur die $u_{x'}$, $u_{y'}$ und $u_{z'}$ durch die u_ξ, u_η, u_ζ, wie die x′, y′, z′ durch die ξ, η und ζ zu ersetzen sind.

Wenn sich das System um eine feste Achse dreht, welche wir als die der ζ nehmen wollen, so gehen die vorhergehenden Gleichungen, wie man aus den Gleichungen (55) schließen wird, in folgende über:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_\xi}{\partial \xi}+\frac{\partial S_\zeta}{\partial \eta}+\frac{\partial S_\eta}{\partial \zeta}+q\left(\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}-\xi\varphi^2-2\varphi\frac{d\eta}{dt}\right)&=q\frac{d.u_\xi}{dt}\\
\frac{\partial S_\zeta}{\partial \zeta}+\frac{\partial T_\eta}{\partial \eta}+\frac{\partial S_\xi}{\partial \zeta}+q\left(H+\xi\frac{d\varphi}{dt}-\eta\varphi^2+2\varphi\frac{d\xi}{dt}\right)&=q\frac{d.u_\eta}{dt}\\
\frac{\partial S_\eta}{\partial \xi}+\frac{\partial S_\xi}{\partial \eta}+\frac{\partial T_\zeta}{\partial \zeta}+qZ&=q\frac{d.u_\zeta}{dt}
\end{aligned}\right\}, (100)$$

und daraus folgen wieder die Bedingungen für das ruhende Gleichgewicht bei einer gleichförmigen äußern drehenden Bewegung des Systems, wenn die Glieder: $2\varphi\frac{d\eta}{dt}$, $2\varphi\frac{d\xi}{dt}$, $\eta\frac{d\varphi}{dt}$ und $\xi\frac{d\varphi}{dt}$ und die rechten Seiten dieser Gleichungen Null werden.

Um übrigens diese Gleichungen anwenden zu können, müssen in denselben wie in den frühern die geometrischen Spannungen durch die geometrischen Dehnungen und die Geschwindigkeiten durch die Aenderungsgesetze der in der Zeit $t-t_0$ eingetretenen, nun zu den Achsen der ξ, η und ζ parallelen Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Lage des Punktes $\xi\eta\zeta$ in Bezug auf die Zeit ausgedrückt werden, wofür alle in den §§. 39 bis 44 abgeleiteten Beziehungen gültig bleiben.

§. 46.

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines stetigen veränderlichen Systems, sowie die Gleichungen für die innere Bewegung eines solchen, welche in den vorhergehenden §. §. abgeleitet wurden, beziehen sich immer nur auf einen beliebigen geometrischen Punkt des Systems; um daher den Zustand des ganzen Systems beurtheilen zu können, müssen jene Bedingungen und Bewegungsgesetze durch Integration in Bezug auf die drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z, auf

das ganze System ausgedehnt werden. Es müssen folglich im jetzigen Falle außer dem anfänglichen Zustande des Systems noch die an den Begrenzungsflächen obwaltenden Verhältnisse, also die in denselben stattfindenden geometrischen Spannungen gegeben sein, und es werden demnach die Schwierigkeiten einleuchten, welche zu überwinden sind, wenn, wie es gewöhnlich verlangt wird, die Form bestimmt werden soll, welche das System annimmt oder annehmen muß, damit es sich unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte im Zustande des innern Gleichgewichtes befindet.

Für die meisten Untersuchungen wird auch vorausgesetzt, daß sich das System durch äußere feste Hindernisse im Zustande des äußern Gleichgewichtes befinde; für diese Fälle sind dann wieder die von jenen Hindernissen zu leistenden Widerstände als äußere Kräfte in die Gleichungen für das innere Gleichgewicht oder die innere Bewegung einzuführen und durch Elimination zu entfernen, und man wird einsehen, daß dadurch jene Schwierigkeiten in der Bestimmung der äußern Form des Systems für inneres Gleichgewicht nicht vermindert werden.

Auf ähnliche Weise müssen jene Fälle behandelt werden, wo das System, dessen innere Zustände untersucht werden sollen, eine gezwungene äußere Bewegung besitzt; solche Fälle haben sich übrigens für stetige veränderliche Systeme, wenn von den Flüssigkeiten hier Umgang genommen wird, in der Anwendung noch keine dargeboten; es ist daher zu einer weitern Ausführung der vorstehenden Bemerkung keine Veranlassung gegeben.

In den beiden folgenden Kapitel sollen nun einige einfache Beispiele für die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Gesetze gegeben werden; im nächsten für solche veränderliche Systeme, welche als nicht stetige zu behandeln sind, und zwar in Bezug auf das innere Gleichgewicht das Seilpolygon, das Knie, die Roberval'sche Wage, in Bezug auf innere Bewegung das Planetensystem; im dritten dagegen sollen stetig veränderliche Systeme untersucht und die vorhergehenden Betrachtungen insbesondere auf vollkommen biegsame und vollkommen elastische Systeme angewendet werden.

Zweites Kapitel.

Beispiele nicht stetiger veränderlicher Systeme. Seilpolygon, Knie, Roberval'sche Wage, Planetensystem.

§. 47.

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines Systems, welches aus einer bestimmten Anzahl materieller Punkte besteht, finden ihre Anwendung bei der Bestimmung der Gestalt, welche ein vollkommen biegsamer und unbehnbarer Faden annimmt, wenn an demselben eine bestimmte Anzahl der Größe und Richtung nach gegebener Kräfte angreifen, von dem stetig angreifenden Gewicht desselben also Umgang genommen wird.

Ein solches System von materiellen Punkten kann man sich immer unter der ursprünglichen Form einer geraden Linie von unveränderlicher Länge denken, welche sich in die Gestalt jeder gebrochenen oder stetig krummen Linie bringen läßt, ohne daß ihre Theile ein Bestreben zeigen, in eine andere Form zurückzukehren. Es ist zwar immer eine Ursache, also eine, wenn auch nur sehr kleine Kraft nothwendig, um eine Aenderung in der gegenseitigen Lage dieser Theile oder eine Biegung hervorzubringen; wenn diese aber einmal erzeugt ist, dann ist keine Kraft mehr nothwendig, um die Theile der Linie in dieser Lage zu erhalten; im Zustande des innern Gleichgewichtes sind daher nur die gegebenen äußern Kräfte und die von diesen zwischen den einzelnen Angriffspunkten in dem Faden hervorgerufenen Spannungen als innere Kräfte zu berücksichtigen. Diese Spannungen geben für jeden Punkt, welcher zwischen zwei Angriffspunkten äußerer Kräfte liegt, zwei gleiche Kräfte; diese müssen für den Gleichgewichtszustand einander direct entgegen gerichtet sein, und deßhalb alle diese Punkte in einer Geraden liegen, das System folglich die Gestalt eines Vieleckes annehmen, dessen Eckpunkte die Angriffspunkte der äußern Kraft sind, dessen Seiten aber in verschiedenen Ebenen liegen können.

Ein solches System wollen wir zuerst unter der Voraussetzung betrachten, daß die äußern Kräfte an bestimmten mit dem System fest verbundenen Punkten, deren gegenseitige Entfernungen unveränderlich sind, angreifen und dasselbe sich auch im Zustande des äußern Gleich=

gewichtes befinden soll. Sei also ABCDMN Fig. 11 ein solches System, P_0, P_1, P_2, etc., P_n die an den genannten Punkten angreifenden äußern Kräfte, von welchen wir noch weiter voraussetzen, daß sie von festen Punkten ausgehen, deren Entfernung in Bezug auf die Ausdehnung unsers veränderlichen Systems hinreichend groß ist, um ihre Richtungswinkel als unveränderlich annehmen zu können, wenn auch die Angriffspunkte derselben ihre Lage ändern. Diese Richtungswinkel gegen drei feste Achsen seien wie früher α_0, β_0, γ_0 für die Kraft P_0, α_1, β_1, γ_1 für die Kraft P_1 u. s. f., α_n, β_n, γ_n für die Kraft P_n. Ferner seien l_1, l_2 u. s. f., l_n die gegebenen Entfernungen der Angriffspunkte A und B, B und C, u. s. f., M und N, und x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, u. s. f., x_n, y_n, z_n die Coordinaten dieser Angriffspunkte, wenn das System ins innere Gleichgewicht gekommen ist; endlich wollen wir die Richtungswinkel der Polygonseiten AB, BC, u. s. f., MN in Bezug auf die Coordinaten-Achsen mit a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, u. s. f., a_n, b_n, c_n bezeichnen, und zwar immer in dem Sinne von A gegen B, von B gegen C, u. s. f., von M gegen N hin genommen, und dabei sogleich bemerken, daß diese Winkel und die Coordinaten der Eckpunkte durch die Beziehungen:

$$\cos a_1 = \frac{x_1 - x_0}{l_1}, \quad \cos b_1 = \frac{y_1 - y_0}{l_1}, \quad \cos c_1 = \frac{z_1 - z_0}{l_1},$$

$$\cos a_2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2}, \quad \cos b_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_2}, \quad \cos c_2 = \frac{z_2 - z_1}{l_2},$$

u. s. f.,

$$\cos a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{l_n}, \quad \cos b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n}, \quad \cos c_n = \frac{z_n - z_{n-1}}{l_n},$$

in gegenseitiger Abhängigkeit stehen.

Damit nun zuerst äußeres Gleichgewicht stattfinden kann, müssen die äußern Kräfte P den Bedingungen des §. 7 genügen, d. h. den Bedingungen:

$$\text{a.)} \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_n \cos\alpha_n = 0, \\ P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_n \cos\beta_n = 0, \\ P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_n \cos\gamma_n = 0, \end{array} \right.$$

welche aussprechen, daß die fördernde Gesammtwirkung dieser Kräfte Null ist, oder daß sich diese Kräfte, wenn sie einen und denselben

Angriffspunkt hätten, im Gleichgewicht halten müßten. Damit ist in unserm jetzigen Falle zugleich auch die Bedingung erfüllt, daß die drehende Gesammtwirkung jener Kräfte Null sei, wenn die Angriffspunkte derselben so bestimmt sind, wie sie durch das innere Gleichgewicht bedingt werden; es könnte dieses daher erst nachgewiesen werden, wenn wir die Bedingungen für das innere Gleichgewicht aufgestellt haben.

Im vorliegenden Falle stehen immer nur zwei aufeinanderfolgende Punkte in gegenseitiger Verbindung; es reduziren sich daher die Summen der an dem Punkte J angreifenden innern Wirkungen:

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \quad , \qquad \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \quad , \qquad \text{u. s. f.},$$

auf die einfachen Glieder

$$J_{i-1,i} \cos \alpha_{i-1,i} \quad , \qquad J_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} \quad , \qquad \text{u. s. f.} \; ,$$

und die Gleichungen (54) für das Gleichgewicht des Eckpunktes J unsers Polygons werden damit und mit der Beachtung, daß die Winkel $\alpha_{i-1,i}$, $\beta_{i-1,i}$, $\gamma_{i-1,i}$ nach der vorher angegebenen Bezeichnung durch a_i , b_i , c_i und die Winkel $\alpha_{i,i+1}$, $\beta_{i,i+1}$, $\gamma_{i,i+1}$ durch a_{i+1} , b_{i+1} , c_{i+1} zu ersetzen sind, weil die Richtungen der innern Kräfte $J_{i-1,i}$ und $J_{i,i+1}$ mit den Richtungen der Vieleckseiten HJ und JK zusammenfallen, und wenn man noch die innern Kräfte $J_{i-1,i}$ und $J_{i,i+1}$ als Spannungen der Seiten HJ und JK derselben Bezeichnung entsprechend nun durch T_i und T_{i+1} ersetzt, folgende

$$\left.\begin{array}{l} P_i \cos \alpha_i - T_i \cos a_i + T_{i+1} \cos a_{i+1} \\ P_i \cos \beta_i - T_i \cos b_i + T_{i+1} \cos b_{i+1} \\ P_i \cos \gamma_i - T_i \cos c_i + T_{i+1} \cos c_{i+1} \end{array}\right\} .$$

Man zieht daraus für die einzelnen Punkte A , B , C , N die besondern Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 \cos \alpha_0 + T_1 \cos a_1 \\ P_0 \cos \beta_0 + T_1 \cos b_1 \\ P_0 \cos \gamma_0 + T_1 \cos c_1 \end{array}\right\} , \qquad \left.\begin{array}{l} P_1 \cos \alpha_1 - T_1 \cos a_1 + T_2 \cos b_2 \\ P_1 \cos \beta_1 - T_1 \cos b_1 + T_2 \cos b_2 \\ P_1 \cos \gamma_1 - T_1 \cos c_1 + T_2 \cos c_2 \end{array}\right\} ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_2 \cos\alpha_2 - T_2 \cos\mathfrak{a}_2 + T_3 \cos\mathfrak{a}_3 \;, \\ P_2 \cos\beta_2 - T_2 \cos\mathfrak{b}_2 + T_3 \cos\mathfrak{b}_3 \;, \\ P_2 \cos\gamma_2 - T_2 \cos\mathfrak{c}_2 + T_3 \cos\mathfrak{c}_3 \;, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} P_n \cos\alpha_n - T_n \cos\mathfrak{a}_n \;, \\ P_n \cos\beta_n - T_n \cos\mathfrak{b}_n \;, \\ P_n \cos\gamma_n - T_n \cos\mathfrak{c}_n \;, \end{array}\right.$$

und schließt daraus, 1) daß die Richtungen der ersten und letzten Seite AB und MN durch die Richtungen der Kräfte P_0 und P_n bestimmt, und ihre Spannungen diesen Kräften gleich sind, 2) daß an jedem Eck= oder Knotenpunkte nur drei Kräfte angreifen, eine äußere Kraft und die Spannungen der beiden anstoßenden Seiten, woraus nach §. 16 des ersten Buches weiter folgt, daß im Zustande des Gleichgewichtes immer zwei anstoßende Seiten mit der an ihrem Knotenpunkte angreifenden äußern Kraft in einer Ebene liegen müssen, und daß die Resultirende der Spannungen jener Seiten dieser Kraft gleich und entgegengesetzt ist, diese Spannungen dem Sinne der Richtung nach immer von dem Knotenpunkte aus im Sinne der Seiten genommen.

Man kann aber auch aus den vorhergehenden Gleichungen, durch fortschreitende Summirung der denselben Coordinaten=Achsen entsprechenden, die Spannungen T_1, T_2, u. s. f. eliminiren und die Spannung T_i der Seite HJ, oder ihre Componenten unmittelbar durch die äußern Kräfte ausdrücken; man findet so für die Componenten der Spannung T_2 der Seite BC die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{l} T_2 \cos\mathfrak{a}_2 = -\,(P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1) \\ T_2 \cos\mathfrak{b}_2 = -\,(P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1) \\ T_2 \cos\mathfrak{c}_2 = -\,(P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1) \end{array}\right.$$

für die Spannung T_3 die Componenten:

$$\left\{\begin{array}{l} T_3 \cos\mathfrak{a}_3 = -\,(P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2) \\ T_3 \cos\mathfrak{b}_3 = -\,(P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2) \\ T_3 \cos\mathfrak{c}_3 = -\,(P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2) \end{array}\right.$$

u. s. f.; also allgemein für die Spannung T_i die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} T_i \cos a_i &= -(P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_{i-1} \cos\alpha_{i-1}) \\ T_i \cos b_i &= -(P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_{i-1} \cos\beta_{i-1}) \\ T_i \cos c_i &= -(P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_{i-1} \cos\gamma_{i-1}) \end{aligned}\right\}(b.$$

oder in abgekürzter Form

$$\left.\begin{aligned} -T_i \cos a = \sum_{h=0}^{h=i-1} . \; P_h \cos\alpha_h \;, \quad -T_i \cos b_i = \sum_{h=0}^{h=i-1} . \; P_h \cos\beta_h \;, \\ -T_i \cos c_i = \sum_{h=0}^{h=i-1} . \; P_h \cos\gamma_h \;. \end{aligned}\right\}(b.$$

Fängt man die Elimination von dem andern Endpunkte N des Polygons an, so hat man zuerst

$$\left.\begin{aligned} T_{n-1} \cos a_{n-1} &= P_{n-1} \cos\alpha_{n-1} + P_n \cos\alpha_n \\ T_{n-1} \cos b_{n-1} &= P_{n-1} \cos\beta_{n-1} + P_n \cos\beta_n \\ T_{n-1} \cos c_{n-1} &= P_{n-1} \cos\gamma_{n-1} + P_n \cos\gamma_n \end{aligned}\right\};$$

ferner wird

$$\left.\begin{aligned} T_{n-2} \cos a_{n-2} &= P_{n-2} \cos\alpha_{n-2} + P_{n-1} \cos\alpha_{n-1} + P_n \cos\alpha_n \\ T_{n-2} \cos b_{n-2} &= P_{n-2} \cos\beta_{n-2} + P_{n-1} \cos\beta_{n-1} + P_n \cos\beta_n \\ T_{n-2} \cos c_{n-2} &= P_{n-2} \cos\gamma_{n-2} + P_{n-1} \cos\gamma_{n-1} + P_n \cos\gamma_n \end{aligned}\right\}$$

u. s. f., und demnach folgt:

$$\left.\begin{aligned} T_i \cos a_i &= P_i \cos\alpha_i + P_{i+1} \cos\alpha_{i+1} + \text{etc.} + P_n \cos\alpha_n \\ T_i \cos b_i &= P_i \cos\beta_i + P_{i+1} \cos\beta_{i+1} + \text{etc.} + P_n \cos\beta_n \\ T_i \cos c_i &= P_i \cos\gamma_i + P_{i+1} \cos\gamma_{i+1} + \text{etc.} + P_n \cos\gamma_n \end{aligned}\right\},(c.$$

oder in abgekürzter Form

$$c.)\left\{\begin{array}{l} T_i \cos a_i = \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \alpha_k \ , \quad T_i \cos b_i = \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \beta_k \ , \\ T_i \cos c_i = \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \gamma_k \ . \end{array}\right.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß die Spannung einer Polygon-Seite der fördernden Resultirenden aller von einem Ende herein bis zum ersten Knotenpunkte dieser Seite angreifenden äußern Kräfte gleich und direct entgegengesetzt ist, und man wird leicht sehen, daß dieß eine nothwendige Folge der Gleichungen (a) ist, weil die Spannung einer Seite an ihren Knotenpunkten zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte vorstellt, weßhalb denn auch die Summen der entsprechenden Gleichungen (b) und (c) auf die Gleichungen (a) zurückführen.

§. 48.

Die vorhergehenden Gleichungen dienen insbesondere dazu, die Spannungen und Richtungen der einzelnen Polygonseiten zu berechnen und mittels der gegebenen Seitenlängen l_1, l_2 u. s. f. die Coordinaten der Eckpunkte, also Gestalt und Lage des Polygons zu bestimmen. Diese Bestimmung hat keine Schwierigkeit, wenn die äußern Kräfte alle gegeben sind. Denn man hat nach dem Vorhergehenden für die erste Seite

$$T_1 = P_0 \ , \quad a_1 = \pi + \alpha_0 \ , \quad b_1 = \pi + \beta_0 \ , \quad c_1 = \pi + \gamma_0$$

und wenn die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes A für den Fall, daß sie nicht gegeben sind, einstweilen beliebig angenommen werden, so ergeben sich für die des Punktes B die Werthe:

$$x_1 = x_0 + l_1 \cos a_1 \ , \quad y_1 = y_0 + l_1 \cos b_1 \ , \quad z_1 = z_0 + l_1 \cos c_1 \ .$$

Für die zweite Seite BC berechnet man zuerst die Werthe von $T_2 \cos a_2$, $T_2 \cos b_2$, $T_2 \cos c_2$ nach den Gleichungen (b), zieht daraus auf bekanntem Wege T_2 und die Winkelfunctionen $\cos a_2$, $\cos b_2$, $\cos c_2$ und hat dann für den Punkt C die Coordinaten:

$$x_2 = x_1 + l_2 \cos a_2 \ , \quad y_2 = y_1 + l_2 \cos b_2 \ , \quad z_2 = z_1 + l_2 \cos c_2 \ ,$$

Im Allgemeinen hat man also

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + l_{i+1} \cos a_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + l_{i+1} \cos b_{i+1} \\ z_{i+1} &= z_i + l_{i+1} \cos c_{i+1} \end{aligned}\right\},$$

und rechnet damit von einem Eckpunkte zum andern fort, bis man die Coordinaten des Punktes N erhalten hat. Wenn dann die Lage eines der Eckpunkte voraus bestimmt ist, so darf man nur das ganze Polygon parallel mit sich verrücken, also die Coordinaten aller Eckpunkte um diejenigen Unterschiede ändern, welche zwischen den vorherberechneten und den gegebenen Coordinaten jenes der Lage nach bestimmten Eckpunktes zum Vorschein kommen.

Auf dieselbe Weise läßt sich die Gestalt und Lage des Polygons auch in dem Falle noch bestimmen, wenn einer der Endpunkte A oder N befestigt ist, weil der unbekannte Widerstand P_0 oder P_n, welchen dieser Punkt zu leisten hat, um das äußere Gleichgewicht zu erhalten, immer mittels der Gleichungen (a) der Größe und Richtung nach berechnet werden kann. Wenn aber die beiden Endpunkte befestigt, also P_0 und P_n beide unbekannt sind, so bleibt nichts anderes übrig, als die Coordinaten aller Eckpunkte von A bis N nach und nach in Function der Unbekannten $T_1 \cos a_1$, $T_1 \cdot \cos b_1$, $T_1 \cos c_1$ oder $P_0 \cos \alpha_0$, $P_0 \cos \beta_0$, $P_0 \cos \gamma_0$ auszubrücken, die drei letzten Gleichungen, welche die Werthe der Coordinaten x_n, y_n, z_n des Endpunktes N enthalten, in Bezug auf jene Unbekannten aufzulösen und dann damit wie in den vorhergehenden Fällen die Rechnung von vorn anzufangen. Die Umständlichkeit dieser Berechnung wird einleuchten, wenn man beachtet, daß die Spannungen immer durch Quadratwurzeln aus der Summe dreier Quadrate erhalten werden, wodurch sich in den drei letzten Gleichungen die Quadratwurzeln in der Art häufen, daß selbst in einfachen Fällen von einer algebraischen Auflösung keine Rede sein kann.

Wenn zwischen den beiden festen Punkten A und C, Fig. 12, nur ein Knotenpunkt B und eine äußere Kraft P vorhanden ist, so ist durch die Seitenlängen AB und BC die mögliche Gestalt des Polygons bestimmt, seine Lage durch die Ebene, welche durch die Punkte A und C parallel zur Richtung der Kraft P gelegt werden kann. Damit aber beide Seiten gespannt sein können, muß die verlängerte Richtung von P offenbar in den Winkel ABC fallen; die Größe von P ist dagegen ohne Einfluß auf die Gestalt des Polygons, sie bedingt nur die Span=

nungen der Seiten AB und BC, also auch den Widerstand, den die festen Punkte A und C zu leisten haben. Die weitere Ausführung hat keine Schwierigkeit.

Betrachten wir nach diesem, um die vorausgehende Erörterung weiter auszuführen, noch den Fall, wo zwischen den festen Punkten A und D, Fig. 13, zwei Knotenpunkte B und C sich befinden. Seien T_x, T_y, T_z die Componenten der Spannung T_1, also $T_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$,

$$\cos a_1 = \frac{T_x}{T_1}\ ,\quad \cos b_1 = \frac{T_y}{T_1}\ ,\quad \cos c_1 = \frac{T_z}{T_1}\ ;$$

so hat man zuerst für den Punkt B die Coordinaten

$$x_1 = x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1}\ ,\quad y_1 = y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1}\ ,\quad z_1 = z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1}\ ;$$

die Componenten der Spannung T_2 der Seite BC sind

$$T_x - P_1 \cos\alpha_1\ ,\quad T_y - P_1 \cos\beta_1\ ,\quad T_z - P_1 \cos\gamma_1\ ;$$

also wird T_2 selbst durch

$$\sqrt{(T_x - P_1 \cos\alpha_1)^2 + (T_y - P_1 \cos\beta_1)^2 + (T_z - P_1 \cos\gamma_1)^2}$$

ausgedrückt und die Richtungswinkel der Seite BC werden durch

$$\cos a_2 = \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_1}\ ,\quad \cos b_2 = \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1}{T_1}\ ,$$

$$\cos c_2 = \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1}{T_1}\ ;$$

bestimmt; man hat demnach

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_2}\ , \\ y_2 &= y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1}{T_2}\ , \\ z_2 &= z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1}{T_2} \end{aligned}\right.$$

Für die Spannung T_3 der Seite CD hat man ferner die Componenten:

$$T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2 \quad , \quad T_y - P_1 \cos\beta_1 - P_2 \cos\beta_2 \, ,$$
$$T_z - P_1 \cos\gamma_1 - P_2 \cos\gamma_2 \, ,$$

und demnach für die gegebenen Coordinaten x_3, y_3, z_3 des festen Punktes D die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2}{T_3} \\ y_3 &= y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1}{T_2} + l_3 \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1 - P_2 \cos\beta_2}{T_3} \\ z_3 &= z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1}{T_2} + l_3 \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1 - P_2 \cos\gamma_2}{T_3} \end{aligned}\right\} , \text{(f.}$$

worin T_1, T_2 und T_3 durch die entsprechenden Wurzelgrößen ersetzt werden müßten, um diese Gleichungen direct nach T_x, T_y, T_z auflösen zu können. Diese Auflösung kann aber, wie man darnach leicht einsehen wird, auch unter den einfachsten Voraussetzungen nur auf dem Wege des Probirens erhalten werden, indem man für T_x, T_y, T_z naheliegende Werthe wählt, damit zuerst die Spannungen T_1, T_2, T_3 und dann die Coordinaten x_3, y_3, z_3 berechnet, und aus den Unterschieden zwischen diesen Ergebnissen und den für diese Coordinaten gegebenen Werthen auf genauere Werthe für T_x, T_y, T_z schließt.

Man kann übrigens den Gleichungen (f) dadurch eine etwas einfachere Form geben, daß man eine der Coordinatenachsen, z. B. die der x durch die beiden festen Punkte legt, und den einen, z. B. A als Anfang der Coordinaten nimmt, und dann noch eine der Coordinaten-Ebenen, z. B. die der xy parallel zur Richtung einer der äußern Kräfte z. B. der Kraft P_1 annimmt. Es wird dadurch $x_0 = y_0 = z_0 = y_3 = z_3 = 0$, und $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$; es nehmen also die Gleichungen (f) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2}{T_3} \\ 0 &= l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1 \sin\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_y - P_1 \sin\alpha_1 - P_2 \cos\beta_2}{T_3} \\ 0 &= l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z}{T_2} + l_3 \frac{T_z - P_2 \cos\gamma_2}{T_3} \end{aligned}\right\} , \text{(g.}$$

und die dritte derselben zeigt, daß wenn auch P_2 zur Ebene der xy parallel und $\cos\gamma_2 = 0$ wird, auch T_z Null ist, daß also das ganze Polygon in diese Ebene fällt, eine Folgerung, welche sich darnach leicht auf ein Polygon mit einer beliebigen Anzahl von äußern Kräften, welche alle zu denselben Ebenen parallel sind, ausdehnen läßt.

Nehmen wir also diesen einfacheren Fall an, und setzen wir um für unsere Berechnung ein Beispiel durchzuführen, $x_3 = 10^m$, $l_1 = 3^m$, $l_2 = 5^m$, $l_3 = 8^m$, so daß, wie es nothwendig sein muß, $l_1 + l_2 + l_3 > x_3$ ist; ferner sei $P_1 = 12^{Kgr}$, $P_2 = 7^{Kgr}$, und $\alpha_1 = 120^0$, $\alpha_2 = 45^0$, was im jetzigen Falle für die Bestimmung der Richtungen dieser Kräfte genügend ist. Man hat damit die Werthe $P_1 \cos\alpha_1 = -6{,}000$, $P_1 \cos\beta_1 = P_1 \sin\alpha_1 = +10{,}392$, $P_2 \cos\alpha_2 = P_2 \cos\beta_2 = 4{,}950$, und die beiden ersten der Gleichungen (g) werden

$$\text{h.)}\left\{\begin{aligned} 0 &= 1 - 0{,}3\frac{T_x}{T_1} - 0{,}5\frac{T_x + 6{,}000}{T_2} - 0{,}8\frac{T_x + 6{,}000 - 4{,}950}{T_3}, \\ 0 &= \quad 0{,}3\frac{T_y}{T_1} + 0{,}5\frac{T_y - 10{,}392}{T_2} + 0{,}8\frac{T_y - 10{,}392 - 4{,}950}{T_3}. \end{aligned}\right.$$

Als erste Annäherung können wir die Spannung T_1 nahe gleich der Hälfte der Resultirenden der Kräfte P_1 und P_2 annehmen, also nahe

$$T_x = \tfrac{1}{2}(6{,}000 \quad + \; 4{,}95) = - \; 0{,}525\;,$$

$$T_y = \tfrac{1}{2}(10{,}392 + 4{,}95) = + \; 7{,}671\;,$$

wofür wir $T_x = 0$, $T_y = 8$ setzen wollen; es wird dann $T_1 = 8$,

$$T_2 = \sqrt{6^2 + (2{,}392)^2} = 6{,}459$$

$$T_3 = \sqrt{(1{,}05)^2 + (7{,}342)^2} = 7{,}417$$

und für die rechten Seiten der obigen Gleichungen, welche wir mit u_x und u_y bezeichnen wollen, ergeben sich die Werthe:

$$u_x = 1 - 0{,}464 - 0{,}113 = 0{,}423\;,$$

$$u_y = 0{,}300 - 0{,}185 - 0{,}792 = - 0{,}677\;,$$

welche zeigen, daß sowohl T_x als T_y zu klein ist. Nehmen wir daher $T_x = 1$, $T_y = 11$, so ergibt sich

$$T_1 = \sqrt{122} \;, \quad T_2 = \sqrt{7^2 + (0,608)^2} \;, \quad T_3 = \sqrt{(2,05)^2 + (4,342)^2} \;,$$

$$u_x = 1 - 0,027 - 0,498 - 0,342 = 0,133 \;,$$

$$u_y = 0,300 + 0,043 - 0,726 = -0,383 \;,$$

es bleibe daher $T_x = 1$, für T_y aber setze ich den Werth 13 ein, und erhalte

$$u_x = 1 - 0,023 - 0,469 - 0,527 = -0,019 \;,$$

$$u_y = 0,300 + 0,175 - 0,602 = -0,127 \;.$$

Der Werth von u_x hat nun das Zeichen gewechselt, der von u_y noch nicht; es muß demnach $T_x < 1$, $T_y > 13$ genommen werden. Um nun aber sicher zu gehen und diese Werthe in engere Grenzen einschließen zu können, müssen die Werthe von u_x und u_y für mehrere aufeinanderfolgende Werthe von T_x und T_y berechnet werden; man kann sich dazu die Veränderlichen u_x und u_y als die denselben Werthen von x und y entsprechenden dritten Ordinaten z_1 und z_2 zweier Flächen denken, deren Durchschnittslinie die Ebene der xy in einem Punkte trifft, dessen Coordinaten die gesuchten Werthe von T_x und T_y sind, und welcher nach dem Vorhergehenden zwischen $T_x = 0,5$ und $T_x = 1,0$, und zwischen $T_y = 13$ und $T_y = 14$ liegen dürfte. Seine genauere Lage wird sich ergeben, wenn wir die beiden Flächen in der Nähe dieses Punktes durch Ebenen, die zur Ebene der xz parallel sind, deren Gleichungen also die Form haben:

$$x \text{ oder } T_x = a$$

schneiden und die Formen der beiden Schnittcurven und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes annähernd bestimmen, d. h. für mehrere Punkte derselben die Ordinate T_y annehmen und darnach die zugehörigen dritten Ordinaten u_x und u_y berechnen. Auf diese Weise ergibt sich zuerst folgende Tabelle:

Für $T_x = 0,4$, $T_y = 13,3$, wird $u_x = +0,0726$, $u_y = -0,1456$,
" " " $= 13,6$ " " $= +0,0324$ " $= -0,0909$,
" " " $= 13,9$ " " $= -0,0144$ " $= -0,0239$,
" " " $= 14,2$ " " $= -0,0666$ " $= +0,0606$.

daraus folgt, daß die beiden Schnittcurven für $T_x = 0,4$ sich nahe bei $T_y = 13,9$ schneiden, und zwar hat man zur nähern Bestimmung die Proportion:

$$\Delta T_y : 0,3 - \Delta T_y = 0,0239 - 0,0144 : 0,0606 + 0,0666 ,$$

woraus mit einstweilen hinreichender Genauigkeit $\Delta T_y = 0,02$, $T_y = 13,92$ folgt, und sich gemäß proportionaler Aenderung $u_x = u_y = -0,0180$ berechnet.

Ferner findet man für $T_x = 0,5$ und die gleichen Werthe von T_y wie vorher folgende Werthe für u_x und u_y:

Für $T_x = 0,5$, $T_y = 13,3$ wird $u_x = +0,0486$, $u_y = -0,1332$,
" " $= 13,6$ " $= +0,0086$ " $= -0,0766$,
" " $= 13,9$ " $= -0,0365$ " $= -0,0076$,
" " $= 14,2$ " $= -0,0861$ " $= +0,0780$.

Der Durchschnittspunkt der beiden jetzigen Schnittcurven liegt also noch unter der Ebene der xy und zwar zwischen $T_y = 13,6$ und $T_y = 13,9$; annähernd hat man wieder von 13,6 an

$$\Delta T_y : 0,3 - \Delta T_y = 0,0086 + 0,0766 : 0,0365 - 0,0076 ,$$

also

$$\Delta T_y = 0,22 \quad , \quad T_y = 13,82 \quad , \quad u_x = u_y = -0,0252 .$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den vorhergehenden, so wird man leicht daraus schließen, daß man T_x noch kleiner nehmen muß, als 0,4 und daß es genügt mit den Werthen 13,9 und 14,2 für T_y zu rechnen; man findet

für $T_x = 0,2$, $T_y = 13,9$ die Werthe $u_x = +0,0365$, $u_y = -0,0583$,
" " $= 14,2$ " $= -0,0209$ " $= +0,0221$,

und schließt daraus für den Durchschnittspunkt der entsprechenden Schnittcurven

$$T_x = 0,2 \quad , \quad T_y = 14,106 \quad , \quad u_x = u_y = -0,0030 .$$

Stellen wir diesen Werth mit denen der vorhergehenden Durchschnittspunkte zusammen, so ergibt sich die Tabelle

$$T_x = 0{,}5 \;,\quad T_y = 13{,}82 \;,\quad u_x = u_y = -\,0{,}0252\,,$$
$$\text{„} = 0{,}4 \qquad \text{„} = 13{,}92 \qquad \text{„} \quad \text{„} = -\,0{,}0180\,,$$
$$\text{„} = 0{,}2 \qquad \text{„} = 14{,}11 \qquad \text{„} \quad \text{„} = -\,0{,}0030\,,$$

und daraus der Schluß, daß die Durchschnittscurve unserer beiden Flächen die Ebene der xy im Sinne der positiven z und der positiven y, aber im Sinne der negativen x durchschneidet. Wir müssen demnach für T_x auf den Werth 0,0 zurück- und für T_y über den Werth 14,2 hinausgehen;

$$\text{für } T_x = 0 \;,\quad T_y = 14{,}2 \text{ wird } u_x = +\,0{,}0363 \;,\quad u_y = -\,0{,}0210\,,$$
$$\text{„} \qquad \text{„} = 14{,}5 \qquad \text{„} = -\,0{,}0367 \qquad \text{„} = +\,0{,}0820\,.$$

Der Durchschnitt der entsprechenden Schnittcurven hat demnach nahezu die Coordinaten:

$$T_x = 0 \;,\quad T_y = 14{,}3 \;,\quad u_x = u_y = +\,0{,}0125\;,$$

von denen die letzte zeigt, daß dieser Punkt der Schnittcurve der durch die Gleichungen (h) vorgestellten Flächen über der Ebene der xy liegt, daß also jene Curve diese Ebene zwischen den Punkten $T_x = 0{,}0$, $T_y = 14{,}3$ und $T_x = 0{,}2$, $T_y = 14{,}11$ durchdringt. Betrachten wir die Projection der genannten Schnittcurve zwischen diesen beiden Punkten als eine Gerade, so lassen sich die Coordinaten des Durchgangspunktes in der Ebene der xy wie folgt annähernd bestimmen. Die Länge dieser Geraden ist $\sqrt{(0{,}2)^2 + (14{,}3 - 14{,}11)^2} = 0{,}0276$ und wird durch den gesuchten Durchgangspunkt im Verhältniß

$$0{,}0030 : 0{,}0125$$

getheilt; der erste Theil ist demnach $\frac{30}{155}$ oder $\frac{6}{31}$ oder nahe $\frac{1}{5}$ dieser Länge, und es sind darnach auch die Coordinaten $T_x = 0{,}2$, $T_y = 14{,}11$ um $\frac{1}{5}$ der Unterschiede $0{,}2 - 0$ und $14{,}3 - 14{,}11$ zu ändern, wodurch sich für den Durchgangspunkt die angenäherten Werthe:

$$T_x = 0{,}16 \;,\quad T_y = 14{,}15$$

ergeben. Führen wir nun diese in die Gleichungen (h) ein, so folgt

$$u_x = 1 - 0{,}00339 - 0{,}42685 - 0{,}56991 = -0{,}00015 \ ,$$
$$u_y = 0{,}29998 + 0{,}26041 - 0{,}56144 = -0{,}00105 \ ,$$

für $T_x = 0{,}16$ und $T_y = 14{,}2$ dagegen erhält man

$$u_x = 1 - 0{,}00338 - 0{,}42529 - 0{,}58180 = -0{,}01047 \ ,$$
$$u_y = 0{,}29998 + 0{,}26291 - 0{,}54910 = +0{,}01379 \ ,$$

und zieht daraus für den Durchschnittspunkt der dem Werthe $T_x = 0{,}16$ entsprechenden Schnittcurven die Coordinaten:

$$T_x = 0{,}16 \quad , \quad T_y = 14{,}152 \quad , \quad u_x = u_y = -0{,}00052 \ .$$

Vergleicht man diese mit den Coordinaten $T_x = 0$, $T_y = 14{,}3$, $u_x = u_y = +0{,}0125$, so ergeben sich als genauere Werthe $T_x = 0{,}155$, $T_y = 14{,}158$, und wenn wir uns mit dieser Annäherung begnügen, so finden wir einmal für die Spannungen der drei Seiten die Werthe:

$$T_1 = 14\overset{\text{Kgr}}{,}159 \quad , \quad T_2 = 7\overset{\text{Kgr}}{,}216 \quad , \quad T_3 = 1\overset{\text{Kgr}}{,}689 \ ;$$

die Richtungswinkel dieser Seiten sind

$$a_1 = \mathit{arc\,cos}\,\frac{0{,}155}{14{,}159} = \mathit{arc\,sin}\,\frac{14{,}158}{14{,}159} = 89^\circ\,22',4 \ ,$$
$$a_2 = \mathit{arc\,cos}\,\frac{6{,}155}{7{,}216} = \mathit{arc\,sin}\,\frac{3{,}766}{7{,}216} = 31^\circ\,27',6 \ ,$$
$$a_3 = \mathit{arc\,cos}\,\frac{1{,}205}{1{,}689} = \mathit{arc\,sin} - \frac{1{,}184}{1{,}689} = -44^\circ\,29',7 \ ,$$

und für die Coordinaten ihrer Eckpunkte findet man

$$x_1 = 0{,}0328 \ , \quad x_2 = 0{,}0328 + 4{,}2650 = 4{,}2978 \ ,$$
$$y_1 = 2{,}9998 \ , \quad y_2 = 2{,}9998 + 2{,}6096 = 5{,}6094 \ ,$$
$$x_3 = 4{,}2978 + 5{,}7065 = 10{,}0043 \ ,$$
$$y_3 = 5{,}6094 - 5{,}6070 = +\ 0{,}0024 \ .$$

In Fig. 13 ist dieses Polygon nach den eben berechneten Größen vorgestellt.

§. 49.

Wenn die Richtungen der äußern Kräfte P_1, P_2, etc., P_{n-1}, also aller mit Ausnahme von P_0 und P_n parallel sind, so lassen sich die in §. 47 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen durch eine entsprechende Wahl des Coordinatensystems wesentlich vereinfachen. Nehmen wir nämlich eine der Coordinatenachsen, z. B. die der z parallel zu der Richtung jener Kräfte P_1, P_2 u. s. f., so hat man $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{etc.} = \alpha_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$, ebenso $\beta_1 = \beta_2 = \text{etc.} = \beta_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ und kann $\gamma_1 = \gamma_2 = \text{etc.} = \gamma_{n-1} = 0$ setzen, indem man für diejenigen Kräfte, für welche $\gamma = \pi$ werden soll, den Werth von P negativ nimmt; die Bedingungen (a) für das äußere Gleichgewicht werden dadurch

$$\left.\begin{aligned}
&P_0 \cos\alpha_0 + P_n \cos\alpha_n = 0 \\
&P_0 \cos\beta_0 + P_n \cos\beta_n = 0 \\
&P_0 \cos\gamma_0 + P_n \cos\gamma_n + P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{n-1} = 0
\end{aligned}\right\} .$$

Die beiden ersten sprechen aus, daß die zur Achse der z senkrechten Componenten der beiden Kräfte P_0 und P_n einander gleich und direct entgegengesetzt sein müssen, daß also diese Kräfte selbst in einer zur z-Achse parallelen Ebene liegen müssen, und die dritte bedingt, daß die Summe der zur z-Achse parallelen Componenten dieser Kräfte der Summe oder Resultirenden aller parallelen Kräfte P_1 bis P_{n-1} gleich und im entgegengesetzten Sinne gerichtet sein muß.

Die Gleichungen (b) oder (c), welche die Componenten der Spannung T_i einer beliebigen Seite durch die vor oder nach dieser Seite angreifenden Kräfte ausdrücken, gehen über in

$$\left.\begin{aligned}
&-T_i \cos a_i = P_0 \cos\alpha_0 \quad , \quad -T_i \cos b_i = P_0 \cos\beta_0 \\
&-T_i \cos c_i = P_0 \cos\gamma_0 + \sum_{h=1}^{h=i-1} P_h
\end{aligned}\right\} ,$$

und

$$\left.\begin{aligned}
&T_i \cos a_i = P_n \cos\alpha_n \quad , \quad T_i \cos b_i = P_n \cos\beta_n \\
&T_i \cos c_i = P_n \cos\gamma_n + \sum_{h=i}^{h=n} P_h
\end{aligned}\right\}$$

oder wenn man die Ebene der Kräfte P_0 und P_n als Ebene der xz annimmt, wodurch $\beta_0 = \beta_n = \frac{1}{2}\pi$; $\gamma_0 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_0$; $\gamma_n = \frac{1}{2}\pi - \alpha_n$ wird;

$$\left\{\begin{aligned} &-T_i \cos a_i = P_0 \cos \alpha_0 = -P_n \cos \alpha_n \ , \qquad -T_i \cos b_i = 0 \\ &-T_i \cos c_i = P_0 \sin \alpha_0 + P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1} \\ &\qquad = -P_n \sin \alpha_n - P_i - P_{i+1} - \text{etc.} - P_{n-1} \ . \end{aligned}\right.$$

Aus der zweiten folgt, daß auch alle b Null sind, daß also das ganze Polygon in der Ebene der Kräfte P_0 und P_n liegt, und $\cos c_i = \sin a_i$ ist. Die erste und dritte der vorstehenden Gleichungen geben daher die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\tang a_i = \tang a_n + \frac{P_i + P_{i+1} + \text{etc.} + P_{n-1}}{P_n \cos \alpha_n} \ , \\ &\text{oder} \\ &\tang (\pi + a_i) = \tang \alpha_0 + \frac{P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1}}{P_0 \cos \alpha_0} \ , \end{aligned}\right.$$

durch welche sich die Richtungswinkel der einzelnen Seiten des Polygons leicht berechnen lassen, wenn P_0 und α_0 oder P_n und α_n gegeben sind. Die Berechnung der Coordinaten der einzelnen Knotenpunkte erfolgt dann wie im allgemeinen Falle.

Man schließt aus den vorhergehenden Gleichungen ferner noch, daß die zur z-Achse senkrechte Componente der Spannung für alle Seiten gleich groß ist, und daß der Unterschied zwischen den zu dieser Achse parallelen Componenten der Spannungen zweier Seiten der Summe der äußern Kräfte gleich ist, welche zwischen diesen beiden Seiten angreifen. Enthält daher das Polygon eine Seite, welche zur Richtung der Kräfte (der z-Achse) senkrecht ist, für welche demnach die zu dieser Richtung parallele Componente $T_i \sin \alpha_i$ der Spannung Null wird, so hat man

$$\begin{aligned} P_0 \sin \alpha_0 &= -(P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1}) \ , \\ P_n \sin \alpha_n &= -(P_i + P_{i+1} + \text{etc.} + P_{n-1}) \ ; \end{aligned}$$

in diesem Falle ist also die zur z-Achse parallele Componente der an einem Ende des Polygons angreifenden Kraft der Resultirenden oder Summe aller Kräfte gleich, welche zwischen jener senkrechten Seite und dem betreffenden Ende des Polygons angreifen.

Wenn die beiden Endpunkte A und N des Fadens fest sind, so liegt das Polygon offenbar in der Ebene, welche die beiden festen

Punkte enthält und zur Richtung der Kräfte P_1, P_2 u. s. f. parallel ist; im übrigen gilt für den Widerstand, welchen diese Punkte zu leisten haben, dasselbe, was vorher von den Kräften P_0 und P_n gesagt wurde, und die Berechnung der Componenten eines dieser Widerstände von welcher die Bestimmung der Form des Polygons abhängt, bietet noch dieselben Schwierigkeiten, wie in dem Falle, welchen wir im vorigen Paragraphen besprochen haben, nämlich in dem, wo alle Kräfte zu einer und derselben Ebene parallel sind, ohne selbst parallel zu sein.

§. 50.

In dem Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, daß die Angriffspunkte der äußern Kräfte mit dem Faden fest verbunden und die Längen der Polygonseiten unveränderlich bestimmt seien; betrachten wir daher noch den Fall, wo die Angriffspunkte der Kräfte P sich wie Ringe auf dem Faden ohne Reibung verschieben lassen, also blos die ganze Länge des Fadens gegeben, über die einzelnen Seiten oder Entfernungen jener Angriffspunkte aber nichts bestimmt ist.

Die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht des Systems bleiben natürlich dieselben, wie vorher und werden wieder durch die Gleichungen (a) in §. 47 ausgesprochen. Für das innere Gleichgewicht wird man leicht einsehen, daß nun die Spannung zweier aufeinander folgenden Seiten gleich sein muß, und daß dieses nur dann statthaben kann, wenn diese Seiten mit der Richtung der zwischen ihnen oder an ihrem Eckpunkte angreifenden äußern Kraft gleiche Winkel einschließen. Man überzeugt sich davon am anschaulichsten, wenn man sich die beiden andern Endpunkte dieser Seiten, z. B. B und D, Fig. 11, fest denkt, wodurch im Gleichgewichte der übrigen Punkte nichts geändert wird; der Eckpunkt C dieser Seiten kann sich dann nur auf der Oberfläche eines Umdrehungs-Ellipsoids bewegen, dessen Brennpunkte die Punkte B und D sind. Der Punkt C kann also nur im Gleichgewichte bleiben, wenn die an ihm angreifende Kraft normal zu dieser Fläche gerichtet ist, also ihre Richtung den Winkel zwischen den beiden Fahrstrahlen BC und CD halbirt, woraus sofort auch die Gleichheit der Spannungen dieser Seiten folgt.

Mit denselben Bezeichnungen wie in der vorhergehenden Untersuchung und wenn man noch den Winkel, welchen die Seite HJ mit der Seite JK, oder l_i mit l_{i+1} einschließt, mit $2\vartheta_i$ bezeichnet, hat man daher

a.) $$\begin{cases} T_i = \dfrac{P_i}{2\cos\vartheta_i} = T_{i+1} \quad , \quad T_{i+1} = \dfrac{P_{i+1}}{2\cos\vartheta_{i+1}} = T_{i+2} \quad , \quad \text{u. s. f.} \\ \text{also} \\ T_i = T_{i+1} = T_{i+2} = \text{etc.} = T_n = P_n \ , \\ T_i = T_{i-1} = T_{i-2} = \text{etc.} = T_0 = -P_0 \ , \end{cases}$$

und daraus folgt abgesehen vom Zeichen

$$P_0 = P_n \quad , \qquad \cos\vartheta_i = \frac{P_i}{2P_0} \ .$$

Für das innere Gleichgewicht müssen also im jetzigen Falle die an beiden Enden des Fadens angreifenden Kräfte gleich und bezüglich des Sinnes, in welchem sie den Faden bewegen wollen, entgegengesetzt sein; eine dieser gleichen Kräfte ist dann auch das Maaß für die in allen Punkten gleiche Spannung des Fadens. Außerdem ist aber auch entweder die Größe oder die Richtung dieser Kräfte P_0 und P_n nicht ganz willkürlich; denn es ist nach dem Vorhergehenden

b.) $$\begin{cases} P_1 = 2P_0 \cos\vartheta_1 \ , \\ \cos\vartheta_1 = \cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_1 \ ; \\ \text{und} \\ P_{n-1} = 2P_n \cos\vartheta_{n-1} \ , \\ \cos\vartheta_{n-1} = \cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_n + \cos\beta_{n-1} \cos\beta_n + \cos\gamma_{n-1} \cos\gamma_n \ ; \\ P_0 = P_n \ . \end{cases}$$

Ist also $P_0 = P_n$ der Intensität nach, P_1 und P_{n-1} der Größe und Richtung nach bestimmt, so bedingen die Gleichungen:

c.) $$\begin{cases} P_1 = 2P_0 (\cos\alpha_0 \cos\alpha_1 + \cos\beta_0 \cos\beta_1 + \cos\gamma_0 \cos\gamma_1) \\ P_{n-1} = 2P_0 (\cos\alpha_{n-1} \cos\alpha_n + \cos\beta_{n-1} \cos\beta_n + \cos\gamma_{n-1} \cos\gamma_n) \end{cases}$$

in Verbindung mit den Bedingungen:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1 \quad , \qquad \alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 = 1$$

je einen der Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_n, β_n, γ_n. Soll dagegen die Richtung von P_0 bestimmt bleiben, womit auch ϑ_1 gegeben ist, so gibt die Gleichung:

$$P_0 = \frac{P_1}{2\cos\vartheta_1}$$

die Größe von P_0 und P_n und es bleibt dann noch die Richtung von P_n nach der von P_{n-1} zu bestimmen.

Dagegen ist es im jetzigen Falle, wenn die beiden Endpunkte des Fadens befestigt sind, möglich, die Spannung und die Richtungswinkel der Seiten direct zu berechnen; denn die Gleichungen (a) in §. 47 werden nun mit den vorhergehenden Bedingungen (a) und wenn T die allen Seiten gemeinschaftliche Spannung bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} T(\cos a_1 - \cos a_n) &= P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\alpha_{n-1} \\ T(\cos b_1 - \cos b_n) &= P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\beta_{n-1} \\ T(\cos c_1 - \cos c_n) &= P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\gamma_{n-1} \end{aligned}\right\} (d.$$

die Bedingungen (c) geben ferner

$$\left.\begin{aligned} 2T(\cos a_1 \cos\alpha_1 + \cos b_1 \cos\beta_1 + \cos c_1 \cos\gamma_1) &= P_1 \\ 2T(\cos a_n \cos\alpha_{n-1} + \cos b_n \cos\beta_{n-1} + \cos c_n \cos\gamma_{n-1}) &= P_{n-1} \end{aligned}\right\} (e.$$

und diese fünf Gleichungen reichen in Verbindung mit den beiden Bedingungen:

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1 \quad , \quad \cos^2 a_n + \cos^2 b_n + \cos^2 c_n = 1 \quad (f.$$

hin, um die sieben Unbekannten: T, a_1, b_1, c_1, a_n, b_n, c_n zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke ersetzt man $T\cos a_1$, $T\cos b_1$, $T\cos c_1$ durch u_1, v_1, w_1 und $T\cos a_n$, $T\cos b_n$, $T\cos c_n$ durch u_n, v_n, w_n, ferner

$$\left.\begin{aligned} &P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\alpha_{n-1} \text{ durch } X, \\ &P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\beta_{n-1} \text{ durch } Y, \\ &P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\gamma_{n-1} \text{ durch } Z, \end{aligned}\right. (i$$

und hat dann durch die Gleichungen (d)

$$u_n = u_1 - X \quad , \quad v_n = v_1 - Y \quad , \quad w_n = w_1 - Z \quad (g.$$

führt man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (e) und in die aus den Gleichungen (f) sich ergebende neue Gleichung:

$$u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = T^2 \quad (h$$

ein, so erhält man mit der ersten der Gleichungen (c) zur Bestimmung von u_1, v_1 und w_1 folgende drei Gleichungen vom ersten Grade:

$$\left\{\begin{array}{l} 2u_1 \cos\alpha_1 + 2v_1 \cos\beta_1 + 2w_1 \cos\gamma_1 = P_1 \,, \\ 2u_1 \cos\alpha_{n-1} + 2v_1 \cos\beta_{n-1} + 2w_1 \cos\gamma_{n-1} = P_{n-1} \\ \qquad -2X\cos\alpha_{n-1} - 2Y\cos\beta_{n-1} - 2Z\cos\gamma_{n-1} \,, \\ 2u_1 X + 2v_1 Y + 2w_1 Z = X^2 + Y^2 + Z^2 \,, \end{array}\right.$$

deren Auflösung keine Schwierigkeit hat. Durch die Werthe von u_1, v_1, w_1 und die Gleichungen (g) und (h) ist auch u_n, v_n, w_n und T, also auch die Winkel a_1, b_1, c_1 bekannt, und damit und mit der Beachtung, daß auch hier immer zwei Seiten und die an ihrem gemeinschaftlichen Eckpunkte angreifende Kraft in einer Ebene liegen müssen, können mittels der Gleichungen (a) nach und nach die Richtungswinkel aller Seiten bestimmt werden.

Man ersieht daraus, daß in dem Falle, wo die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2, u. s. f., auf dem Faden verschiebbar sind, die Spannung und die Richtungswinkel aller Seiten sich ohne Rücksicht auf die Coordinaten der Endpunkte berechnen lassen. In diesem Falle ist aber auch unter der bisherigen Voraussetzung, daß die Richtungen der äußeren Kräfte parallel mit sich beliebig verrückt werden können, und die Punkte, von welchen diese Kräfte ausgehen, außer Berücksichtigung bleiben, die Gestalt des Polygons im Allgemeinen nicht streng bestimmt; denn um die Coordinaten der Eckpunkte mittels der Gleichungen (d) in §. 48 zu berechnen, genügt es offenbar nicht, daß die Richtungen der einzelnen Seiten bekannt sind oder gefunden werden können, es müssen auch die Seiten der Größe nach gegeben sein, während wir im jetzigen Falle nur die Bedingung:

i.) $$l_1 + l_2 + \text{etc.} + l_n = L$$

haben, worin L die Länge des ganzen Fadens bedeutet. Soll also im Allgemeinen die Form des Polygons vollständig bestimmt werden können, so müssen die Richtungslinien der äußern Kräfte in ihrer Lage mehr beschränkt werden; es muß für jede Kraft die Lage einer Ebene gegeben sein, in welcher ihre Richtungslinie bleiben soll, und welche nicht zugleich die zwei anstoßenden Seiten des Polygons enthält. Es dürfte also im Allgemeinen am einfachsten sein, eine zur Achse der z parallele Ebene, welche die Richtung der Kraft enthalten soll, zu geben, oder

was dasselbe ist, einen Punkt in der Richtung der Kraft nur durch die Coordinaten seiner Projection in der Ebene der xy zu bestimmen. Denn bezeichnet man die Coordinaten der Projection eines solchen Punktes in der Richtung der Kraft P_i mit p_i, q_i, und setzt man voraus, daß die Coordinaten x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, bereits bestimmt sind, so ergeben sich die Coordinaten x_i, y_i, z_i als Coordinaten des Durchgangspunktes der Geraden:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\cos a_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\cos b_i} = \frac{z_i - z_{i-1}}{\cos c_i},$$

in der projicirenden Ebene:

$$\frac{x_i - p_i}{\cos \alpha_i} = \frac{y_i - q_i}{\cos \beta_i},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Richtung der Kraft P_i in dieser projicirenden Ebene parallel mit sich durch jeden Punkt gelegt werden kann.

Diesen Beschränkungen und den vorher genannten Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines Fadens mit beweglichen Angriffspunkten der äußern Kräfte ist endlich noch die Bemerkung beizufügen, daß nach der Natur eines vollkommen biegsamen Fadens die Spannung immer nur einen Zug bedeuten, und deßhalb die Richtung der an einem Eckpunkte angreifenden Kraft niemals spitze Winkel mit den anstoßenden Seiten bilden kann. Es kann daher in unserm jetzigen Falle und wenn alle äußern Kräfte bis auf P_0' und P_n parallele Richtungen haben, nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn diese Kräfte abwechselnd in entgegengesetztem Sinne wirken, weil es sonst unmöglich ist, die obengenannte Bedingung mit der frühern, daß die Richtung der Kraft P_i den Winkel zwischen den beiden anstoßenden Seiten halbiren muß, zu vereinigen, ausgenommen in dem unerreichbaren Falle, wo der Faden eine gerade Linie bilden soll, die Spannung T also unendlich groß sein müßte.

§. 51.

Das Knie besteht in seiner einfachsten geometrischen Gestalt, als mathematisches Knie, aus zwei festen unbiegsamen Geraden AB, BC, Fig. 14, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben und sich um diesen ohne Widerstand bewegen, also jeden beliebigen Winkel ABC zwischen sich einschließen können; der Endpunkt A des einen Schenkels

AB ist fest und unverrückbar, der Endpunkt C des andern BC dagegen ist der Beschränkung unterworfen, sich auf der durch A gelegten unbiegsamen und unverrückbaren Geraden AX zu bewegen; an den Punkten B und C greifen äußere Kräfte P und Q an, von denen die erste eine beliebige Richtung haben, die zweite aber längs der Geraden AD gerichtet sein soll.

Dieses veränderliche System befindet sich jedenfalls im Zustande des äußern Gleichgewichtes; fügen wir also zu den vorhergenannten äußern Kräften P und Q noch die Widerstände, welche der Punkt A und die Gerade AD im Punkte C zu leisten haben, so müssen alle diese Kräfte den Bedingungen des äußern Gleichgewichtes genügen und diese Bedingungen werden umgekehrt dazu dienen, die Größe jener Widerstände zu bestimmen. Dazu nehmen wir die Ebene des Systems als Ebene der xy, die Gerade AX als Achse der x, den Punkt A als Anfangspunkt, bezeichnen die Länge der Schenkel AB und BC durch l_1 und l_2, mit α und β die Winkel BAC und BCA, welche sie mit der Geraden AC einschließen, und die unter sich durch die Gleichung:

$$\text{a.)} \quad l_1 \sin\alpha = l_2 \sin\beta$$

in Abhängigkeit stehen, stellen den Widerstand der festen Geraden AX im Punkte C durch N_3 vor, und ersetzen den Widerstand des Punktes A durch seine beiden Componenten N_1 und N_2, von denen die eine nach der Geraden AD, die andere senkrecht dazu gerichtet ist.

Damit erhalten wir für das Gleichgewicht der fördernden Wirkungen aller äußern Kräfte die beiden Gleichungen:

$$\text{b.)} \quad \begin{cases} N_1 + Q + P\cos\widehat{Px} = 0\,, \\ N_2 + N_3 + P\sin\widehat{Px} = 0 \end{cases}$$

und als Bedingung für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf den Punkt A die Gleichung:

$$\text{c.)} \quad P l_1 (\cos\alpha \sin\widehat{Px} - \sin\alpha\cos\widehat{Px}) + N_3 (l_1 \cos\alpha + l_2\cos\beta) = 0\,.$$

Diese drei Gleichungen reichen gerade hin zur Bestimmung der drei Unbekannten N_1, N_2, N_3; sie geben mit Berücksichtigung der Gleichung (a.)

$$N_3 = -P\frac{\sin(\widehat{Px}-\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\,, \quad N_1 = -(Q + P\cos\widehat{Px})$$
$$N_2 = P\left(\frac{\sin(\widehat{Px}-\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} - \sin\widehat{Px}\right) + P\frac{\sin(\widehat{Px}+\beta)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad (d.$$

Es bleibt demnach noch die Beziehung zwischen P, Q und einem der Winkel α oder β festzustellen, und dazu dienen die Bedingungen des innern Gleichgewichtes eines jeden der beiden Schenkel AB und BC und ihres Verbindungspunktes B. Die innern Wirkungen, welche die Schenkel AB und BC aufeinander ausüben, können durch zwei Kräfte J_1 und J_2 vorgestellt werden, welche beide in B angreifen, und von denen die eine nach AB, die andere nach BC gerichtet ist und welche die nothwendige Widerstandsfähigkeit dieser Geraden gegen eine Dehnung oder Stauung ausdrücken.

Nehmen wir unserer Figur entsprechend das Erstere an, so haben wir an dem Schenkel AB die Kräfte N_1 und N_2 in A, die Kräfte P und J_1, in B angreifend, an dem Schenkel BC in B die Kräfte P und J_1, in C die Kräfte Q und N_3, und an dem Punkte B, wenn er für sich allein betrachtet wird, die Kräfte P, J_1 und J_2; die Bedingungen für das Gleichgewicht des Schenkels AB sind demnach

$$\left.\begin{aligned} N_1 + P\cos\widehat{Px} + J_2\cos\beta &= 0 \\ N_2 + P\sin\widehat{Px} - J_2\sin\beta &= 0 \\ Pl_1(\cos\alpha\sin\widehat{Px} - \sin\alpha\cos\widehat{Px}) - J_2 l_1(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und geben, verglichen mit den Gleichungen (b) und (c) nur die Beziehungen:

$$J_2\sin\beta = -N_3\,, \quad J_2\cos\beta = Q\,, \quad J_2 = \sqrt{Q^2+N_3^2}\,,$$

welche ohnehin einleuchten; ebenso geben die Gleichgewichtsbedingungen für den Schenkel BC, nämlich

$$\left.\begin{aligned} Q + P\cos\widehat{Px} - J_1\cos\alpha = 0\,, \quad N_3 + P\sin\widehat{Px} - J_1\sin\alpha \\ Pl_1\sin(\widehat{Px}-\alpha) + N_3 l_1\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = 0 \end{aligned}\right\},$$

nur Bekanntes und die unmittelbar einleuchtenden Gleichungen:

$$N_1 = -J_1 \cos\alpha \quad , \quad N_2 = -J_1 \sin\alpha \quad , \quad J_1 = \sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

weil dort die Kräfte J_2 und $\sqrt{Q^2 + N_3^2}$, hier die Kräfte J_1 und $\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ an den Endpunkten einer unveränderlichen Geraden angreifen.

In diesem einfachen Falle genügen demnach die Gleichgewichtsbedingungen des Punktes B; diese sind

$$\begin{cases} P \cos\widehat{Px} - J_1 \cos\alpha + J_2 \cos\beta = 0 \,, \\ P \sin\widehat{Px} - J_1 \sin\alpha - J_2 \sin\beta = 0 \,, \end{cases}$$

und wenn hier die Componenten J_1 und J_2 mittels der vorhergehenden Ergebnisse durch die Widerstände N ausgedrückt und für diese die aus den vorhergehenden Beziehungen (d) folgenden Werthe gesetzt werden, so findet man

$$J_1 = \frac{Q + P\cos\widehat{Px}}{\cos\alpha} \quad , \quad J_2 = \frac{Q}{\cos\beta} \;;$$

damit wird die erste unmittelbar befriedigt, und die zweite gibt nach einigen Reductionen die gesuchte Bedingung zwischen P und Q, nämlich

$$\text{f.)} \qquad P \sin(\widehat{Px} - \alpha) = Q \cos\alpha\,(\tang\alpha + \tang\beta)$$

$$= Q\,\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$$

oder die Werthe:

$$P = Q\,\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\beta} \quad , \quad Q = P\,\frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \,.$$

Mit diesem können dann auch die Widerstände N_3 und $\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ und die erforderlichen Widerstandsfähigkeiten J_1 und J_2 in Function von Q oder P ausgedrückt werden. Man findet abgesehen von den Zeichen

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = J_1 = Q \frac{\sin(\widehat{Px} + \beta)}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\beta} = P \frac{\sin(\widehat{Px} + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$J_2 = \frac{Q}{\cos\beta} = P \frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)},$$

$$N_3 = Q \tang\beta = P \frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Alle diese Werthe hängen von einem der Winkel α oder β ab, also von der Neigung der Schenkel gegen die feste Gerade AX; sie zeigen zuerst, daß $\widehat{Px}$ nicht gleich α oder gleich $\pi + \alpha$ werden darf, wenn nicht Q Null werden soll; für ein constantes P und $\widehat{Px}$, wächst Q fortwährend, wenn α und β abnehmen, und nimmt für $\alpha = \beta = 0$ den Werth ∞ an; in diesem Falle werden aber auch J_1 und J_2 unendlich groß, und es kann der Werth $Q = \infty$ in der Anwendung nicht erreicht werden, weil es keine Schenkel von unendlich großer Widerstandsfähigkeit gibt.

Die vorhergehenden Gleichungen werden einfacher, wenn $l_1 = l_2$, das Knie also ein gleichschenkliches ist; daraus folgt auch $\alpha = \beta$, und man hat

$$P = Q \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\alpha} = Q \frac{2\sin\alpha}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)}.$$

Verfügt man dann noch über die Richtung von P entweder so, daß P immer senkrecht zu AX, oder immer senkrecht zu AB ist, so hat man im ersten Falle

$$\widehat{Px} = \tfrac{1}{2}\pi \quad, \quad P_1 = 2Q \tang\alpha\,;$$

im zweiten dagegen wird

$$\widehat{Px} = \tfrac{1}{2}\pi + \alpha \quad, \quad P_2 = 2Q \sin\alpha\,;$$

es kann daher im letzten Falle für ein gleiches Q immer P kleiner sein, als im ersten, oder umgekehrt ein gleiches P hält im zweiten Falle und bei gleicher Neigung der Schenkel immer einem größern Q das Gleichgewicht, und es ist leicht zu sehen, daß für ein gleichschenkliches Knie

und ein beliebiges α der Werth von P_2 überhaupt der kleinste, die entsprechende Richtung dieser Kraft also die vortheilhafteste ist. Der Unterschied zwischen den Werthen von P_1 und P_2 wird übrigens nur für größere Werthe von α fühlbar, wie folgende Tabelle zeigt:

Für $\alpha = 45^0$	wird $P_1 = 2{,}000\ Q$,		$P_2 = 1{,}414\ Q$,
„ $= 30^0$	„ $= 1{,}155\ Q$,		„ $= 1{,}000\ Q$,
„ $= 15^0$	„ $= 0{,}536\ Q$,		„ $= 0{,}518\ Q$,
„ $= 10^0$	„ $= 0{,}353\ Q$,		„ $= 0{,}347\ Q$,
„ $= 5^0$	„ $= 0{,}175\ Q$,		„ $= 0{,}174\ Q$.

In dem ersten dieser einfachen Fälle hat man ferner für die Kräfte N und J die Werthe:

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = J_1 = J_2 = Q \sec\alpha = \frac{P}{2 \sin\alpha},$$

$$N_3 = N_1 = Q \tang\alpha = \tfrac{1}{2} P;$$

im zweiten wird

$$J_1 = Q \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = P \cot 2\alpha,$$

$$J_2 = Q \sec\alpha = P \frac{1}{\sin 2\alpha}, \quad N_3 = Q \tang\alpha = \frac{1}{2} P \sec\alpha.$$

Die vorhergehenden Beziehungen wurden insbesondere unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Kraft Q im Sinne der positiven x wirke oder einen Zug auf das Knie ausübe; es ist aber leicht zu sehen, daß diese Gleichungen und Bedingungen mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen auch für den gewöhnlich stattfindenden Fall, wo Q einen Druck vorstellt oder von C gegen A wirkt, gültig sind, namentlich daß die Beziehung zwischen P und Q unverändert bleibt, da nun auch P das Zeichen wechselt oder der Winkel $\widehat{Px}$ um π größer wird.

Wenn übrigens die Kraft P nicht unmittelbar in B angreift, sondern statt ihrer eine Kraft P′ an irgend einem Punkte O, welcher mit dem Schenkel AB fest verbunden ist, und dessen Polar-Coordinaten in Bezug auf A und AB mit r und ϑ bezeichnet seien, so ist aus den Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieses Schenkels leicht zu schließen, insbesondere aus der Bedingung für das Gleichgewicht der

brechenden Wirkungen, daß die Momente der Kräfte P und P' in Bezug auf A gleich sein müssen, daß man also

$$P l_1 \sin(\widehat{Px} - \alpha) = P' r \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta)$$

hat und demnach nur in der allgemeinen Beziehung (f) zwischen P und Q sowie in den darauffolgenden Werthen für die Kräfte N und J den Ausdruck $P' \frac{r}{l_1} \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta)$ statt $P \sin(\widehat{Px} - \alpha)$ setzen muß, so daß jene nun den Werth gibt:

$$Q = P' \frac{r \sin(\widehat{Px} - \alpha - \vartheta) \cos\beta}{l_1 \sin(\alpha + \beta)}.$$

In diesem Ausdruck wird man in dem Product $r \sin(\widehat{Px} - \alpha - \vartheta)$ die Länge der von A auf die Richtung von P', in $l_1 \sin(\alpha + \beta)$ die Länge der von A auf BC gefällten Senkrechten erkennen; ferner ist $\frac{Q}{\cos\beta}$ die Intensität der in der Richtung BC wirkenden Kraft $J_2 = \sqrt{Q^2 + N_3^2}$; bezeichnet man demnach die genannten Senkrechten mit p' und i, so wird einfach

$$P' p' = J_2 i \quad , \quad P' p' \cos\beta = Q i$$

die Bedingung für das Gleichgewicht unseres Systems.

Für das gleichschenkliche Knie, Fig. 15, wird

$$\frac{i}{\cos\beta} = \frac{AE}{\cos\alpha} = AF = 2BD = 2f;$$

wenn man daher die Ordinate BD = f den Pfeil des Knies nennt, so kann man die Gleichung:

$$P' p' = 2Qf$$

dahin aussprechen: Bei dem gleichschenklichen Knie verhält sich die Kraft P' zu dem durch das Knie ausgeübten Zug oder Druck Q, wie der doppelte Pfeil zu dem Hebelarm des Momentes der Kraft P'. Die in der Figur angedeutete Construction wird darnach keiner weitern Erklärung bedürfen.

In der Maschinenlehre werde ich auf dieses wichtige Maschinen-Element zurückkommen und dort soll dann auch die Reibung berücksichtigt werden.

§. 52.

Als ein weiteres Beispiel für das innere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems, welches aus festen Theilen zusammengesetzt ist, betrachte ich noch die Roberval'sche Wage, theils weil sie am besten zeigt; wie nothwendig es für eine klare Behandlung und Anschauung der Verhältnisse bei veränderlichen Systemen ist, zwischen innerem und äußerem Gleichgewicht zu unterscheiden, theils weil dieselbe ein technisch wichtiges Princip darstellt, welches in der neuern Zeit sowohl für gleichwägende, als für Dezimal-Wagen Anwendung gefunden hat, und welches noch einer strengen Begründung durch Zurückführung auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen entbehrt.

Auf ihre geometrische Gestalt zurückgeführt, besteht die Roberval'sche Wage aus vier je zwei gleichen unbiegsamen Geraden, welche zu einem veränderlichen Parallelogramm CDEF, Fig. 16, verbunden, und von denen zwei gegenüberliegende Seiten CD und EF in ihren Mittelpunkten A und B in einer Vertikalen so befestigt sind, daß sich das Parallelogramm in seiner Ebene um diese Punkte ohne Widerstand drehen läßt; an diesem System greifen zwei parallele Kräfte P und Q an, welche im Sinne der Schwere wirken, und deren Angriffspunkte G und H mit den vertikalen Seiten CE und DF auf irgend eine Weise fest verbunden sind, gewöhnlich mittels unbiegsamer, zu CE und DE senkrechter Geraden, auf welchen sich die Angriffspunkte G und H verschieben lassen *).

Um indessen das betreffende Princip sogleich allgemeiner aufzufassen, will ich annehmen, daß die festen Punkte A und B die Seiten CD und EF, Fig. 17, auf gleiche aber beliebige Weise theilen, so daß zwei ungleiche Parallelogramme ACBE und BFDA gebildet werden, und sich verhält

$$CA : AD = EB : BF = m : n \; ,$$

*) Man hat es früher für eine Ausnahme vom Gesetze des Hebels angesehen, daß an dieser Wage Gleichgewicht stattfindet, wenn P = Q ist, ohne Rücksicht auf die Entfernung der Angriffspunkte G und H von der Vertikalen AB. Die erste richtige Erklärung davon scheint Poinsot gegeben zu haben in seinen Élémens de statique.

und daß die Kräfte P und Q in der Ebene des Parallelogrammes beliebige Richtungen haben; auch wollen wir für jetzt alle Geraden als gewichtlos voraussetzen.

Die Ebene der Figur sei die der xz, die Gerade AB die Achse der positiven z und A der Anfangspunkt; die Länge der Seiten CD und EF sei l_1, die der Seiten CE und DF oder der Abstand der festen Punkte B und A sei l_2; die Entfernungen GK und LH der Angriffspunkte G und H von den Seiten CE und DF bezeichnen wir mit a_1 und a_2, die Abstände CK und DL dieser Senkrechten von C und D mit c_1 und c_2, und mit α den Winkel, den die Seite CD mit der x-Achse einschließt; endlich sollen N_1 und N_2 die Widerstände vorstellen, welche die Punkte A und B zu leisten haben und ω_1, ω_2 die Winkel ihrer Richtungen mit der Achse der x. Demnach sind die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht des Systems und zwar für das Gleichgewicht der fördernden Wirkungen:

$$\left.\begin{aligned} P\cos\widehat{Px} + Q\cos\widehat{Qx} + N_1\cos\omega_1 + N_2\cos\omega_2 = 0 \\ P\sin\widehat{Px} + Q\sin\widehat{Qx} + N_1\sin\omega_1 + N_2\sin\omega_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(a.}$$

Um die Bedingungen für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen aufzustellen, haben wir zuerst die Coordinaten der Angriffspunkte G und H zu bestimmen; diese, mit x_1, y_1 für P, mit x_2, y_2 für Q bezeichnet, sind:

$$x_1 = \frac{m}{m+n} l_1 \cos\alpha + a_1 \;, \qquad z_1 = \frac{m}{m+n} l_1 \sin\alpha + c_1 \;,$$

$$-x_2 = \frac{n}{m+n} l_1 \cos\alpha + a_2 \;, \qquad -z_2 = \frac{n}{m+n} l_1 \sin\alpha - c_2 \;;$$

die betreffende Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$\left.\begin{aligned} P\left(\frac{m}{m+n} l_1 (\sin\alpha\cos\widehat{Px} - \cos\alpha\sin\widehat{Px}) + c_1\cos\widehat{Px} - a_1\sin\widehat{Px}\right) \\ -Q\left(\frac{n}{m+n} l_1 (\sin\alpha\cos\widehat{Qx} - \cos\alpha\sin\widehat{Qx}) - c_2\cos\widehat{Qx} - a_2\sin\widehat{Qx}\right) \\ + N_2 l_2 \cos w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(b.}$$

Diese drei Gleichungen (a) und (b) reichen nicht hin, die vier Größen N_1, N_2, ω_1 und ω_2 zu bestimmen; es muß daher für das äußere Gleichgewicht eine dieser Größen überflüssig sein, da die Kräfte N bei dem innern Gleichgewicht nicht betheiligt sind, und in der That wird man einsehen, daß es für unsern Zweck genügt, zu bedingen, daß der Punkt B in der Geraden AB bleibt, daß also diese Gerade einen normalen Widerstand leistet, der im Sinne der positiven oder negativen x gerichtet ist. Dadurch haben wir $\cos\omega_2$ bis auf das Zeichen bestimmt, und können nun $N_2 \cos\omega_2$ einfach durch N_2 ersetzen, da $N_2 \sin\omega_2$ Null wird. Hat man dann diese Größe aus der Gleichung (b) in die erste der Gleichungen (a) eingeführt, so kann man aus diesen die Werthe von $N_1 \sin\omega_1$ und $N_1 \cos\omega_1$ ziehen, wodurch auch N_1 und ω_1 bekannt sind. Eine Beziehung zwischen P und Q kann aber durch jene Gleichungen nicht erhalten werden.

Suchen wir also die Bedingungen für das innere Gleichgewicht der einzelnen Theile. Dazu bezeichnen wir die innern Wirkungen in den Punkten C, D, E, F durch J_1, J_2, J_3, J_4, die Componenten von J nach CA und CE positiv genommen durch J_1' und J_1'', die von J_2 nach DA und DF durch J_2', J_2'', die von J_3 nach EB und EC durch J_3', J_3''; endlich die Componenten von J_4 nach FB und FD durch J_4' und J_4'', und erhalten so für das Gleichgewicht der Geraden CD die drei Gleichungen:

$$\text{c.)}\quad \begin{cases} N_1 \cos\omega_1 + (J_1' + J_2') \cos\alpha = 0\,, \\ N_1 \sin\omega_1 + (J_1' + J_2') \sin\alpha + J_1'' + J_2'' = 0\,, \\ nJ_1'' - mJ_2'' = 0\,. \end{cases}$$

Für das Gleichgewicht der Geraden EF ergeben sich ebenso die Bedingungen:

$$\text{d.)}\quad \begin{cases} N_2 + (J_3' + J_4') \cos\alpha = 0\,, \\ (J_3' + J_4') \sin\alpha + J_3'' + J_4'' = 0\,, \\ mJ_3'' - nJ_4'' = 0\,, \end{cases}$$

für deren letzte der Punkt B als Drehungspunkt genommen ist. Bezieht man ferner die drehenden Wirkungen der an der Seite CE angreifen-

den Kräfte auf den Punkt C, so werden die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Seite

$$\left.\begin{aligned} P\cos\widehat{Px}-(J_1'+J_3')\cos\alpha &= 0 \\ P\sin\widehat{Px}-(J_1'+J_3')\sin\alpha-J_1''-J_3'' &= 0 \\ P(c_1\cos\widehat{Px}-a_1\sin\widehat{Px})-J_3'l_2\cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (e.$$

und für das Gleichgewicht der Seite DF findet man in gleicher Weise, wenn die drehenden Wirkungen in Bezug auf den Punkt D genommen werden, die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} Q\cos\widehat{Qx}-(J_2'+J_4')\cos\alpha &= 0 \\ Q\sin\widehat{Qx}-(J_2'+J_4')\sin\alpha-J_2''-J_4'' &= 0 \\ Q(c_2\cos\widehat{Qx}+a_2\sin\widehat{Qx})-J_4'l_2\cos\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (f.$$

Wir haben demnach im Ganzen 15 Gleichungen, worin 11 Unbekannte enthalten sind, die 8 Kräfte J, die beiden Widerstände N_1 und N_2 und der Richtungswinkel ω_1 des ersten derselben. Es sind demnach drei derselben überflüssig oder lassen sich aus den andern durch analytische Umformung oder Verbindung derselben ableiten. So gibt in der That die Summe von je der ersten der Gleichungen (c), (d), (e) und (f) die erste der Gleichungen (a), wenn darin N_2 für $N_2 \cos\omega_2$ gesetzt wird, und die zweite dieser Gleichungen, $N_2 \sin\omega_2 = 0$ gesetzt, kommt zum Vorschein, wenn je die zweite der genannten Gleichungen (c) bis (f) addirt werden. Addirt man dagegen die Summe von je der dritten der Gleichungen (e) und (f) und der ersten der Gleichungen (d), nachdem diese mit l_2 multiplizirt worden, zu der Gleichung (b), so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen P und Q, nämlich

$$mP\sin(\alpha-\widehat{Px}) = nQ\sin(\alpha-\widehat{Qx}) \quad \ldots \quad (g.$$

Diese Bedingung ist, wie man sieht, gänzlich unabhängig von den Größen a_1, a_2; c_1, c_2; sie ist dieselbe, wie die für das Gleichgewicht der mit P und Q gleichen und parallelen Kräfte P′ und Q′, welche an den Endpunkten C und D des in A befestigten Hebels CD angreifen; denn man wird sich leicht überzeugen, daß

$\frac{m}{m+n} l_1 \sin(\alpha - \widehat{Px}) = p'$, und $\frac{n}{m+n} l_1 \sin(\alpha - \widehat{Qx}) = q'$

die Hebelarme der drehenden Wirkungen von P' und Q' in Bezug auf den Punkt A sind, und die Gleichung (g) demnach auf

$$P'p' = Q'q'$$

zurückkommt. Es ist demnach für das innere Gleichgewicht unsers Systems ganz gleichgültig, wo die Kräfte P und Q angreifen, wenn nur die Angriffspunkte derselben mit den Seiten CE und DF fest verbunden sind; das Gleichgewicht findet immer unter derselben Bedingung statt, unter welcher sich zwei jenen Kräften gleiche und parallele Kräfte in C und D das Gleichgewicht halten.

Wenn daher $m = n$ und $\widehat{Qx} = \widehat{Px}$, d. h. wenn A die Mitte von CD ist und die Kräfte parallel sind, so muß für das Gleichgewicht $Q = P$ sein, und umgekehrt wird dieses immer stattfinden, wenn $Q = P$ ist, ob z. B. die Kraft P in G oder in J, Fig. 16, angreift.

Die nähere Bestimmung der Widerstände N und der innern Kräfte J ist hier für uns von keinem hinreichenden Belang, um weiter darauf einzugehen, und soll dem Leser überlassen bleiben; ich will statt dessen das eben untersuchte System noch unter einer etwas veränderten Gestalt betrachten, nämlich unter der in Figur 18 dargestellten, welche der bei der Decimal-Wage angewendeten Construction mehr als die vorhergehende entspricht; sie geht aus dieser hervor, wenn man die Seite EF bei B begrenzt, CE und EB fortnimmt und die Kraft P unmittelbar an C angreifen läßt, so daß auf der linken Seite von AB noch das Parallelogramm ADFB bleibt, mit dessen mittlerer Seite DF der Angriffspunkt der Kraft Q fest verbunden ist. Für dieses genügt es nun aber nicht mehr, daß der Punkt B auf der Geraden AB bleiben muß; im jetzigen Falle muß auch der Punkt B so befestigt sein, daß sich die Seite DB nur um denselben drehen läßt. Nach dem Vorhergehenden ist für diesen Fall leicht einzusehen, daß es auch hier für das Gleichgewicht gleichgültig ist, wo der Angriffspunkt der Kraft Q liegt, und daß ihre Wirkung in dieser Beziehung immer dieselbe ist, als wenn sie ihren Angriffspunkt in D hätte, daß man also für parallele Kräfte das Verhältniß: $Q = 10P$ erhält, wenn $m = 10n$, $\overline{AC} = 10\overline{AD}$ ist.

Ich habe den gegenwärtigen Fall hauptsächlich deßwegen in nähere Betrachtung gezogen, weil hier der Punkt B befestigt ist, die obige Beschränkung der Richtung der Kraft N_2 also nicht mehr zulässig scheint. Es muß nun allerdings außer der zu AB senkrecht gerichteten N_2 noch eine längs BA wirkende Kraft eingeführt werden, welche sich jeder Aenderung der Seite AB des Parallelogramms ABFD widersetzt; man würde aber sehr irren, wenn man diese Kraft mit der N_2 zu einer vereinigt in die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht einführen wollte; denn diese neue Kraft ist eine von den innern Kräften J und greift ebensowohl in A in entgegengesetztem Sinne wirkend an, wie in B, und für das äußere Gleichgewicht unseres Systems, zu welchem AB als Seite des Parallelogramms ABFD gehört, genügt es, wenn der Punkt B in der unverrückbaren Geraden AZ bleiben muß, wenn also in B ein zu AZ normaler äußerer Widerstand N_2 vorhanden ist. Man wird daher den jetzigen Fall auf den vorhergehenden in der Art richtig zurückführen, daß man sich die feste Gerade AB Fig. 17 durch die Seite CE gelegt, und die Seite DC verlängert denkt; man wird daraus ersehen, daß an dem System noch dieselben äußern Widerstände N_1 und N_2 und die 8 innern Kräfte J thätig sind; man wird sich aber auch ohne die Gleichgewichtsbedingungen überzeugen, daß die Kräfte J_1' und J_2' in D und A, J_2'' und J_4'' in A und B, J_4' und J_3' in B und F gleich und entgegengesetzt sein müssen, weil zwischen diesen Punkten keine äußern Kräfte angreifen.

Nach diesen Erörterungen hat man für das äußere Gleichgewicht, und zwar für das der äußern fördernden Wirkungen wie oben die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\widehat{Px} + Q\cos\widehat{Qx} + N_1\cos\omega_1 + N_2 = 0 \\ P\sin\widehat{Px} + Q\sin\widehat{Qx} + N_1\sin\omega_1 = 0 \end{array}\right\},$$

und für das Gleichgewicht der äußern drehenden Wirkungen ergibt sich nun die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} Pl_1\dfrac{m}{m+n}\sin(\alpha-\widehat{Px}) + N_2 l_2 \\ -Q\left(\dfrac{n}{m+n}l_1\sin(\alpha-\widehat{Qx}) - c\cos\widehat{Qx} - a\sin Qx\right) = 0 \end{array}\right\}, \text{ (h.}$$

indem man nun die Coordinaten des Angriffspunktes H von Q in Bezug auf den Punkt D und die Gerade DF mit c und a ohne Index bezeichnet. Das Gleichgewicht der an der Geraden DF wirkenden Momente in Bezug auf D als Drehungspunkt genommen wird durch die Gleichung:

$$Q\,(c\cos\widehat{Qx}+a\sin\widehat{Qx})-J_4'\,l_2\cos\alpha=0$$

bedingt; man hat aber auch für das Gleichgewicht der Geraden BF die Gleichung:

$$N_2+J_4'\cos\alpha=0\,,$$

welche zu der vorhergehenden und der Gleichung (h) addirt, wieder die Bedingung (g) zwischen P und Q gibt. Die übrigen Gleichungen, welche sich noch für das Gleichgewicht der einzelnen Seiten ergeben, dienen nur zur Bestimmung der innern Kräfte J und der äußern Widerstände N und können deßhalb für unsern jetzigen Zweck übergangen werden.

§. 53.

Beispiele für die innere Bewegung veränderlicher Systeme, welche aus mehreren unveränderlichen Theilen zusammengesetzt sind, liefern uns alle Maschinen; ich werde jedoch auf diese hier nicht näher eingehen, da diese eine sehr beschränkte Bewegung besitzen und ihnen in der Maschinenlehre eine besondere und ausführliche Untersuchung zu Theil werden soll. Für jetzt verweise ich daher in dieser Beziehung auf die im ersten Abschnitt §§. 23 bis 25 erörterten Bewegungen, welche dort als äußere Zustände behandelt wurden, welche aber auch als innere Bewegungen bei äußerm Gleichgewichtszustande betrachtet werden können, und wende mich zu der Untersuchung eines veränderlichen Systems, welches eine unmittelbare und vollständige Anwendung der für nicht stetige Systeme abgeleiteten Gleichungen gestattet, nämlich zu der Untersuchung der innern Bewegung eines Planetensystems, d. h. eines Systems von festen Körpern, welche ihrer gegenseitigen Massen-Anziehung unterworfen sind, aber durch ihre aus beliebig gerichteten anfänglichen Geschwindigkeiten hervorgegangene Bewegungen verhindert werden, dieser gegenseitigen Anziehung unmittelbar folgend sich zu einer einzigen Masse zu vereinigen *).

*) Es kann natürlich hier nicht von einer vollständig durchgeführten Theorie der Bewegungen unseres Planetensystems die Rede sein, da hiezu der Raum viel zu

Ich gehe bei dieser Untersuchung von folgenden Voraussetzungen aus, welche sich aus den bei unserm Planetensystem gemachten Erfahrungen ergeben,

1) daß das Gesetz der gegenseitigen Anziehung irgend zweier materieller Punkte des Systems durch

$$R = Gmm' \frac{1}{w^2}$$

ausgedrückt werde, worin die einzelnen Größen die in §. 94 des zweiten Buches angegebene Bedeutung haben;

2) daß alle Körper des Systems der Form nach unveränderlich und im Verhältniß zu ihrer Größe sehr weit von einander entfernt sind;

3) daß einer dieser Körper eine weit größere Masse besitzt, als alle übrigen, so daß das Verhältniß $\frac{M_i}{M}$, worin M die Masse des genannten, M_i die Masse eines der übrigen Körper des Systems vorstellt, für alle diese Körper ein sehr kleines ist; endlich

4) daß die auf das System wirkenden äußern Kräfte von hinreichend weit entfernten Punkten ausgehen, um die auf die einzelnen Massen des Systems ausgeübten Wirkungen diesen Massen proportional und als Functionen des Mittelpunktes der Masse des ganzen Systems annehmen zu dürfen, was wieder auf die Annahme hinaus kommt, daß die größte Ausdehnung des Systems eine sehr kleine Größe ist gegen die Entfernung des Mittelpunktes seiner Masse von allen jenen Ausgangspunkten der äußern Kräfte, daß also dieser Mittelpunkt als Angriffspunkt jeder äußern Kraft genommen werden darf, und sich demnach alle äußern Kräfte in diesem Punkte zu einer einzigen Resultirenden vereinigen lassen.

Betrachten wir nach diesen Voraussetzungen zuerst die äußere Bewegung des Systems, so leuchtet sogleich ein, daß sich gemäß der letztern zufolge der Erörterungen des §. 18 der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems genau so bewegt, als wenn die ganze Masse desselben in ihm vereinigt, das ganze System also nur ein einfacher materieller

---

beschränkt wäre und über diesen Gegenstand in der Mécanique céleste von Laplace, in der Theoria motus corporum coelestium von Gauß und in der Théorie analytique du système du monde von Pontécoulant vorzügliche Werke vorhanden sind.

Punkt wäre *). Die Gesetze der drehenden Bewegung unsers Systems um seinen Mittelpunkt werden durch jene Voraussetzung indessen nicht wesentlich vereinfacht; denn wenn nun auch die Componenten $\Sigma . M_{\Xi}$, $\Sigma . M_H$, $\Sigma . M_Z$ des resultirenden Momentes in den Gleichungen (15) und (18) in §. 14 Null werden, so bleibt immer noch die Veränderlichkeit der Massemomente und der Einfluß der innern Bewegungen zu berücksichtigen. Man wird aber aus diesen Voraussetzungen zufolge der Erörterungen in §§. 15, 16 und 17 den Schluß ziehen, daß für unser System das Princip der Einhaltung der Sectorflächen in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse stattfindet, und es daher in demselben eine unveränderliche oder parallel bleibende Ebene der größten Flächensumme gibt, oder daß das resultirende Moment aller Bewegungsgrößen in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse ist, einen constanten Werth und seine Achse eine constante Richtung behält.

Nehmen wir also an, die Lage dieser Achse sei aus den dem Anfang der Zeit entsprechenden und für jeden einzelnen Körper des Systems gegebenen Größen berechnet, nämlich aus den anfänglichen Coordinaten $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, $z_i^{(0)}$ des Mittelpunktes seiner Masse in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der

*) Auf den ersten Anblick könnte es scheinen, als ob dieses auch ohne die genannte Voraussetzung stattfände und als ob die Erörterungen des §. 18 im Widerspruch ständen mit dem in §. 12 ausgesprochenen und durch die Gleichungen (12ᵃ) daselbst dargestellten allgemeinen Gesetze der fortschreitenden Bewegung eines veränderlichen Systems. Beachtet man aber, daß um dieses letztere Gesetz, welches unter allen Voraussetzungen gültig bleibt, in Anwendung zu bringen, alle an dem System thätigen Kräfte in den Mittelpunkt der Masse versetzt und dort zu einer fördernden Resultirenden vereinigt werden müssen, so wird man einsehen, daß die Verhältnisse im Allgemeinen doch andere sind, als in dem Falle, wo dieser Mittelpunkt selbst der Angriffspunkt der allgemeinen Resultirenden des Systems ist. Wenn z. B. alle auf das System ausgeübten äußern Wirkungen von einem festen Punkte ausgehen, welchen man als Anfangspunkt fester Coordinaten nimmt, und die Richtung der resultirenden Wirkung durch den Mittelpunkt der Masse des bewegten Systems selbst geht, so wird dieser eine rein elliptische Bewegung annehmen; wenn aber jene Richtung durch einen andern Punkt geht, und man die Resultirende erst parallel mit sich in den Masse-Mittelpunkt versetzen muß, so geht die Richtung dieser fördernden Resultirenden nicht in allen Lagen durch den Anfangspunkt, die Bewegung kann also nicht mehr in einer Ebene stattfinden und keine rein elliptische mehr sein.

Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems sei, aus den Componenten $v_i^{(0)} \cos \alpha_i^{(0)}$, $v_i^{(0)} \cos \beta_i^{(0)}$, $v_i^{(0)} \cos \gamma_i^{(0)}$ seiner anfänglichen Geschwindigkeit $v_i^{(0)}$, aus den Winkeln $\vartheta_i^{(0)}$, $\omega_i^{(0)}$, $\psi_i^{(0)}$ seiner Hauptachsen mit jenen Coordinatenachsen und aus seinen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_i^{(0)}$, $\mathfrak{q}^{(0)}$, $\mathfrak{r}_i^{(0)}$ um diese Hauptachsen, denken wir uns dann jenes Coordinatensystem so gedreht, daß seine z=Achse mit der so berechneten Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen zusammenfällt, die Ebene der xy also mit der Ebene der größten Flächensumme, wobei die Achse der x noch eine beliebige Lage behalten kann, und beziehen wir nun die innere Bewegung des Systems auf dieses neue Coordinatensystem, indem wir für dieses die anfänglichen Gegebenen auf dieselbe Weise wie vorher bezeichnet sein lassen.

In Bezug auf dieses Coordinatensystem wird die Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i durch die Gleichungen (57) ausgedrückt; diese werden aber unserer vierten Voraussetzung gemäß auf die Form der Gleichungen (49) zurückkommen, weil nach dieser die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Bedingungen:

$$X_i = M_i f_x(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}), \quad Y_i = M_i f_y(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}), \quad Z_i = M_i f_z(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$$

und

$$\Sigma.X = f_x(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})\,\Sigma.M, \quad \Sigma.Y = f_y(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})\,\Sigma.M,$$
$$\Sigma.Z = f_z(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})\,\Sigma.M$$

erfüllt sind. Wir haben also für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \\ M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} \\ M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} \end{aligned}\right\}, \qquad (a.$$

worin nun die Componenten der innern Kräfte J der ersten und zweiten unserer Voraussetzungen gemäß näher zu bestimmen sind.

Allgemein und streng betrachtet werden die fördernden Componenten der gegenseitigen Anziehung zwischen den Massen M_i und M_k durch

die in §. 121 des zweiten Buches abgeleiteten Werthe (88) oder (89) dargestellt; mit Rücksicht auf unsere zweite Voraussetzung aber und der darauf sich stützenden Erörterung in §. 108 desselben Buches, wonach die zwischen einem Punkte und einem stetigen System von sehr kleiner Ausdehnung im Vergleich zu seiner Entfernung von jenem Punkte statthabende gegenseitige Anziehung als eine Kraft betrachtet werden kann, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Masse des stetigen Systems geht, kann man der Kraft $J_{i,k}$ unserer ersten Voraussetzung gemäß mit hinreichender Annäherung die einfache Form geben:

$$J_{i,k} = G M_i M_k \frac{1}{w_{i,k}^2}$$
$$= G M_i M_k \frac{1}{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2},$$

und ihre Componenten werden dann gemäß der Werthe (62) in §. 96 des II. Buches folgende:

b.)
$$\begin{cases} J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} = G M_i \dfrac{M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}, \\ J_{i,k} \cos \beta_{i,k} = G M_i \dfrac{M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}, \\ J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = G M_i \dfrac{M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}. \end{cases}$$

Ebenso hat man für die zwischen den Massen M_h und M_i thätige anziehende Wirkung die Componenten:

b')
$$\begin{cases} J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} = G M_i \dfrac{M_h (x_i - x_h)}{\sqrt{[(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2 + (z_i - z_h)^2]^3}} \\ \qquad = - G M_i \dfrac{M_h (x_h - x_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z^i)^2]^3}} \\ J_{h,i} \cos \beta_{h,i} = - G M_i \dfrac{M_h (y_h - y_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^3}} \\ J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} = - G M_i \dfrac{M_h (z_h - z_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^3}} \end{cases}$$

man kann daher nun die beiden Summenglieder auf der rechten Seite unserer Gleichungen (a) zu einem einzigen vereinigen, wodurch diese Gleichungen folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}
\end{aligned}\right\} , \quad (c.$$

bei welchen jedoch zu beachten ist, daß darin für k nicht auch i selbst gesetzt werden kann, sondern nur die Werthe von 1 bis $i - 1$ und von $i + 1$ bis n.

Macht man dann

$$V_i = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} ,$$

so hat man auch

$$\frac{dV_i}{dx_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} ,$$

$$\frac{dV_i}{dy_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} ,$$

$$\frac{dV_i}{dz_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^2}} ,$$

und die vorhergehenden Gleichungen kommen nun auf die, der Form nach sehr einfachen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dx_i} , \quad M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dy_i} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dz_i}
\end{aligned}\right\} , \quad (d.$$

zurück, in welchen aber nicht zu übersehen ist, daß die rechten Seiten nur theilweise Aenderungsgesetze der Function V sind, und daß sie deßhalb weder einzeln noch auch alle drei für sich allein integrirt werden können.

Beachtet man aber, daß für jeden Körper des Systems drei ähnliche Gleichungen bestehen, so kann man durch die Verbindung dieser 3 Gleichungen eine neue darstellen, welche sich in Bezug auf t einmal integriren läßt, wie wir sogleich sehen werden.

§. 54.

Da der Mittelpunkt der Masse eines veränderlichen Systems von der Natur des in Betrachtung gezogenen seine Lage gegen alle Körper des Systems fortwährend ändert, derselbe auch durch die Beobachtung nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, sondern jedesmal erst berechnet werden muß, so ist es für die Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung, also insbesondere für die Zwecke der Astronomie, viel zweckmäßiger, den Anfang der Coordinaten in den Mittelpunkt einer der Massen des Systems — wozu man natürlich die nach unserer dritten Voraussetzung im System vorhandene größte Masse $\mathfrak{M}$ wählen wird — zu verlegen und die Gleichungen der Bewegung einer jeden der übrigen Massen in Bezug auf diese neuen Achsen, welche übrigens vorerst den frühern parallel bleiben sollen, auszudrücken. Diese neuen Gleichungen werden die Form der Gleichungen (50) in §. 30 annehmen; wenn wir daher die Masse $\mathfrak{M}$ von den übrigen absondern, und diese letztern wie bisher mit M_1, M_2, u. s. f. bis M_n bezeichnen, so daß das jetzige n dem frühern n — 1 gleichkommt, ferner die Componenten der zwischen der Masse $\mathfrak{M}$ und der Masse M_i thätigen anziehenden Wirkung mit

$$J_i \cos\alpha_i \quad , \qquad J_i \cos\beta_i \quad , \qquad J_i \cos\gamma_i \quad ,$$

also auch die Componenten der gegenseitigen Anziehung der Massen $\mathfrak{M}$ und M_k mit

$$J_k \cos\alpha_k \quad , \qquad J_k \cos\beta_k \quad , \qquad J_k \cos\gamma_k \quad ,$$

so haben wir zuerst die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} - J_i \cos\alpha_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{k=n} J_k \cos\alpha_k\,, \\
M_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos\beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} J_{h,i} \cos\beta_{h,i} - J_i \cos\beta_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{k=n} J_k \cos\beta_k\,, \\
M_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} J_{i,k} \cos\gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} - J_i \cos\gamma_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}} \sum_{k=1}^{k=n} J_k \cos\gamma_k\,.
\end{aligned}\right\}$$

Die hier für die innern Componenten $J_{i,k} \cos\alpha_{i,k}$, u. s. f. einzuführenden Werthe unterscheiden sich von den Werthen (b) nur durch die Accente an den Coordinaten x, y und z, und für die Componenten $J_i \cos\alpha_i$, $J_i \cos\beta_i$, $J_i \cos\gamma_i$ findet man mit Weglassung dieser Accente nach dem Vorhergehenden leicht die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
J_i \cos\alpha_i &= G\mathfrak{M} M_i \frac{x_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M} M_i \frac{x_i}{r_i^3} \\
J_i \cos\beta_i &= G\mathfrak{M} M_i \frac{y_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M} M_i \frac{y_i}{r_i^3} \\
J_i \cos\gamma_i &= G\mathfrak{M} M_i \frac{z_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M} M_i \frac{z_i}{r_i^3}
\end{aligned}\right\};$$

ebenso für die Componenten $J_k \cos\alpha_k$, $J_k \cos\beta_k$, $J_k \cos\gamma_k$ die Ausdrücke:

$$J_k \cos\alpha_k = G\mathfrak{M} M_k \frac{x_k}{\sqrt{(x_k^2+y_k^2+z_k^2)^3}} = G\mathfrak{M} M_i \frac{x_k}{r_k^3}\,,$$

$$J_k \cos\beta_k = G\mathfrak{M} M_k \frac{y_k}{r_k^3}\,, \qquad J_k \cos\gamma_k = G\mathfrak{M} M_k \frac{z_k}{r_k^3}\,,$$

worin die r_i und r_k offenbar die Länge der zu den Mittelpunkten der Massen M_i und M_k gezogenen Fahrstrahlen vorstellen.

Mit diesen und den frühern Werthen und mit Weglassung der Accente auf der linken Seite der obigen Gleichungen für die innere Bewegung der Masse M_i in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse $\mathfrak{M}$ und wenn noch zur Abkürzung die Größe $\sqrt{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2+(z_k-z_i)^2}$

durch $w_{i,k}$ ersetzt wird, so nehmen die genannten Gleichungen die unsern besondern Voraussetzungen entsprechende Form an, und werden

$$\text{e.)}\quad\begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = G\left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} . \dfrac{M_k\,(x_k - x_i)}{w_{i,k}^3} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} . \dfrac{M_k\, x_k}{r_k^3} - \dfrac{\mathfrak{M}\, x_i}{r_i^3}\right], \\[2ex] \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = G\left[\sum\limits_{k=1}^{k=n} . \dfrac{M_k\,(y_k - y_i)}{w_{i,k}^3} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} . \dfrac{M_k\, y_k}{r_k^3} - \dfrac{\mathfrak{M}\, y_i}{r_i^3}\right], \\[2ex] \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = G\left[\sum\limits_{k=n}^{k=n} . \dfrac{M_k\,(z_k - z_i)}{w_{i,k}^3} - \sum\limits_{k=1}^{k=n} . \dfrac{M_k\, z_k}{r_k^3} - \dfrac{\mathfrak{M}\, z_i}{r_i^3}\right]. \end{cases}$$

In der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichungen erhält k alle Werthe von 1 bis n, während in der ersten, wie schon bemerkt, der Werth $k = i$ nicht vorkommt; wir wollen daher, um die beiden Summen in eine einzige zusammenfassen zu können, und die ebengenannte Beschränkung augenfällig zu machen, in der letztern Summe das Glied, für welches $k = i$ sein soll, ausscheiden und die übrigen Glieder dieser Summe mit denen der ersten Summe unter dem Zeichen $\sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} .$ zusammenfassen, jenen Gleichungen also die neue Form geben:

$$\text{f.)}\quad\begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = G\sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} . M_k\left(\dfrac{x_k - x_i}{w_{i,k}^3} - \dfrac{x_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\dfrac{x_i}{r_i^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = G\sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} . M_k\left(\dfrac{y_k - y_i}{w_{i,k}^3} - \dfrac{y_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\dfrac{y_i}{r_i^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = G\sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} . M_k\left(\dfrac{z_k - z_i}{w_{i,k}^3} - \dfrac{z_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\dfrac{z_i}{r_i^3}. \end{cases}$$

Beachtet man endlich, daß die Summen dieser Gleichungen sich als theilweise Aenderungsgesetze der Function:

$$V_i = G M_i \sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} . M_k\left(\frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} - \frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{\sqrt{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^3}}\right)$$

in Bezug auf je eine der Veränderlichen x_i, y_i und z_i ergeben, so kann man die Gesetze der innern fortschreitenden Bewegung der Masse M_i

in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse $\mathfrak{M}$ durch folgende einfache Gleichungen darstellen:

$$\left.\begin{aligned} M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i x_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d x_i} \\ M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i y_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d y_i} \\ M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i z_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d z_i} \end{aligned}\right\} , \qquad (g.$$

in welchen noch zur Abkürzung die Summe der Massen $\mathfrak{M}$ und M_i durch $\widehat{\mathfrak{M}}_i$ ersetzt ist, und von denen dasselbe gilt, was am Ende des vorigen Paragraphen über die Gleichungen (d) bemerkt wurde.

Aus diesen Gleichungen (d), auf das ganze System ausgedehnt, läßt sich nun eine einzige integrirbare Gleichung herstellen, wenn man sie zuerst je drei der Reihe nach mit $2 \frac{dx_i}{dt}$, $2 \frac{dy_i}{dt}$, $2 \frac{dz_i}{dt}$ multiplizirt, diese drei Producte summirt und die in dieser Weise für das ganze System sich ergebenden n Summen zu einer Summe vereinigt. Denn beachtet man, daß, wenn v_i die innere Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Masse M_i ist, man hat

$$2 \frac{dx_i}{dt} \frac{d.\frac{dx_i}{dt}}{dt} + 2 \frac{dy_i}{dt} \frac{d.\frac{dy_i}{dt}}{dt} + 2 \frac{dz_i}{dt} \frac{d.\frac{dz_i}{dt}}{dt} = \frac{d.v_i^2}{dt},$$

ferner, daß man nach der Bedeutung der Function V_i für $i = 1$ den Ausdruck erhält;

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dV_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{dV_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dt} = \\ &= G M_1 M_2 \frac{(x_2 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_1}{dt}}{\sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2]^3}} \\ &+ G M_1 M_3 \frac{(x_3 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_3 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_3 - z_1)\frac{dz_1}{dt}}{\sqrt{[(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2]^3}} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\} ;$$

für i = 2 ebenso den Werth:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dV_2}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{dV_2}{dy_2}\frac{dy_2}{dt}+\frac{dV_2}{dz_2}\frac{dz_2}{dt}=\\
&=GM_2M_1\frac{(x_1-x_2)\frac{dx_2}{dt}+(y_1-y_2)\frac{dy_2}{dt}+(z_1-z_2)\frac{dz_2}{dt}}{\sqrt{[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^3}},\\
&+GM_2M_3\frac{(x_3-x_2)\frac{dx_2}{dt}+(y_3-y_2)\frac{dy_2}{dt}+(z_3-z_2)\frac{dz_2}{dt}}{\sqrt{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^3}},\\
&+\text{etc.},
\end{aligned}\right.$$

und so fort, so wird man sich leicht überzeugen, daß die Summe:

$$\sum_{i=1}^{i=n}.\left(\frac{dV_i}{dx_i}\frac{dx_i}{dt}+\frac{dV_i}{dy_i}\frac{dy_i}{dt}+\frac{dV_i}{dz_i}\frac{dz_i}{dt}\right)=$$

$$=-GM_1M_2\frac{(x_2-x_1)\left(\frac{dx_2}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+(y_2-y_1)\left(\frac{dy_2}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+(z_2-z_1)\left(\frac{dz_2}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)}{\sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^3}}$$

$$-GM_1M_3\frac{(x_3-x_1)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+(y_3-y_1)\left(\frac{dy_3}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+(z_3-z_1)\left(\frac{dz_3}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)}{\sqrt{[(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2]^3}}$$

$$-GM_2M_3\frac{(x_3-x_2)\left(\frac{dx_3}{dt}-\frac{dx_2}{dt}\right)+(y_3-y_2)\left(\frac{dy_3}{dt}-\frac{dy_2}{dt}\right)+(z_3-z_2)\left(\frac{dz_3}{dt}-\frac{dz_2}{dt}\right)}{\sqrt{[(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2]^3}}$$

$$-\text{etc.}$$

das vollständige Aenderungsgesetz in Bezug auf t der Function:

$$U=\frac{1}{2}G\sum_{i=1}^{i=n}.\sum_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n}.\frac{M_iM_k}{\sqrt{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2+(z_k-z_i)^2}}$$

ausdrückt, und daß man als Summe der Produkte aller 3n Gleichungen den einfachen Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{d . v_i^2}{dt} = 2 \frac{d . U}{dt}$$

erhält, welcher sich unmittelbar integriren läßt. Man findet so die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . M_i (v_i^2 - v_i^{(0)2}) = 2 (U - U_0) \;, \qquad \text{(h.}$$

worin $v_i^{(0)}$ den anfänglichen Werth von v_i und U_0 den anfänglichen Werth der Function U oder den Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . \sum_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n} . \frac{M_i M_k}{\sqrt{\left(x_k^{(0)} - x_i^{(0)}\right)^2 + \left(y_k^{(0)} - y_i^{(0)}\right)^2 + \left(z_k^{(0)} - z_i^{(0)}\right)^2}}$$

vorstellt, und in welchem man leicht den Ausdruck für die Aenderung der innern lebendigen Kraft des ganzen Systems durch die Arbeit der innern Kräfte erkennen wird.

Auf ähnliche, aber weniger einfache Weise leitet man aus den Gleichungen (g) oder (f) den Ausdruck für die Aenderung der innern lebendigen Kraft des Systems in Bezug auf das durch den Mittelpunkt der Masse $\mathbf{M}$ gelegte Coordinatensystem ab. Bringt man nämlich diese Gleichungen unter die Form:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + G M_i \mathbf{M} \frac{x_i}{r_i^3} + G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . M_k \frac{x_k}{r_k^3} &= \frac{d V_i}{d x_i} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + G M_i \mathbf{M} \frac{y_i}{r_i^3} + G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . M_k \frac{y_k}{r_k^3} &= \frac{d V_i}{d y_i} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + G M_i \mathbf{M} \frac{z_i}{r_i^3} + G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . M_k \frac{z_k}{r_k^3} &= \frac{d V_i}{d z_i}
\end{aligned}\right\} \;,$$

und behandelt sie, wie es im Vorhergehenden für die Gleichungen (d) angegeben wurde, so findet man mit der Beachtung, daß

$$\frac{x_i \frac{dx_i}{dt} + y_i \frac{dy_i}{dt} + z_i \frac{dz_i}{dt}}{\sqrt{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)^3}} = - \frac{d.\frac{1}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}}{dt} = - \frac{d.\frac{1}{r_i}}{dt},$$

den Ausdruck:

$$1.) \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{d.v_i^2}{dt} + 2G \sum_{i=1}^{i=n} . \sum_{k=1}^{k=n} . M_i M_k \frac{x_k \frac{dx_i}{dt} + y_k \frac{dy_i}{dt} + z_k \frac{dz_i}{dt}}{\sqrt{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^3}} \\ = 2 \frac{d.U}{dt} + 2GM \sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{d.\frac{1}{r_i}}{dt}, \end{cases}$$

worin aber das zweite Glied der linken Seite noch nicht unter integrirbarer Form erscheint. Beachtet man dann ferner, daß dieses Glied wegen der Gleichheit der Grenzen von i und k an den Summenzeichen desselben auch die Form

$$2G\left[\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dx_i}{dt}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{x_i}{r_i^3}\right) + \left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dy_i}{dt}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{y_i}{r_i^3}\right) + \left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dz_i}{dt}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{z_i}{r_i^3}\right)\right]$$

erhalten kann, so wird man darauf geführt, aus dem System der Gleichungen (k) eine zweite Gleichung dadurch abzuleiten, daß man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$2\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dx_i}{dt}, \quad 2\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dy_i}{dt}, \quad 2\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dz_i}{dt}$$

multiplizirt und ihre Summe nimmt. Diese nimmt mit Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . \frac{dV_i}{dx_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} . \frac{dV_i}{dy_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^{i=n} . \frac{dV_i}{dz_i} = 0$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \frac{dx^i}{dt}\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i \sum_{k=1}^{k=n} . M_k \frac{x_k}{r_k^3}\right) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} . M_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} . \sum_{k=1}^{k=n} . M_i M_k \frac{x_k}{r_k^3} \frac{dx_i}{dt}\right),$$

u. s. f.

zuerst die Form an:

$$0=2\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dx_i}{dt}\right)\left(\frac{d.\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dx_i}{dt}}{dt}\right)+2\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dy_i}{dt}\right)\left(\frac{d.\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dy_i}{dt}}{dt}\right)$$

$$+2\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dz_i}{dt}\right)\left(\frac{d.\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dz_i}{dt}}{dt}\right) \quad \text{(m.}$$

$$+2G(M+\sum.M_i)\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}M_iM_k\frac{x_k\frac{dx_i}{dt}+y_k\frac{dy_i}{dt}+z_k\frac{dz_i}{dt}}{\sqrt{(x_k^2+y_k^2+z_k^2)^3}}$$

und kann nun dazu dienen das obengenannte Glied der Gleichung (l) zu eliminiren. Dazu multiplizirt man diese letztere Gleichung mit $M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i$ und addirt sie zu der Gleichung (m); dadurch wird man die neue Gleichung:

$$(M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i)\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{d.v_i^2}{dt}-2GM(M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i)\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{d.\frac{1}{r_i}}{dt}$$

$$-\frac{d.\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dx_i}{dt}\right)^2}{dt}-\frac{d.\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dy_i}{dt}\right)^2}{dt}-\frac{d.\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dz_i}{dt}\right)^2}{dt} \quad \text{(n.}$$

$$-2(M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i)\frac{d.U}{dt}=0$$

erhalten, deren Glieder alle vollständige Aenderungsgesetze in Bezug auf t sind, und welche demnach in Bezug auf diese Veränderliche einmal integrirt werden kann. Für das entsprechende Integral derselben erhält man den Ausdruck:

$$(M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i)\sum_{i=1}^{i=n}M_iv_i^2-\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dx_i}{dt}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dy_i}{dt}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{i=n}M_i\frac{dz_i}{dt}\right)^2$$

$$-2(M+\sum_{i=1}^{i=n}M_i)\left(U+GM\sum_{i=1}^{i=n}\frac{M_i}{r_i}\right)=K,$$

worin K den anfänglichen Werth der linken Seite vorstellt, welcher aber auch unter die Form:

o.)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{M}\sum\limits_{i=1}^{i=n} M_i v_i^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{k=1}^{k=n} M_i M_k\left[\left(\frac{dx_k}{dt}-\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_k}{dt}-\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_k}{dt}-\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] \\ -2\left(\mathfrak{M}+\sum\limits_{i=1}^{i=n} M_i\right)\left(U+G\mathfrak{M}\sum\limits_{i=1}^{i=n}\frac{M_i}{r_i}\right) = K \end{array}\right.$$

gebracht werden kann, wenn man das erste Glied zerlegt und in ähnlicher Weise wie oben die Summenproducte in doppelte Summen verwandelt.

§. 58.

Die vorstehende Gleichung, welche wieder die Aenderung der lebendigen Kraft des ganzen Systems durch die Arbeit aller innern Kräfte, sowohl der zwischen den einzelnen Massen M_i thätigen, als zwischen diesen und der Masse $\mathfrak{M}$ stattfindenden Anziehungen ausdrückt, welche aber noch ein Glied enthält, das die Aenderung der aus den Unterschieden der Geschwindigkeitscomponenten der einzelnen Massen M_i entspringenden lebendigen Kräfte ausdrückt, ist das einzige vollständige Integral, welches man bis jetzt aus den Gleichungen (k) hat ableiten können; es wird durch dieselbe zwar eine allgemeine Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten dieser einzelnen Massen und ihren gegenseitigen Wirkungen aufgestellt, allein sie ist, wie der Lehrsatz von der Aenderung der lebendigen Kraft überhaupt nur anwendbar, wenn die Bahnen der einzelnen Masse-Mittelpunkte bestimmt sind; sie ist deßhalb weit davon entfernt, den mit unserer gegenwärtigen Untersuchung verbundenen Absichten, insbesondere also den Zwecken der Astronomie zu genügen. Man ist daher hier, wie so oft genöthigt, diese Untersuchung auf dem Wege der Annäherung durchzuführen, und diese wird durch unsere beiden Voraussetzungen 2) und 3) wesentlich erleichtert.

Nach der dritten Voraussetzung ist nämlich die Masse $\mathfrak{M}$ viel größer als jede der Massen M_i, und das Verhältniß $\frac{M_i}{\mathfrak{M}}$ eine sehr kleine Zahl, übereinstimmend mit den bei unserm Planetensystem stattfindenden Verhältnissen, wo für den größten Planeten Jupiter $\frac{M_i}{\mathfrak{M}} < \frac{1}{1000}$ wenn $\mathfrak{M}$ die Masse der Sonne bedeutet, und wo selbst $\frac{\Sigma . M_i}{\mathfrak{M}} < \frac{1}{300}$ ist; es wird daher nach dieser Annahme die Function V_i in den

Gleichungen (g) eine sehr kleine Größe gegen die Function $G M_i \mathfrak{M}_i \frac{1}{r_i}$, weil die Entfernung $w_{i,k}$ immer von derselben Ordnung ist, wie r_i, und die einzelnen Summenglieder nicht alle gleiche Zeichen haben, und kann für eine erste Annäherung neben dieser vernachlässigt werden. Bezeichnet man demnach die Coordinaten, welche der Mittelpunkt der Masse M_i, deren Bewegung bestimmt werden soll, am Ende der Zeit t haben würde, wenn die Masse $\mathfrak{M}$ allein vorhanden wäre oder wenn nur zwischen $\mathfrak{M}$ und M_i eine gegenseitige Anziehung stattfände, mit $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, und setzt

$$x_i = \mathbf{x} + \mathfrak{x} \quad , \quad y_i = \mathbf{y} + \mathfrak{y} \quad , \quad z_i = \mathbf{z} + \mathfrak{z} \; ,$$

indem man die durch die Anziehung der übrigen Massen oder durch die Function V_i erzeugten sehr kleinen Aenderungen jener Coordinaten mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet, so hat man einerseits die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}^3} = 0 \quad , \quad \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{r}^3} = 0 \; , \\ \frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{r}^3} = 0 \; , \end{array}\right\} \quad (p.$$

worin $\mathbf{r}$ den der bedingten Lage entsprechenden Fahrstrahl $\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2}$ vorstellt, und die Gleichungen (g) kommen auf folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\left(\frac{x_i}{r_i^3} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{r}^3}\right) = \frac{dV_i}{d\mathfrak{x}} \\ \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\left(\frac{y_i}{r_i^3} - \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{r}^3}\right) = \frac{dV_i}{d\mathfrak{y}} \\ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} + G\widehat{\mathfrak{M}}\left(\frac{z_i}{r_i^3} - \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{r}^3}\right) = \frac{dV_i}{d\mathfrak{z}} \end{array}\right\} \; , \quad (q.$$

zurück; wenn man für x_i, y_i, z_i ihre vorhergehenden Werthe setzt und beachtet, daß

$$\frac{dV_i}{dx_i} = \frac{dV_i}{d\mathfrak{x}} \quad , \quad \frac{dV_i}{dy_i} = \frac{dV_i}{d\mathfrak{y}} \quad , \quad \frac{dV_i}{dz_i} = \frac{dV_i}{d\mathfrak{z}}$$

werden muß.

Die Gleichungen (p) enthalten die Gesetze der in den §§. 85 bis 87 des ersten Buches untersuchten Bewegung eines materiellen Punktes, auf welchen eine von einem festen Punkte ausgehende und dem Quadrate der Entfernung des bewegten von dem festen Punkte verkehrt proportionale Kraft wirkt, nur insofern allgemeiner aufgefaßt, als dort die Bewegung unmittelbar in der Ebene der Bahn untersucht wurde, während wir jetzt die Lage dieser Ebene in Bezug auf bereits gewählte Coordinaten-Ebenen zu bestimmen haben.

Die Gleichung dieser Ebene ist bereits in §. 71 des ersten Buches unter der Form:

$$\text{r.)} \qquad c_1 z + c_2 y + c_3 x = 0$$

abgeleitet worden, worin die Coeffizienten c_1, c_2 und c_3 die anfänglichen Werthe der Ausdrücke:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}, \quad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}, \quad y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$$

vorstellen, welche mit den anfänglichen Werthen

$$x_i^{(0)}\frac{dy_i^{(0)}}{dt} - y_i^{(0)}\frac{dx_i^{(0)}}{dt}, \quad z_i^{(0)}\frac{dx_i^{(0)}}{dt} - x_i^{(0)}\frac{dz_i^{(0)}}{dt}, \quad y_i^{(0)}\frac{dz_i^{(0)}}{dt} - z_i^{(0)}\frac{dy_i^{(0)}}{dt}$$

gleichbedeutend sind. Bezeichnen wir dann den Winkel, welchen die Normale zu dieser Ebene mit unserer z-Achse einschließt, mit γ, den zwischen ihrer Projection in der xy-Ebene und der x-Achse mit $\varepsilon_{,}$, und setzen

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = C^2$$

so haben wir die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = C \cos\gamma, \quad c_2 = C \sin\gamma \sin\varepsilon_{,}, \quad c_3 = C \sin\gamma \cos\varepsilon_{,}, \\ \tan\varepsilon_{,} = \dfrac{c_2}{c_3}, \quad \tan\gamma = \dfrac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}}{c_1}, \end{array} \right.$$

durch welche die Winkel γ und $\varepsilon_{,}$ berechnet werden können, wenn die Constanten c_1, c_2, c_3 unmittelbar aus der Beobachtung abgeleitet worden sind, oder umgekehrt diese letztern Größen aus jenen Winkeln und der Constanten C, wenn diese sich leichter aus der Beobachtung ergeben. Für die Zwecke der Astronomie ist es einfacher, statt des

Winkels $\varepsilon_{,}$, welchen die Projection der Normalen zu der Ebene (r) in der Ebene der xy mit der x=Achse einschließt, den Winkel $\varepsilon = \varepsilon_{,} - \frac{1}{2}\pi$ zu nehmen, welcher von dem Durchschnitt jener Ebenen mit der x=Achse gebildet wird. Man hat dann

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{c}_1 = \mathbf{C}\cos\gamma \;;\; \mathbf{c}_2 = -\mathbf{C}\sin\gamma\cos\varepsilon \;,\; \mathbf{c}_3 = \mathbf{C}\sin\gamma\sin\varepsilon \\ \text{und} \\ \tang\,\varepsilon = -\frac{\mathbf{c}_3}{\mathbf{c}_2}\;. \end{array}\right\} \quad (s.$$

Die Constante $\mathbf{C}$ ist, wie man einsehen wird, mit der Größe C in §. 72 des ersten Buches gleichbedeutend; wenn man daher den Fahrstrahl $\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2+\mathbf{z}^2}$ des Bewegten von dem Mittelpunkt der Masse $\mathbf{M}$ aus, mit $\mathbf{r}$ bezeichnet, und mit ω den Winkel, welchen dieser mit einer in der Ebene (r) der Bewegung gezogenen festen Geraden einschließt, ferner mit $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0 = v_i^{(0)}$, $\alpha_0 = \alpha_i^{(0)}$ den anfänglichen Werth von $\mathbf{r}$, die anfängliche Geschwindigkeit und ihren anfänglichen Richtungswinkel gegen dieselbe feste Gerade in der Ebene (r), so hat man wie dort

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}^2 \frac{d\omega}{dt} = \mathbf{r}_0 \mathbf{v}_0 \sin\alpha_0\;. \quad (t.$$

Aus den Gleichungen (p) ergeben sich damit zuerst die in §. 79 des ersten Buches abgeleiteten allgemeinen Bewegungsgesetze, und dann die für unsern besondern Fall in den §§. 85 bis 88 daselbst dargestellten, wenn statt der dortigen Bezeichnung: mkl^2 der bewegenden Kraft für die Einheit der Entfernung des Bewegten von dem festen Punkt unser jetziges Maaß: $GM_1\widehat{\mathbf{M}} = G\mathbf{M}_1(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M})$, eingeführt wird *). Die Bahn des Bewegten ist demnach einer der drei Kegelschnitte, und ihre Gleichung hat die allgemeine Form:

---

*) Die Intensität der zwischen Sonne und Erde stattfindenden anziehenden Wirkung ist $GM_1\mathbf{M}\frac{1}{r^2}$; diese wirkt aber auf jeden dieser Körper und strebt der Sonne eine Beschleunigung $GM_1\frac{1}{r^2}$ gegen die Erde, und dieser die Beschleunigung $G\mathbf{M}\frac{1}{r^2}$ gegen die Sonne zu ertheilen; die relative Beschleunigung der Erde gegen die als unbeweglich gedachte Sonne ist daher $G(\mathbf{M}+M_1)\frac{1}{r^2}$.

u.) $$r = \frac{p}{1+e\cos(\omega-\lambda)} = a\frac{1-e^2}{1+e\cos(\omega-\lambda)},$$

worin p den Parameter, a die halbe große Achse, e die relative Excentricität der Bahncurve, und λ den Winkel zwischen demjenigen Theil der großen Achse, welcher den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem zunächst gelegenen Scheitel der Curve verbindet, und der in der Ebene der Bahn gezogenen festen Geraden bezeichnet, und die drei ersten der genannten Größen können aus den anfänglichen Gegebenen der Bewegung durch die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned} & p = \frac{C^2}{G\widehat{M}} = \frac{r^2 v^2 \sin^2\alpha_0}{G\widehat{M}}, \quad a = r_0\frac{G\widehat{M}}{2G\widehat{M} - r_0 v_0^2}, \\ & e = \sqrt{1 - \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha_0}{a\,G\widehat{M}}} \end{aligned}\right.$$

abgeleitet werden. Die Bahn ist eine Ellipse, wenn man hat

$$2G\widehat{M} - r_0 v_0^2 > 0;$$

ihre Gleichung kann auch die Form erhalten:

v.) $$r = a(1 - e\cos u),$$

worin der Winkel u die in §. 87 erklärte Bedeutung hat, und mit den Winkeln ω und λ durch die Beziehung:

w.) $$\tan\frac{1}{2}(\omega-\lambda) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{1}{2}u$$

in Verbindung steht, und für die Geschwindigkeit des Bewegten in dieser Curve hat sich der Ausdruck:

x.) $$v^2 = G\widehat{M}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

ergeben, welcher von der Excentricität e unabhängig ist. Endlich hat man für die Dauer der Bewegung von dem Durchgang des Bewegten durch den dem Anfangspunkt der Coordinaten (dem Mittelpunkt der Masse $\widehat{M}$) zunächst liegenden Scheitel der großen Achse an bis zu einem Punkt, dessen Coordinaten r und u sind, die einfache Gleichung:

y.) $$n(t-\tau) = u - e\sin u,$$

worin t vom Anfang der Zeit oder vom Durchgang des Bewegten durch

die feste Gerade an gerechnet ist und n den Ausdruck $\sqrt{\frac{G\widehat{M}}{a^3}}$ ersetzt, und zieht daraus für die Zeit τ, welche der Bewegte von dem Durchgang durch die feste Gerade bis zum vorerwähnten Scheitel der großen Achse braucht, den Werth:

$$\tau = \frac{1}{n}(2\pi - u_0 + e \sin u_0) , \qquad (z.$$

worin u_0 den aus der Gleichung: $r_0 = a(1 - e \sin u_0)$ sich ergebenden Ausdruck:

$$u_0 = arc \cos \frac{a - r_0}{a e}$$

vorstellt, für welchen aber zu beachten ist, ob der Bewegte während dieser Zeit durch den entgegengesetzten Scheitel der großen Achse geht oder nicht, da im ersten Falle u_0 zwischen den Grenzen 0 und π, im letztern zwischen π und 2π genommen werden muß. Der Winkel u_0 steht auch durch die Gleichung (w) mit dem Winkel λ in Verbindung, und man hat darnach, wenn man $\omega = 0$ setzt:

$$tang \frac{1}{2}\lambda = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \, tang \frac{1}{2} u_0 , \qquad (\alpha.$$

wobei man indessen wieder auf die eben bemerkten Grenzen von u_0 zu achten hat.

Aus der Gleichung (y) haben wir ferner für die ganze Umlaufszeit T des Planeten den einfachen Werth:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G\widehat{M}}} , \qquad (\beta.$$

welcher von der besondern Gestalt der Bahn, namentlich von ihrer Excentricität unabhängig ist, und sich nur mit der großen Achse der Bahn ändert. Vergleicht man demnach die Umlaufszeiten zweier Planeten M_i und M_k, so ergibt sich die Proportion:

$$T_i^2 : T_k^2 = \frac{a_i^3}{M + M_i} : \frac{a_k^3}{M + M_k} , \qquad (\gamma.$$

welche zeigt, daß das dritte Keppler'sche Gesetz (Buch I., §. 81) nur annähernd richtig ist, nämlich nur insoweit, als man die Massen der Planeten gegen die der Sonne vernachlässigen kann.

Wenn die halben Bahnachsen a für die einzelnen Planeten durch die Beobachtung ebenso genau wie die Umlaufszeiten T bestimmt werden könnten, so wäre es leicht, mittels der Gleichung (β) die Massen der einzelnen Planeten mit der Masse der Erde zu vergleichen; von dieser Genauigkeit sind indessen die Beobachtungen wegen der geringen Größe der Erde weit entfernt, und es dient vielmehr die Proportion (γ) mit Vernachlässigung der Massen M_i und M_k, oder das dritte Keppler'sche Gesetz gerade dazu, die Achsen der einzelnen Planetenbahnen mittels der Umlaufszeiten zu berechnen, wobei die halbe Achse der Erdbahn als Einheit angenommen wird. Dagegen kann die Gleichung (β) für die Berechnung der Masse solcher Planeten dienen, welche von einem oder mehreren Nebenplaneten oder Monden umgeben sind, namentlich wenn auch die Massen dieser Nebenplaneten selbst wieder sehr klein sind gegen die des Hauptplaneten. Denn man hat dann für die Umlaufszeit T_μ eines solchen Nebenplaneten um seinen Hauptplaneten, dessen Masse M_k sei, den Ausdruck:

$$T_\mu = 2\pi \sqrt{\frac{a_\mu^3}{G(M_k + \mu)}},$$

worin μ die Masse des Nebenplaneten bezeichnet und a_μ seine mittlere Entfernung von dem Hauptplaneten, welche sehr genau durch die Beobachtung bestimmt werden kann, wenn die Entfernung des Hauptplaneten von der Erde bekannt ist. Vergleicht man dann diesen Ausdruck mit dem Werthe (β) für die Umlaufszeit des Hauptplaneten oder irgend eines andern Planeten um die Sonne, wozu man am einfachsten den für die Erde nehmen, und die entsprechenden Größen durch den Index e bezeichnen wird, so hat man:

$$\frac{M_k + \mu}{M + M_e} = \frac{a_\mu^3}{a_e^3} \cdot \frac{T_e^2}{T_\mu^2},$$

und zieht daraus, wenn man die Massen μ und M_e neben M_k und M vernachlässigt oder die bereits bekannten Verhältnisse $\frac{\mu}{M_k}$ und $\frac{M_e}{M}$ einführt, den Werth des Verhältnisses $\frac{M_k}{M}$, d. h. das Verhältniß der Masse jenes Hauptplaneten zu der Masse der Sonne.

Für die Erde selbst ist dieses Verfahren nicht mit hinreichender Genauigkeit anwendbar, weil die Bewegung des Mondes um die Erde wegen der Nähe der Sonne nicht mit hinreichender Annäherung als eine

rein elliptische betrachtet werden darf. Man muß daher, um das Verhältniß der Erdmasse zur Sonnen-Masse zu bestimmen, die anziehende Wirkung der Erde auf die Körper an ihrer Oberfläche mit der anziehenden Wirkung der Sonne auf die Erde vergleichen. Bezüglich der erstern haben wir in §. 115 des zweiten Buches gefunden, daß die Erde auf einen Punkt des Parallelkreises, für welchen das Quadrat des Breitesinus $= \frac{1}{3}$ ist, sehr nahe dieselbe anziehende Wirkung ausübt, als wenn ihre Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre. Ist also M_e wieder die Masse der Erde, μ die des angezogenen Körpers, μg sein Gewicht unter jener Breite, μg_1 sein Gewicht daselbst, wenn die Erde keine Achsendrehung hätte, und R der mittlere Halbmesser der Erde, so hat man zuerst nach dem genannten §. des zweiten und nach §. 97 des ersten Buches mit hinreichender Annäherung und mit der Beachtung, daß $\cos^2\beta = \frac{2}{3}$, $\frac{R\varphi^2}{g} = 0{,}00346$ ist,

$$\mu g_1 = \frac{pGM_e}{R^2} = \mu g\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{R\varphi^2}{g}\right) = 1{,}00231\,\mu g\,;$$

ferner hat man nach §. 104 des ersten Buches für jenen Parallelkreis, wenn die Sekunde als Einheit für die Zeit und der Meter als Längen-Einheit genommen wird

$$g = 9^{m}{,}78091\,(1 + \tfrac{1}{3}\,.\,0{,}005188) = 9^{m}{,}7977\;,$$

woraus sich sofort

$$g_1 = 9^{m}{,}8203\quad,\qquad GM_e = g_1 R^2$$

ergibt, und wobei R ebenfalls in Meter ausgedrückt angenommen ist.

Die Gleichung (β) gibt mit Vernachlässigung von M_e neben M

$$GM = \frac{4\pi^2 a_e^{\,3}}{T_e^{\,2}}$$

und die Elimination von G aus den beiden letzten Werthen führt auf die Gleichung:

$$\frac{M_e}{M} = \frac{g_1 R^2 T_e^{\,2}}{4\pi^2 a_e^{\,3}}\,,$$

in welcher g_1, R und a_e auf dieselbe Längeneinheit, und g_1 und T_e auf dieselbe Zeiteinheit bezogen werden müssen. Nimmt man den vor-

hergehenden Werth von g_1, $R = 6370000^m$, $a = 24096\,R$, und die siderische Umlaufszeit T_0 der Erde zu $365{,}256 \times 3600$ Sekunden an, so findet man

$$M_0 = \frac{1}{359750} M .$$

Die vorhergehenden Beziehungen können endlich dazu dienen, den Werth des constanten Factors G für bestimmte Einheiten der Zeit, der Masse und der Entfernung zu berechnen. Nimmt man z. B. die Masse der Erde als Einheit der Masse, ihren mittlern Halbmesser als Einheit der Entfernung, so wird für die Sekunde als Zeiteinheit

$$G = g_1 = \frac{9{,}8203}{6370000} = 0{,}0000015416 .$$

Noch viel kleiner fällt natürlich dieser Factor aus, wenn man die Masse der Sonne als Massen-Einheit aber auch die mittlere Entfernung derselben von der Erde als Einheit der Länge nimmt. Von größerem Interesse aber dürfte es sein, diesen Factor durch unsere im ersten Buche angenommenen Einheiten auszudrücken und so die Größe der allgemeinen Massenanziehung durch Gewichtseinheiten zu messen. Dazu ist es nothwendig, das Verhältniß der Masse der Erde zu unserer Masseneinheit, oder ihre mittlere spezifische Dichte zu kennen. Nimmt man diese nach den Versuchen mit der Drehwage zu 5,5 an, so folgt

$$M_e = \frac{5500}{9{,}809} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \quad , \qquad G = g_1 \frac{3 \cdot 9{,}809}{4.5500.\pi} \cdot \frac{1}{R}^{kgr}$$

und

$$G = g_1 \frac{3 \cdot 9{,}809}{4.5500\,\pi R} = 0{,}0000000006564^{kgr} .$$

Zwei Kugeln, von denen jede an der Oberfläche der Erde 9,809 Kgr wiegt und deren Mittelpunkte einen Meter von einander entfernt sind, ziehen sich demnach nur mit der außerordentlich geringen Kraft von $\frac{1}{1500}$ Milligramm an.

§. 56.

Kehren wir nach diesem wieder zu unserer elliptischen Bewegung zurück. Die sechs constanten Größen a, e, γ, ε, λ und τ, durch welche die Gestalt und Lage der Bahn des Bewegten und die Zeit seines Durchganges durch den dem Anfangspunkt der Coordinaten zunächst liegenden Scheitel der großen Achse bestimmt wird, werden in

der Astronomie die Elemente der Bahn eines Planeten genannt; die halbe große Achse a heißt dort gewöhnlicher die mittlere Entfernung des Planeten von der Sonne; als Ebene der xy wird aber dort die Ebene der Erdbahn oder die Ebene der Ekliptik genommen, wobei dieselbe von einer bestimmten Epoche, dem Anfang der Zeit, an als unbeweglich vorausgesetzt wird; der Winkel γ ist also die Neigung der betreffenden Planetenbahn gegen die Ekliptik. Der Fahrstrahl der Erde in dem Augenblicke, wo uns die Sonne durch den Punkt der Frühlings-Nachtgleiche oder den Frühlings-Anfang geht, oder der Durchschnitt des Erd-Aequators mit der Ebene der Erdbahn ist die Achse der x; der Durchschnitt einer Planetenbahn mit der Ebene der Ekliptik wird die Knotenlinie jener Bahn genannt und darnach heißt der Winkel ε die Länge der Knotenlinie. Von der Knotenlinie an wird ferner der Winkel λ gerechnet, welcher die Lage der großen Achse in der Bahn-Ebene bestimmt, und zwar insbesondere desjenigen Theiles dieser Achse, welcher den Mittelpunkt der Sonne mit dem ihr zunächst liegenden Scheitel der Bahn oder mit dem Perihelium verbindet; der Winkel λ heißt daher auch die Länge des Periheliums in der Bahn-Ebene. Die Projection $\lambda_{,}$ dieses Winkels in der Ebene der Ekliptik steht mit λ durch die Beziehung:

$$\tang \lambda_{,} = \tang \lambda \cos \gamma$$

in Verbindung und die eigentliche Länge des Periheliums in der Ebene der Ekliptik, d. h. der Winkel zwischen der Projection des Periheliums in dieser Ebene und dem Frühlingspunkt ist $\lambda_{,} + \varepsilon$.

Die Beziehungen des vorhergehenden §. zeigen, wie diese Elemente einer Planetenbahn aus den anfänglichen Zuständen des Bewegten berechnet werden können; in der Anwendung müssen aber die anfänglichen Gegebenen ebenso wie die Elemente aus zwei oder mehreren durch die Beobachtung gegebenen Lagen des betreffenden Planeten und aus der Zeit dieser Beobachtung bestimmt werden; und zwar kann man die allgemeinen Beziehungen des vorigen §. in folgender Weise anwenden:

Seien x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des betreffenden Planeten am Ende der Zeit t_1 in Bezug auf die Ebene der Ekliptik und die Frühlings-Nachtgleiche, welche sich aus der beobachteten astronomischen Länge und Breite λ_1 und β_1 desselben und seiner Entfernung r_1 von der Sonne durch die Gleichungen:

$$x_1 = r_1 \cos\beta_1 \cos\lambda_1 \; , \quad y_1 = r_1 \cos\beta_1 \sin\lambda_1 \; , \quad z_1 = r_1 \sin\beta_1$$

ergeben, ebenso x_2, y_2, z_2 seine Coordinaten für die Beobachtungszeit t_2. Ferner seien ξ_1 und η_1 die Coordinaten desselben Planeten am Ende der Zeit t_1 in der Ebene seiner Bahn und in Bezug auf die große Achse derselben, ξ_1', η_1' seine Coordinaten in derselben Ebene und in Bezug auf die Knotenlinie genommen, ξ_2, η_2, ξ_2' und η_2' die entsprechenden Größen für die zweite Beobachtung. Man hat dann die Beziehungen:

$$\xi_1 = r \cos \omega \quad , \quad \eta_1 = r \sin \omega \, ,$$

und da man auch hat (Buch I., §. 86)

$$r = a(1 - \cos \omega) \quad , \quad \cos \omega = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \, ,$$

so wird, in Function von u ausgedrückt,

$$\delta.) \quad \xi_1 = a(\cos u_1 - e) \quad , \quad \eta_1 = a\sqrt{1 - e^2} \sin u_1 \, ,$$

und der für die erste Beobachtung geltende Werth u_1 von u ist mit der Beobachtungszeit t_1 durch die Gleichung (y) verbunden, so daß man hat

$$\eta.) \qquad n(t_1 - \tau) = u_1 - e \sin u_1 \, .$$

Dreht man nun die Coordinatenachsen der ξ_1 und η_1 zuerst so, daß die der ξ mit der Knotenlinie zusammenfällt, also um den Winkel λ rückwärts, so hat man

$$\xi_1' = \xi_1 \cos \lambda + \eta_1 \sin \lambda \quad , \quad \eta_1' = \eta_1 \cos \lambda - \xi_1 \sin \lambda \, ;$$

und wenn man dann in den Umwandlungsformeln in §. 23 des ersten Buches die Veränderlichen entsprechend vertauscht, nämlich mit Rücksicht auf die jenen Formeln zu Grunde liegenden Drehungen des Coordinatensystems und der Achsen, um welche diese Drehungen hier stattfinden, wenn man also x_1 für z, y_1 für x, und z_1 für y, ferner ξ_1' für z', η_1' für x', und 0 für y' setzt, so daß sich ergibt

$$x_1 = c'' \xi_1' + c \eta_1' \quad , \quad y_1 = a'' \xi_1' + a \eta_1' \quad , \quad z_1 = b'' \xi_1' + b \eta_1' \, ,$$

und dann beachtet, daß in den Werthen der Cosinus a, b, c, etc. am Ende des genannten §. nun $\omega = 0$, $\vartheta = \varepsilon$, $\psi = \gamma$ zu nehmen ist, so folgen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1' \cos\varepsilon - \eta_1' \cos\gamma \sin\varepsilon\,, \\ y_1 &= \xi_1' \sin\varepsilon + \eta_1' \cos\gamma \cos\varepsilon\,, \\ z_1 &= \eta_1' \sin\gamma\,, \end{aligned}\right\}$$

welche sich auch leicht unmittelbar ableiten lassen und mit den vorhergehenden Werthen von ξ_1' und η_1' die Form:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1(\cos\lambda\cos\varepsilon + \sin\lambda\sin\varepsilon\cos\gamma) + \eta_1(\sin\lambda\cos\varepsilon - \cos\lambda\sin\varepsilon\cos\gamma)\,, \\ y_1 &= \xi_1(\cos\lambda\sin\varepsilon - \sin\lambda\cos\varepsilon\cos\gamma) + \eta_1(\sin\lambda\sin\varepsilon + \cos\lambda\cos\varepsilon\cos\gamma)\,, \\ z_1 &= \eta_1\cos\lambda\sin\gamma - \xi_1\sin\lambda\sin\gamma\,, \end{aligned}\right\} (\varepsilon.$$

annehmen, und welche, wenn dann für ξ_1 und η_1 ihre Werthe (δ) in u_1 eingeführt werden, die zwischen dieser Veränderlichen, den Coordinaten x_1, y_1, z_1 und den Constanten a, e, λ, ε, γ stattfindenden Beziehungen ausdrücken. Drei ähnliche Gleichungen erhält man auch für die Coordinaten x_2, y_2, z_2 und den entsprechenden Winkel u_2; es wären also noch diese Winkel u_1 und u_2 durch die Beobachtungszeiten t_1 und t_2 und durch die Constante τ mittels der Gleichung (γ) zu ersetzen, um sechs Gleichungen zwischen den beobachteten Größen und den sechs Elementen a, e, λ, ε, γ und τ zu erhalten, welche der Zahl nach genügen, um diese letztern Größen zu berechnen. Aus der Gleichung (γ) können aber die Werthe von u_1 und u_2 nur annäherungsweise erhalten werden, es lassen sich daher die genannten sechs Gleichungen nicht in abgeschlossener Form darstellen, und die Elemente der Bahn auch nur annäherungsweise bestimmen. Diese Bestimmung wird indessen bei den Planeten einmal dadurch wesentlich erleichtert, daß die Excentricitäten und die gegenseitigen Neigungen ihrer Bahnen ziemlich klein sind, und dann deren Genauigkeit dadurch sehr gefördert, daß diese Himmelskörper sich nur auf kurze Zeit, wenn sie sich in der Nähe der Sonne befinden, der Beobachtung entziehen, daß man also eine große Anzahl von Beobachtungen desselben Planeten verbinden kann, um daraus die wahrscheinlichsten Werthe für die Elemente seiner Bahn zu erhalten, und daß die so berechneten Werthe immer wieder durch neue Beobachtungen verbessert werden können. Auf diese Weise ist man denn auch dahin gelangt, jene Elemente für die ältern Planeten mit aller für einen nicht zu großen Zeitraum wünschenswerthen Genauigkeit festzustellen.

Weniger leicht lassen sich die Elemente der Bahn eines Kometen bestimmen, da man dieselben meistens nur in einem sehr kleinen Theil ihrer Bahn beobachten kann, und diese Bahnen sehr große Excentricitäten und alle möglichen Neigungen gegen die Ekliptik besitzen. Wir können indessen hier weder auf jene noch auf diese angenäherte Bestimmung näher eingehen und müssen wegen derselben auf die obengenannten Werke verweisen.

Ebenso muß ich mich begnügen, in Betreff der mit der vorhergehenden Bestimmung in Verbindung stehenden Aufgabe: den Ort eines Planeten für eine gegebene Zeit zu berechnen, wenn die Elemente seiner Bahn bekannt sind, oder in Betreff des Keppler'schen Problems kurz das zu wiederholen, was in §. 87 über diese Aufgabe gesagt wurde. Die Auflösung derselben ist in den drei Gleichungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} nt = u - e \sin u \;, \\ r = a(1 - e \cos u) \;, \quad \tan \frac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{1}{2} u \;, \end{array} \right.$$

enthalten, worin nt die mittlere Bewegung oder die mittlere Anomalie des Planeten darstellt, d. h. den Winkel, welchen der Fahrstrahl eines in einem Kreise vom Halbmesser a sich gleichförmig bewegenden Planeten, welcher wie der wirkliche Planet in der Zeit $T = \frac{2\pi}{n}$ einen Umlauf vollendet, in derselben Zeit t beschreiben würde. Aus der ersten zieht man als ersten Näherungswerth von u.

$$u = nt + e \sin nt \;,$$

und findet damit für die Coordinaten r und ω des gesuchten Ortes für gleichen Grad der Annäherung die Werthe:

$$r = a(1 - e \cos nt) \quad , \quad \omega = nt + 2e \sin nt \;,$$

welche wie der Werth von u die ersten Glieder von Reihen bilden, die nach aufsteigenden Potenzen von e geordnet und daher für kleine Excentricitäten sehr convergent sind.

§. 57.

Durch die Erörterungen der vorhergehenden §§. sind wir in den Stand gesetzt, die rein-elliptische Bewegung eines Planeten von einer bestimmten Epoche an zu ermitteln, d. h. diejenige Bewegung, welche er von dieser Zeit an annehmen würde, wenn nur zwischen ihm und

der Sonne eine anziehende Wirkung vorhanden, die Function **V** also Null wäre, die Elemente der von ihm unter dieser Voraussetzung beschriebenen Bahn zu bestimmen und seinen Ort in dieser Bahn für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, also seine Coordinaten r und ω und mittels dieser und der Winkel γ und ε seine rechtwinklichen Coordinaten **x**, **y**, **z** wenigstens annähernd in Function von t auszudrücken; denn man wird leicht einsehen, daß für diese dieselben Beziehungen (ε) gültig sein müssen, die im vorhergehenden §. für x_1, y_1, z_1 abgeleitet wurden, daß darin nur die den Werthen (δ) für ξ_1 und η_1 entsprechenden Functionen von u einzuführen sind und diese letztere Veränderliche noch in Function von $t - \tau$ mittels der Gleichung:

$$u = n(t - \tau) + e \sin u(t - \tau) + \text{etc.}$$

auszudrücken ist, um die angenäherten Werthe von **x**, **y**, **z** in Function von t zu erhalten. Damit kann man denn auch die Aenderungsgesetze $\frac{d^2 x}{dt^2}$, $\frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ oder die Glieder $G(M + M_1)\frac{x}{r^3}$, $G(M + M_1)\frac{y}{r^3}$, $G(M + M_1)\frac{z}{r^3}$ in Function von t darstellen, um sie als solche in die Gleichungen (q) einzuführen, und es scheint dann der natürlichste Weg zu sein, aus diesen Gleichungen die durch die anziehenden Wirkungen der übrigen Planeten erzeugten Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Coordinaten **x**, **y**, **z** in Function der Zeit zu bestimmen. Dazu könnte man selbst für eine nicht zu große Zeit als erste Annäherung die Glieder $G(M + M_1)\left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x}{r^3}\right)$, u. s. f., welche mit Vernachlässigung der zweiten und höhern Potenzen jener Aenderungen, auf die Form:

$$-G(M + M_1)\frac{2x^2\mathfrak{x} + y(3x\mathfrak{y} - y\mathfrak{x}) + z(3x\mathfrak{z} - z\mathfrak{x})}{r^5},$$

u. s. f.

zurückkommen, wegen der außerordentlich kleinen Verhältnisse $\frac{\mathfrak{x}}{r^3}$, $\frac{\mathfrak{y}}{r^3}$, $\frac{\mathfrak{z}}{r^3}$ vernachlässigen, jene Gleichungen also auf die einfachen

$$
\text{ζ.)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \dfrac{dV_i}{d\mathfrak{x}}\,, \quad \dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \dfrac{dV_i}{d\mathfrak{y}}\,, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = \dfrac{dV_i}{d\mathfrak{z}}\,, \end{cases}
$$

zurückbringen, und in der Function V_i statt der Coordinaten x_i, x_k u. s. f. die derselben Zeit t und einer rein elliptischen Bewegung der Massen M_i und M_k entsprechenden Coordinaten $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{x}_k$, u. s. f., in Function von t ausgedrückt, einführen. Die Astronomen haben sich aber durch die allmählige Ausbildung der theoretischen Astronomie daran gewöhnt, die Bewegungen der Planeten immer als rein elliptische zu berechnen, die Elemente der Bahn aber als veränderliche zu betrachten, und die Correctionen zu bestimmen, welche von Zeit zu Zeit an diesen Elementen angebracht werden müssen, damit die Ortsbestimmungen der Planeten soweit als es die mit den astronomischen Instrumenten erreichbare Genauigkeit wünschenswerth macht, zuverlässig werden. Diese Anschauungs- und Bestimmungsweise ist auch in die Analysis übertragen worden und gewährt vor dem vorher angedeuteten Verfahren den wesentlichen Vortheil, daß dadurch die Aenderungen, welche in den Bewegungen der Planeten im Laufe der Zeit vor sich gehen, anschaulicher und übersichtlicher werden, indem sie sich als Aenderungen in der Gestalt und Lage ihrer Bahnen darstellen, und daß dadurch ermittelt werden kann, welche dieser Aenderungen mit der Zeit beständig zunehmen und welche bloß periodisch sind.

Nach dieser Anschauungsweise kommt also die Aufgabe der Theorie darauf hinaus, die Elemente einer Ellipse zu bestimmen, in welcher sich ein Planet vermöge der zwischen ihm und der Sonne allein thätigen Massenanziehung in irgend einem Augenblicke so bewegen muß, wie es in seiner wirklichen Bahn der Fall ist, nämlich so, daß der gedachte Planet und der wirkliche in diesem Augenblicke gleiche und gleichgerichtete Geschwindigkeiten besitzen, also die Elemente einer Ellipse, von der ein Brennpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten (im Mittelpunkt der Sonne) liegt, welche mit der wirklichen Bahn des betreffenden Planeten in einer Berührung erster Ordnung steht, und worin ein materieller Punkt beim Durchgange durch den Berührungspunkt dieselbe Geschwindigkeit besitzt, wie der betreffende Planet. Es leuchtet darnach ein, daß die Elemente dieser Ellipse für den Uebergang von einem Punkte der wirklichen Bahn zu einem folgenden stetig veränderliche Größen und als Functionen der Zeit t, der Coordinaten x_i, y_i, z_i und

der Geschwindigkeiten $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ betrachtet werden müssen, daß sie aber unveränderlich sind für den Uebergang von einem Punkte der Ellipse zu einem folgenden, d. h. wenn die Function V_i vernachlässigt wird. Bezeichnet man also wie vorher die Coordinaten der unveränderlichen Ellipse mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und denkt sich die Elemente der Bahn nach diesen augenblicklichen Coordinaten und ihren Aenderungsgesetzen $\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u}_x$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{u}_y$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{u}_z$ bestimmt, wie sie im Vorhergehenden aus der anfänglichen Lage und Geschwindigkeit bestimmt wurden, so kann man

$$a = f_1(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}_x, \mathfrak{u}_y, \mathfrak{u}_z, t),$$

$$e = f_2(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{u}_x, \mathfrak{u}_y, \mathfrak{u}_z, t),$$

u. s. f.

setzen, und hat dann

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} = 0 &= \frac{\partial f_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{y}}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_x}\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_y}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_z}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt} \\ \frac{de}{dt} = 0 &= \frac{\partial f_2}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{x}}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{y}}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{z}}\frac{d\mathfrak{z}}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{u}_x}\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{u}_y}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathfrak{u}_z}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad (9.$$

Es ist aber nach den obigen Bedingungen im Berührungspunkte, wenn man einfach x, y, z statt x_i, y_i, z_i setzt, und die Componenten der Geschwindigkeit v des Bewegten auch wie gewöhnlich mit u_x, u_y, u_z bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y, \quad \mathfrak{z} = z, \\ &\frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{u}_x = \frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{u}_y = \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \text{u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad (10.$$

folglich hat man auch

$$a = f_1(x, y, z, u_x, u_y, u_z, t),$$
$$e = f_2(x, y, z, u_x, u_y, u_z, t),$$
u. s. f.,

und daher für den Uebergang von dem Punkte xyz zu dem nächsten in der wirklichen Bahn für das Element a in Bezug auf t das vollständige Aenderungsgesetz:

$$\frac{da}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f_1}{dz}\frac{dz}{dt}$$
$$+ \frac{\partial f_2}{\partial u_x}\frac{du_x}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial u_y}\frac{du_y}{dt} + \frac{\partial f_2}{d u_z}\frac{du_z}{dt},$$

welches mit dem vorhergehenden Aenderungsgesetz (ϑ) und den Bedingungen (ι) zuerst in den Ausdruck:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial u_x}\frac{du_x}{dt} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_x}\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial u_y}\frac{du_y}{dt} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_y}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt}$$
$$+ \frac{\partial f_1}{\partial u_z}\frac{du_z}{dt} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_z}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}$$

übergeht. Wenn man dann noch beachtet, daß wegen der formellen Gleichheit der mit f_1 bezeichneten Functionen auch die von der Zeit t unabhängigen partialen Uebergangsgesetze

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_x} \text{ und } \frac{\partial f_1}{\partial u_x}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_y} \text{ und } \frac{\partial f_1}{\partial u_y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{u}_z} \text{ und } \frac{\partial f_1}{\partial u_z}$$

gleich sein müssen, so erhält man

$$\kappa.)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial u_x}\left(\frac{du_x}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial u_y}\left(\frac{du_y}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt}\right) \\ &\quad + \frac{\partial f_1}{\partial u_z}\left(\frac{du_x}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen (p) in §. 55 werden aber mit denselben Bedingungen

$$\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{x}{r^3} = 0 \;, \quad \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{y}{r^3} = 0 \;,$$

$$\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt} + G\widehat{\mathfrak{M}}\frac{z}{r^3} = 0 \;;$$

und wenn man diese von den Gleichungen (g) in §. 54 abzieht, so folgen die Beziehungen:

$$M_i\left(\frac{d u_x}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt}\right) = \frac{dV_i}{dx} \;, \quad M_i\left(\frac{d u_y}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_y}{dt}\right) = \frac{dV_i}{dy} \;,$$

$$M_i\left(\frac{d u_z}{dt} - \frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}\right) = \frac{dV_i}{dz} \;,$$

mit welchen nun das vorhergehende Aenderungsgesetz ($\varkappa$) auf die Form:

$$M_i\frac{da}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial u_x}\frac{dV_i}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial u_y}\frac{dV_i}{dy} + \frac{\partial f_1}{\partial u_z}\frac{dV_i}{dz} \;,$$

oder wenn man nun a selbst statt der mit f_1 bezeichneten Function einführt und auch bei V_i und M_i den Index i wegläßt, auf

$$M\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{dV}{dx} + \frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{dV}{dy} + \frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{dV}{dz}$$

gebracht werden kann. Ebenso findet man (λ.

$$M\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial u_x}\frac{dV}{dx} + \frac{\partial e}{\partial u_y}\frac{dV}{dy} + \frac{\partial e}{\partial u_z}\frac{dV}{dz} \;,$$

und so fort für die übrigen Elemente der Bahn.

Diesen Aenderungsgesetzen der Elemente a, e, u. s. f. kann man noch eine andere Form geben, welche wohl etwas zusammengesetzter erscheint, welche aber vor der vorhergehenden für die Anwendung jener Gleichungen einen wichtigen Vorzug hat. Beachtet man nämlich, daß die mit V bezeichnete Größe auch als eine Function der veränderlichen Elemente a, e, γ, ε, u. s. f., und der Zeit t betrachtet werden kann, so kann man die theilweisen Aenderungsgesetze $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$ auch in der Form:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d.V}{dx} &= \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta x}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta x}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta x}+\frac{dV}{d\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta x}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta x}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta x},\\
\frac{d.V}{dy} &= \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta y}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta y}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta y}+\frac{dV}{d\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta y}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta y}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta y},\\
\frac{d.V}{dz} &= \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta z}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta z}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta z}+\frac{dV}{d\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta z}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta z}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta z},
\end{aligned}\right.$$

darstellen, und damit den obigen Werth (λ) von $M\frac{da}{dt}$ so ausdrücken:

$$\begin{aligned}
M\frac{da}{dt} = &\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta a}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta a}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u_z}\frac{\delta a}{\delta z}\right)\frac{dV}{da}\\
&+\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta e}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta e}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u^z}\frac{\delta e}{\delta z}\right)\frac{dV}{de}\\
&+\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta \gamma}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta \gamma}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u_z}\frac{\delta \gamma}{\delta z}\right)\frac{dV}{d\gamma}\\
&+\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta \varepsilon}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta \varepsilon}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u_z}\frac{\delta \varepsilon}{\delta z}\right)\frac{dV}{d\varepsilon}\\
&+\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta \lambda}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta \lambda}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u_z}\frac{\delta \lambda}{\delta z}\right)\frac{dV}{d\lambda}\\
&+\left(\frac{\delta a}{\delta u_x}\frac{\delta \tau}{\delta x}+\frac{\delta a}{\delta u_y}\frac{\delta \tau}{\delta y}+\frac{\delta a}{\delta u_z}\frac{\delta \tau}{\delta z}\right)\frac{dV}{d\tau}.
\end{aligned}$$

Man hat ferner, weil die Function V die Geschwindigkeiten u_x, u_y und u_z nicht enthält, die Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dV}{du_x} &= 0 = \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta u_x}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta u_x}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta u_x}+\frac{dV}{\delta\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta u_x}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta u_x}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta u_x},\\
\frac{dV}{du_y} &= 0 = \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta u_y}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta u_y}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma'}{\delta n_y}+\frac{dV}{d\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta u_y}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta u_y}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta u_y},\\
\frac{dV}{du_z} &= 0 = \frac{dV}{da}\frac{\delta a}{\delta u_z}+\frac{dV}{de}\frac{\delta e}{\delta u_z}+\frac{dV}{d\gamma}\frac{\delta \gamma}{\delta u_z}+\frac{dV}{d\varepsilon}\frac{\delta \varepsilon}{\delta u_z}+\frac{dV}{d\lambda}\frac{\delta \lambda}{\delta u_z}+\frac{dV}{d\tau}\frac{\delta \tau}{\delta u_z},
\end{aligned}\right.$$

und wenn man diese der Reihe nach mit $\frac{\delta a}{\delta x}$, $\frac{\delta a}{\delta y}$, $\frac{\delta a}{\delta z}$ multiplicirt

und die Producte von dem vorangehenden Werthe von $M\frac{da}{dt}$ abzieht, so folgt der neue Werth:

$$M\frac{da}{dt}=\left(\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial e}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial e}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial e}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial e}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial e}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial e}{\partial u_z}\right)\frac{dV}{de}$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial \gamma}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial \gamma}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial \gamma}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial u_z}\right)\frac{dV}{d\gamma}$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_z}\right)\frac{dV}{d\varepsilon}$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial \lambda}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \lambda}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial \lambda}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \lambda}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial \lambda}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \lambda}{\partial u_z}\right)\frac{dV}{d\lambda}$$

$$+\left(\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial \tau}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial \tau}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial \tau}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial \tau}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial \tau}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial \tau}{\partial u_z}\right)\frac{dV}{d\tau},$$

welcher nun die oben bemerkte Eigenschaft besitzt, nämlich die, daß die eingeklammerten Factoren der rechten Seite die Zeit t nicht enthalten; es würde aber hier zu weit führen, diese Eigenschaft allgemein zu beweisen.

Ersetzen wir zur Abkürzung die eingeklammerten Größen in dem vorstehenden Ausdruck der Reihe durch (a, e), (a, γ), (a, ε), (a, λ) und (a, τ), so daß derselbe die einfache Form:

$$M\frac{da}{dt}=(a,e)\frac{dV}{de}+(a,\gamma)\frac{dV}{d\gamma}+(a,\varepsilon)\frac{dV}{d\varepsilon}+(a,\lambda)\frac{dV}{d\lambda}+(a,\tau)\frac{dV}{d\tau}$$

annimmt, so hat man in ähnlicher Weise

$$M\frac{de}{dt}=(e,a)\frac{dV}{da}+(e,\gamma)\frac{dV}{d\gamma}+(e,\varepsilon)\frac{dV}{d\varepsilon}+(e,\lambda)\frac{dV}{d\lambda}+(e,\tau)\frac{dV}{d\tau},$$

$$M\frac{d\gamma}{dt}=(\gamma,a)\frac{dV}{da}+(\gamma,e)\frac{dV}{de}+(\gamma,\varepsilon)\frac{dV}{d\varepsilon}+(\gamma,\lambda)\frac{dV}{d\lambda}+(\gamma,\tau)\frac{dV}{d\tau},$$

u. s. f.

und man wird leicht einsehen, daß man auch hat

$(e,a)=-(a,e)$, $(\gamma,a)=-(a,\gamma)$, $(\gamma,e)=-(e,\gamma)$, u. s. f.,

daß also die fünfzehn Combinationen

$$
\begin{array}{lllll}
(a,e), & (a,\gamma), & (a,\varepsilon), & (a,\lambda), & (a,\tau), \\
 & (e,\gamma), & (e,\varepsilon), & (e,\lambda), & (e,\tau), \\
 & & (\gamma,\varepsilon), & (\gamma,\lambda), & (\gamma,\tau), \\
 & & & (\varepsilon,\lambda), & (\varepsilon,\tau), \\
 & & & & (\lambda,\tau),
\end{array}
$$

genügen, um die Aenderungsgesetze der sechs Elemente a, e, γ, ε, λ und τ in Bezug auf t durch diese selbst und die partiellen Aenderungsgesetze der Function V in Bezug auf die Aenderung derselben Elemente auszudrücken.

§. 58.

Zur Ableitung dieser Combinationen dienen uns die im Vorhergehenden aufgeführten Gesetze der rein elliptischen Bewegung, oder die Beziehungen zwischen den Elementen der elliptischen Bahn und den Coordinaten und Geschwindigkeiten des Bewegten in derselben, nämlich

$$
\mu.)\left\{
\begin{array}{l}
x u_y - y u_x = c_1 \quad , \quad z u_x - x u_z = c_2 \quad , \quad y u_z - z u_y = c_3 \\
c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = C^2 \quad , \quad r^2 \frac{d\omega}{dt} = C , \\
u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = G\mathfrak{M}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) , \\
r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\omega-\lambda)} = a(1-e\cos u) , \\
t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{G\mathfrak{M}}}\,(u - e\sin u) , \\
\operatorname{tang}\gamma = \sqrt{\frac{c_2^2+c_3^2}{c_1^2}} \quad , \quad \operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{c_3}{c_2}
\end{array}
\right.
$$

und diese zeigen, daß sich die betreffenden Elemente nicht alle unmittelbar auf einfache Weise in Function von x, y, z, u_x, u_y, u_z darstellen lassen, daß es daher vortheilhafter ist, jene Elemente erst als Functionen der Constanten c_1, c_2, c_3 und C zu betrachten, da nur diese und a unmittelbar in Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten gegeben sind. Dazu hat man einmal, C als Function von c_1, c_2, c_3 genommen,

$$\frac{\delta . C}{\delta x} = \frac{\delta C}{\delta c_1}\frac{\delta c_1}{\delta x} + \frac{\delta C}{\delta c_2}\frac{\delta c_2}{\delta x} + \frac{\delta C}{\delta c_3}\frac{\delta c_3}{\delta x},$$

$$\frac{\delta . C}{\delta u_x} = \frac{\delta C}{\delta c_1}\frac{\delta c_1}{\delta u_x} + \frac{\delta C}{\delta c_2}\frac{\delta c_2}{\delta u_x} + \frac{\delta C}{\delta c_3}\frac{\delta c_3}{\delta u_x},$$

u. s. f.;

und wenn wir die Constante C als sechstes Element anstatt der Excentricität e, welche von ihr durch die Gleichung:

$$e = \sqrt{1 - \frac{C^2}{G\widehat{\mathfrak{M}}a}}$$

abhängt, annehmen, also die Combinationen (a, C), (C, γ), (C, ε), u. s. f. bilden, und die vorstehenden Werthe von $\frac{\delta . C}{\delta x}$, $\frac{\delta . C}{\delta u_x}$, u. s. f. in den Ausdruck für die Combination (a, C) einführen, so ergibt sich

$$(a, C) = (a, c_1)\frac{\delta C}{\delta c_1} + (a, c_2)\frac{\delta C}{\delta c_2} + (a, c_3)\frac{\delta C}{\delta c_3}.$$

Um nun die Werthe von (a, c_1), (a, c_2) und (a, c_3) zu berechnen, zieht man aus den drei ersten der Gleichungen (μ) die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta c_1}{\delta x} = u_y, \quad \frac{\delta c_1}{\delta y} = -u_x, \quad \frac{\delta c_1}{\delta z} = 0, \quad \frac{\delta c_1}{\delta u_x} = -y, \quad \frac{\delta c_1}{\delta u_y} = x, \quad \frac{\delta c_1}{\delta u_z} = 0,$$

$$\frac{\delta c_2}{\delta x} = -u_z, \quad \frac{\delta c_2}{\delta y} = 0, \quad \frac{\delta c_2}{\delta z} = u_x, \quad \frac{\delta c_2}{\delta u_x} = z, \quad \frac{\delta c_2}{\delta u_y} = 0, \quad \frac{\delta c_2}{\delta u_z} = -x,$$

$$\frac{\delta c_3}{\delta x} = 0, \quad \frac{\delta c_3}{\delta y} = u_z, \quad \frac{\delta c_3}{\delta z} = -u_y, \quad \frac{\delta c_3}{\delta u_x} = 0, \quad \frac{\delta c_3}{\delta u_y} = -z, \quad \frac{\delta c_3}{\delta u_z} = y,$$

und die fünfte dieser Gleichungen gibt, wenn $G\widehat{\mathfrak{M}}$ durch g ersetzt wird,

$$g\frac{\delta a}{\delta u_x} = 2a^2 u_x, \quad g\frac{\delta a}{\delta u_y} = 2a^2 u_y, \quad g\frac{\delta a}{\delta u_z} = 2a^2 u_z,$$

$$\frac{\delta a}{\delta x} = \frac{x}{r^3}, \quad \frac{\delta a}{\delta y} = \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\delta a}{\delta z} = \frac{z}{r^3}.$$

und wenn diese Werthe in die Ausdrücke für (a, c_1), (a, c_2), (a, c_3) nämlich

$$\frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial c_1}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial c_1}{\partial u_x}+\frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial c_1}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial c_1}{\partial u_y}+\frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial c_1}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial z}\frac{\partial c_1}{\partial u_z},$$

u. s. f.

eingesetzt werden, so folgt

$$(a, c_1) = 0 \quad , \quad (a, c_2) = 0 \quad , \quad (a, c_3) = 0 \, ,$$

und damit wird auch

$$(a, C) = 0 \, .$$

Ebenso findet man mittels der beiden letzten der Gleichungen (μ) die Werthe

$$(a, \gamma) = 0 \quad , \quad (a, \varepsilon) = 0 \quad , \quad (C, \gamma) = 0 \quad , \quad (C, \varepsilon) = 0 \, .$$

Um den Werth von (γ, ε) zu bestimmen hat man

$$\cos\gamma = \frac{c_1}{C} \quad , \quad \frac{\partial \gamma}{\partial c_1} = -\frac{1}{C\sin\gamma} \, .$$

$$(\gamma, \varepsilon) = (\varepsilon, c_1)\frac{\partial \gamma}{\partial c_1} + (\varepsilon, C)\frac{\partial \gamma}{\partial C} = (\varepsilon, c_1)\frac{\partial \gamma}{\partial c_1} \, ,$$

und

$$(\varepsilon, c_1) = (c_2, c_1)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} + (c_3, c_1)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_3} \, ;$$

mit den obigen Werthen von $\frac{\partial c_1}{\partial x}$, $\frac{\partial c_1}{\partial u_x}$, u. s. f., findet man aber

$$(c_2, c_1) = -(y u_z - z u_y) = -c_3 \quad , \quad (c_3, c_1) = z u_x - x u_z = c_2$$

und die Gleichung $\tan\varepsilon = -\frac{c_3}{c_2}$ gibt

$$\frac{1}{\cos^2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} = \frac{c_3}{c_2^2} \quad , \quad \frac{1}{\cos^2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_3} = -\frac{1}{c_2} \, ;$$

damit folgt

$$(\varepsilon, \varepsilon_1) = -\cos^2\varepsilon \, \frac{c_2^2 + c_3^2}{c_2^2} = -1$$

und der gesuchte Werth wird

$$(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{C \sin\gamma} .$$

Denken wir uns ferner die Gleichung $r = a(1 - \cos u)$ nach u aufgelöst, diesen Werth in der folgenden Gleichung substituirt und e durch C ausgedrückt, so wird diese die Form:

$$\tau = t - f(a, C, r) \qquad \text{(t.}$$

annehmen, und gibt die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} = \frac{\partial\tau}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial\tau}{\partial y} = \frac{\partial\tau}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\partial\tau}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{\partial\tau}{\partial r} ,$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial u_x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\tau}{\partial u_y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\tau}{\partial u_z} = 0 ;$$

mit den frühern Werthen findet man daher

$$(a, \tau) = \frac{2a^2}{g}\,\frac{x u_x + y u_y + z u_z}{r}\,\frac{\partial\tau}{\partial r} = \frac{2a^2}{g}\,\frac{dr}{dt}\,\frac{\partial\tau}{\partial r} ,$$

oder wenn man beachtet, daß die Aenderung von τ in Bezug auf r von t unabhängig ist und daher das aus der Gleichung (τ) gezogene Uebergangsgesetz $\frac{\partial\tau}{\partial r}$ gleich ist dem Aenderungsgesetz von t in Bezug auf r bei der rein elliptischen Bewegung, daß also $\frac{dt}{dr} = \frac{\partial\tau}{\partial r}$ oder $\frac{dr}{dt}\frac{\partial\tau}{\partial r} = 1$ ist, einfach

$$(a, \tau) = \frac{2a^2}{g} .$$

Für die Combination (C, τ) hat man nach dem Vorhergehenden

$$(C, \tau) = (c_1, \tau)\frac{\partial C}{\partial c_1} + (c_2, \tau)\frac{\partial C}{\partial c_2} + (c_3, \tau)\frac{\partial C}{\partial c_3} = 0$$

da die obigen Werthe von $\frac{\partial c_1}{\partial u_x}$, $\frac{\partial \tau}{\partial x}$, u. s. f., offenbar

$$(c_1, \tau) = (c_2, \tau) = (c_3, \tau) = 0$$

geben. Ebenso hat man

$$(\gamma, \tau) = 0 \quad , \quad (\varepsilon, \tau) = 0 \, ,$$

da diese Combinationen ebenfalls die (c_1, τ), (c_2, τ), (c_3, τ) als Factoren enthalten.

Es sind demnach noch die fünf Combinationen (a, λ), (C, λ), (γ, λ), (ε, λ) und (τ, λ) zu bestimmen übrig. Dazu denkt man sich wieder die Gleichung:

$$r[1 + e \cos(\omega - \lambda)] = a(1 - e^2)$$

in Bezug auf λ aufgelöst und mittels Einführung des Werthes von e in Function von C unter die Form:

$$\lambda = \omega - f_1(a, C, r)$$

gebracht; man hat dann wie früher

$$(a, \lambda) = (a, \omega)\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + (a, C)\frac{\partial \lambda}{\partial C} + (a, r)\frac{\partial \lambda}{\partial r} \, ,$$

$$(C, \lambda) = (C, \omega)\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + (C, a)\frac{\partial \lambda}{\partial a} + (C, r)\frac{\partial \lambda}{\partial r} \, ,$$

$$(\gamma, \lambda) = (\gamma, \omega)\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + (\gamma, a)\frac{\partial \lambda}{\partial a} + (\gamma, C)\frac{\partial \lambda}{\partial C} + (\gamma, r)\frac{\partial \lambda}{\partial r} \, ,$$

$$(\varepsilon, \lambda) = (\varepsilon, \omega)\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + (\varepsilon, a)\frac{\partial \lambda}{\partial a} + (\varepsilon, C)\frac{\partial \lambda}{\partial C} + (\varepsilon, r)\frac{\partial \lambda}{\partial r} \, ,$$

$$(\tau, \lambda) = (\tau, \omega)\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + (\tau, a)\frac{\partial \lambda}{\partial a} + (\tau, C)\frac{\partial \lambda}{\partial C} + (\tau, r)\frac{\partial \lambda}{\partial r} \, ,$$

ferner ist $(a, C) = 0$, $(a, \gamma) = 0$, $(a, \tau) = 0$, $(C, \gamma) = 0$, $(C, \varepsilon) = 0$, $(C, \tau) = 0$, $\frac{\partial \lambda}{\partial \omega} = 1$, und $\frac{\partial \omega}{\partial u_x} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial u_y} = 0$, $\frac{\partial \omega}{\partial u_z} = 0$, weil ω nur von den Coordinaten x, y, z abhängt, und daher

$$(a,\lambda) = \frac{\partial a}{\partial u_x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial u_y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial u_z}\frac{\partial \omega}{\partial z} + (a,r)\frac{\partial \lambda}{\partial r},$$

$$(C,\lambda) = \frac{\partial C}{\partial u_x}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial u_y}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial u_z}\frac{\partial \omega}{\partial z} + (C,r)\frac{\partial \lambda}{\partial r},$$

u. s. f.

Die Aenderungsgesetze $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega}{\partial z}$ folgen aus den Beziehungen zwischen den rechtwinklichen und den Polar-Coordinaten eines Punktes der Bahn, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos\omega\cos\varepsilon - \sin\omega\sin\varepsilon\cos\gamma) \\ y &= r(\cos\omega\sin\varepsilon + \sin\omega\cos\varepsilon\cos\gamma) \\ z &= r\sin\omega\sin\gamma \end{aligned}\right\},$$

oder nach ω aufgelöst

$$\cos\omega = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{r}, \quad \sin\omega = \frac{z}{r\sin\gamma}.$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich ω in Function von x, y, z und γ, man hat daher

$$\frac{\partial.\omega}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$\frac{\partial.\omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

u. s. f.

wornach der Werth von (a,ω) in $(a,\omega_x) + (a,\gamma)\frac{\partial \omega}{\partial \gamma}$ zerlegt werden kann, wenn man durch (a,ω_x) andeutet, daß darin ω blos als Function von x, y, z zu betrachten ist. Man erhält dann leicht

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{xz}{r^3\sin\gamma\cos\omega}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{yz}{r^3\sin\gamma\cos\omega},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{r^2 - z^2}{r^3\sin\gamma\cos\omega}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{r u_z - z\frac{dr}{dt}}{r^2\sin\gamma\cos\omega}.$$

und findet so mit den frühern Werthen

$$(a,\lambda) = \frac{1}{r \sin\gamma \cos\omega}\frac{\partial a}{\partial u_z} - \frac{z}{r^2 \sin\gamma\cos\omega}\left(x\frac{\partial a}{\partial u_x} + y\frac{\partial a}{\partial u_y} + z\frac{\partial a}{\partial u_z}\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial a}{\partial u_x} + y\frac{\partial a}{\partial u_y} + z\frac{\partial a}{\partial u_z}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial r} + (a,\gamma)\frac{\partial \omega}{\partial r}$$

$$= \frac{2a^2}{g r^2 \sin\gamma\cos\omega}\left(r u_z - z\frac{dr}{dt}\right) + \frac{2a^2}{g}\frac{dr}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial r},$$

$$= \frac{2a^2}{g}\left(\frac{d\omega}{dt} + \frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{dr}{dt}\right),$$

also einfach

$$(a,\lambda) = 0,$$

da man offenbar hat

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}\frac{dr}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}.$$

Beachtet man ferner, daß $(C,\gamma) = 0$ und $x\frac{\partial C}{\partial u_x} + y\frac{\partial C}{\partial u_y} + z\frac{\partial C}{\partial u_z} = 0$, so findet man

$$(C,\lambda) = \frac{1}{r \sin\gamma\cos\omega}\frac{\partial C}{\partial u_z};$$

es ist aber

$$\frac{\partial C}{\partial u_z} = \frac{\partial.\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}{\partial u_z} = \frac{c_3 y - c_2 x}{C},$$

und mit Beachtung der Werthe von c_2 und c_3 in Function von γ und ε, dann des vorhergehenden Werthes von $\cos\omega$ wird darnach

$$\frac{\partial C}{\partial u_z} = \sin\gamma\,(x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon) = r\sin\gamma\cos\omega$$

$$(C,\lambda) = 1.$$

Der Werth von (γ,λ) ergibt sich am einfachsten mittels der Beziehungen

$$\cos\gamma = \frac{c_1}{C}, \quad (\gamma,\lambda) = (C,\lambda)\frac{\partial\gamma}{\partial C} + (c_1,\lambda)\frac{\partial\gamma}{\partial c_1},$$

deren letztere wegen $(c_1,\lambda) = 0$ und $(C,\lambda) = 1$ sogleich auf

$$(\gamma, \lambda) = \frac{\partial \gamma}{\partial C} = \frac{c_1}{C^2 \sin \gamma} = \frac{\cos \gamma}{C \sin \gamma}$$

zurückkommt.

Weiter hat man nach dem Obigen

$$(\varepsilon, \lambda) = (\varepsilon, \omega_x) + (\varepsilon, r) \frac{\partial \lambda}{\partial r} + (\varepsilon, \gamma) \frac{\partial \omega}{\partial \gamma},$$

und da ε eine Function von c_2 und c_3 ist, so wird

$$(\varepsilon, \omega_x) = (c_2, \omega_x) \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} + (c_3, \omega_x) \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_3},$$

$$(\varepsilon, r) \quad = (c_2, r) \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} + (c_3, r) \frac{\partial \varepsilon}{\partial c_3}.$$

Man findet aber leicht nach dem Vorhergehenden $(\varepsilon, r) = 0$ und

$$(c_2, \omega_x) = -\frac{x}{r \sin \gamma \cos \omega}, \quad (c_3, \omega_x) = \frac{y}{r \sin \gamma \cos \omega},$$

$$(\varepsilon, \omega_x) = -\frac{1}{C^2 r \sin^3 \gamma \cos \omega} (c_3 x + c_2 y);$$

ferner gibt die Gleichung:

$$\sin \omega = \frac{z}{r \sin \gamma} \text{ den Werth: } \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} = -\frac{z \cos \gamma}{r \sin^2 \gamma \cos \omega} = -\frac{c_1 z}{Cr \sin^2 \gamma \cos \omega},$$

und mit dem obengefundenen

$$(\gamma, \varepsilon) = -\frac{1}{C \sin \gamma} = -(\varepsilon, \gamma)$$

folgt daraus

$$(\varepsilon, \lambda) = -\frac{1}{C^2 r \sin^3 \gamma \cos \omega} (c_3 x + c_2 y + c_1 z),$$

also mit Beachtung der Gleichung (r) in §. 55.

$$(\varepsilon, \lambda) = 0.$$

Endlich findet man noch mit Berücksichtigung der bereits bestimmten Combinationen für den Werth von (τ, λ) den Ausdruck:

$$(\tau,\lambda) = (\tau,\omega_x) + (\tau,a)\frac{\delta\lambda}{\delta a} + (\tau,r)\frac{\delta\lambda}{\delta r}$$

$$= (\tau,\omega_x) + (\tau,r)\frac{\delta\lambda}{\delta r} - 2a^2\frac{\delta\lambda}{\delta a}.$$

Man kommt übrigens leichter zum Ziel, wenn man τ als Function von a, C und r nimmt, wodurch man

$$(\tau,\lambda) = (a,\lambda)\frac{\delta\tau}{\delta a} + (C,\lambda)\frac{\delta\tau}{\delta C} + (r,\lambda)\frac{\delta\tau}{\delta r},$$

oder da $(a,\lambda) = 0$, $(C,\lambda) = 1$ ist,

$$(\tau,\lambda) = \frac{\delta\tau}{\delta C} + (r,\lambda)\frac{\delta\tau}{\delta r}$$

erhält; man hat aber auch

$$(r,\lambda) = (r,\omega_x)\frac{\delta\lambda}{\delta\omega} + (r,\gamma)\frac{\delta\omega}{\delta\gamma} + (r,a)\frac{\delta\lambda}{\delta a} + (r,C)\frac{\delta\lambda}{\delta C},$$

und wird leicht finden, daß

$(r,\omega_x) = 0$, $(r,a) = -\frac{2a^8}{g}\frac{dr}{dt}$, $(r,C) = 0$, $(r,\gamma) = 0$ wird,

daß also (τ,λ) auf

$$(\tau,\lambda) = \frac{\delta\tau}{\delta C} - \frac{2a^2}{g}\frac{dr}{dt}\frac{\delta\tau}{\delta r}\frac{\delta\lambda}{\delta a}$$

$$= \frac{\delta\tau}{\delta C} - \frac{2a^2}{g}\frac{\delta\lambda}{\delta a}$$

zurückkommt. Um dann die Werthe von $\frac{\delta\tau}{\delta C}$ und $\frac{\delta\lambda}{\delta a}$ zu bestimmen, muß man auf die Gleichungen:

$$t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{g}}(u - e\sin u), \quad \cos u = \frac{a-r}{ae},$$

$$ga(1-e^2) = C^2, \quad r[1 + e\cos(\omega - \lambda)] = a(1-e^2)$$

zurückgehen und gemäß der beiden mittlern u und e als Function von a und C betrachten. Man zieht daraus nach und nach

$$\frac{\partial e}{\partial C} = -\frac{C}{g a e} = -\sqrt{\frac{1-e^2}{g a e^2}} \; , \quad \frac{\partial e}{\partial a} = \frac{1-e^2}{2ae}$$

$$\frac{du}{dC} = \frac{a-r}{ae^2 \sin u}\,\frac{de}{dC} \; , \quad \frac{\partial \lambda}{\partial a} = \frac{\cos(\omega-\lambda)}{e \sin(\omega-\lambda)}\,\frac{de}{da} \; ,$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial C} = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{r(a-r)}{ae^2 \sin u} - \sin u\right)\frac{\partial e}{\partial C} = \frac{[a(1-e^2)-r]\sqrt{1-e^2}}{g e^3 \sin u} \; ,$$

$$= \frac{[a(1-e^2)-r]\,a\sqrt{1-e^2}}{g\, e^2 \sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}} \; ,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \frac{a(1-e^2)-r}{r e^2 \sin(\omega-\lambda)}\,\frac{1-e^2}{2ae} = \frac{[a(1-e^2)-r]\,a\sqrt{1-e^2}}{2a^2 e^2 \sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}} \; ,$$

und hat folglich

$$(\tau, \lambda) = 0 \; .$$

Nach diesen Ableitungen haben wir also folgende Werthe für die Combinationen, welche nicht Null sind, gefunden:

$$(a, \tau) = \frac{2a^2}{g} \; , \quad (C, \lambda) = 1 \; , \quad (\gamma, \varepsilon) = -\frac{1}{C \sin \gamma} \; ,$$

$$(\gamma, \lambda) = \frac{\cos \gamma}{C \sin \gamma} \; ,$$

und damit ergeben sich nun zufolge der allgemeinen Gleichungen am Ende des §. 57 folgende einfache Änderungsgesetze unserer sechs Elemente in Bezug auf die Zeit:

$$\left.\begin{aligned} & M\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{g}\,\frac{dV}{d\tau} \; , \quad M\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2a^2}{g}\,\frac{dV}{da} \; , \\ & M\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{dV}{dC} - \frac{\cos\gamma}{C \sin\gamma}\,\frac{dV}{d\gamma} \; , \\ & M\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\cos\gamma}{C \sin\gamma}\,\frac{dV}{d\lambda} - \frac{1}{C \sin\gamma}\,\frac{dV}{d\varepsilon} \\ & M\frac{dC}{dt} = \frac{dV}{d\lambda} \; , \quad M\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{C \sin\gamma}\,\frac{dV}{d\gamma} \; . \end{aligned}\right\} \quad (\xi)$$

Man könnte nun leicht statt der Constanten C die Excentricität e selbst einführen und überhaupt mehrere der vorhergehenden Elemente mit

andern vertauschen, welche den Zwecken der Astronomie besser entsprechen; das Vorhergehende genügt aber unserem Zwecke, die Art und Weise und die Möglichkeit der Auflösung unserer Aufgabe zu zeigen. Denn man wird nun leicht einsehen, daß für diese Auflösung nur noch die Forderung zu erfüllen bleibt, die theilweisen Aenderungsgesetze $\frac{dV}{da}$, $\frac{dV}{d\tau}$, u. s. f. in Function der Zeit und der Bahn=Elemente auszudrücken, und daß diese Forderung keine Schwierigkeit darbietet, wenn das Keppler'sche Problem gelöst ist, d. h. wenn die Coordinaten der verschiedenen Planeten durch die Zeit und die Bahn=Elemente derselben ausgedrückt sind. Durch Einführung dieser Werthe von x_i, y_i, z_i, und x_k, y_k, z_k geht die Function V_i, welche ursprünglich die allgemeine Form:

$$\underset{k=1,=i+1}{\overset{k=i-1,=n}{F}}(M_i, x_i, y_i, z_i, \quad M_k, x_k, y_k, z_k)$$

hatte, in eine Function

$$\underset{k=1,=i+1}{\overset{k=i-1,=n}{f}}(M_i, a_i, e_i, \gamma_i, \text{etc.}, \quad M_k, a_k, e_k, \gamma_k, \text{etc.}, t)$$

über, aus welcher die obigen Aenderungsgesetze: $\frac{dV_i}{da_i}$, $\frac{dV_i}{de_i}$, u. s. f. leicht abgeleitet werden können, um so mehr, als jene Werthe der Coordinaten in Reihenform dargestellt erscheinen, die Function V_i also ebenfalls eine nach t geordnete Reihe bilden wird.

§. 58.

Wenden wir uns nun zu den Gleichungen für die drehende Bewegung eines Planeten um seinen Schwerpunkt.

Wir haben in dem Vorhergehenden vorausgesetzt, daß wegen der großen Entfernungen der Planeten, verglichen mit ihrer eigenen Größe, die Mittelpunkte der zwischen ihnen stattfindenden Anziehungen mit den Mittelpunkten ihrer Massen zusammenfallend angenommen werden können; wäre dieß wirklich der Fall, so wären alle drehenden Wirkungen Null und die drehende Bewegung eines dieser Körper um seinen Schwerpunkt würde nach den in den §§. 191 u. ff. des zweiten Buches entwickelten Gesetzen stattfinden, insbesondere würde derselbe für den Fall, daß die anfängliche Drehungsachse eine Hauptachse war, sich immer

mit constanter Geschwindigkeit um diese Achse drehen und seine Drehungsachse sowohl im Körper selbst als im Raume eine unveränderliche Lage behalten. Diese Voraussetzung gewährt daher im jetzigen Falle nicht mehr die erforderliche Annäherung an die Wahrheit; wir können zwar noch für alle Massen M_h, welche wir als die anziehenden betrachten, den Mittelpunkt derselben als denjenigen annehmen, von welchem die Anziehung ausgeht, für die Masse M_i dagegen, deren drehende Bewegung untersucht werden soll, müssen die drehenden Wirkungen jener Anziehungen je nach ihrer Gestalt und Dichte strenger ausgedrückt werden.

Vernachlässigen wir daher die unwahrnehmbaren drehenden Wirkungen, welche von Körpern außerhalb des Systems auf den Körper M_i ausgeübt werden, und setzen wir demnach in den unserer jetzigen Untersuchung zu Grunde liegenden Gleichungen (59) in §. 33 die entsprechenden Momente $M_i^{(\xi)}$, $M_i^{(\eta)}$, $M_i^{(\zeta)}$ gleich Null, wodurch diese auf

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i \frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} &= (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\,\mathfrak{q}_i\mathfrak{r}_i + \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)} \\
\mathfrak{B}_i \frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} &= (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\,\mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i + \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)} \\
\mathfrak{C}_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} &= (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\,\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i + \sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)}
\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

zurückkommen, so wird es zunächst sich darum handeln, die drehenden Wirkungen $\sum_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)}$, u. s. f. unsern Voraussetzungen entsprechend, auszudrücken.

Bezeichnen wir dazu die Coordinaten eines Punktes der Masse M_i in Bezug auf ihre drei Hauptachsen im Mittelpunkte mit ξ_i, η_i, ζ_i, die des Mittelpunktes der Masse M_h in Bezug auf dieselben Achsen mit $\widehat{\xi}_h$, $\widehat{\eta}_h$, $\widehat{\zeta}_h$, und setzen

$$(\widehat{\xi}_h - \xi_i)^2 + (\widehat{\eta}_h - \eta_i)^2 + (\widehat{\zeta}_h - \zeta_i)^2 = \widehat{w}_\xi^{\,2},$$

so haben wir nach §. 121 u. f. des zweiten Buches und zufolge unserer ersten Voraussetzung in §. 53 für die Componenten der von der Masse M_h ausgeübten drehenden Wirkungen die Aenderungsgesetze:

21*

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^3\mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i}}{d\xi_i\, d\eta_i\, d\zeta_i} &= G\,M_h\,q_i\left(\eta_i\,\frac{\widehat{\zeta_h-\zeta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\zeta_i\,\frac{\widehat{\eta_h-\eta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),\\
\frac{d^3\mathfrak{J}^{(\eta)}_{h,i}}{d\xi_i\, d\eta_i\, d\zeta_i} &= G\,M_h\,q_i\left(\zeta_i\,\frac{\widehat{\xi_h-\xi_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\xi_i\,\frac{\widehat{\zeta_h-\zeta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),\\
\frac{d^3\mathfrak{J}^{(\zeta)}_{h,i}}{d\xi_i\, d\eta_i\, d\zeta_i} &= G\,M_h\,q_i\left(\xi_i\,\frac{\widehat{\eta_h-\eta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\eta_i\,\frac{\widehat{\xi_h-\xi_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),
\end{aligned}\right.$$

worin q_i die Dichte in dem Punkte $\xi_i\,\eta_i\,\zeta_i$ der Masse M_i vorstellt. Bezeichnen wir dann ferner mit Ξ und Ξ_0 die Grenzen der ξ_i in der Masse M_i, mit H und H_0, Z und Z_0 die entsprechenden Grenzen der η_i und ζ_i, so wird

$$b.)\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i} &= G\,M_h\int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i\int_{H_0}^{H} d\eta_i\int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i\,.\,q_i\left(\eta_i\,\frac{\widehat{\zeta_h-\zeta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\zeta_i\,\frac{\widehat{\eta_h-\eta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),\\
\mathfrak{J}^{(\eta)}_{h,i} &= G\,M_h\int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i\int_{H_0}^{H} d\eta_i\int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i\,.\,q_i\left(\zeta_i\,\frac{\widehat{\xi_h-\xi_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\xi_i\,\frac{\widehat{\zeta_h-\zeta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),\\
\mathfrak{J}^{(\zeta)}_{h,i} &= G\,M_h\int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i\int_{H_0}^{H} d\eta_i\int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i\,.\,q_i\left(\xi_i\,\frac{\widehat{\eta_h-\eta_i}}{\widehat{w_\xi}^3}-\eta_i\,\frac{\widehat{\xi_h-\xi_i}}{\widehat{w_\xi}^3}\right),
\end{aligned}\right.$$

und man bildet daraus leicht die Summen $\sum\limits_{h=1}^{h=n}.\,\mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i}$, u. s. f., für welche aber wieder zu beachten ist, daß darin nicht $h = i$ werden kann, daß sie also strenger durch $\sum\limits_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n}.\,\mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i}$, u. s. f. bezeichnet werden.

Beachtet man weiter, daß man hat

$$\frac{\widehat{\xi_h-\xi_i}}{\widehat{w_\xi}^3} = \frac{1}{\widehat{w_\xi}^2}\,\frac{d\,.\,\widehat{w_\xi}}{d\xi_i} = -\frac{1}{\widehat{w_\xi}^2}\,\frac{d\widehat{w_\xi}}{d\xi_h} = \frac{d\,.\,\frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\xi_i} = -\frac{d\,.\,\frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\xi_h}$$

u. s. f.,

und

$$\xi_i \frac{\widehat{\eta_h}-\eta_i}{\widehat{w_\xi}^3} - \eta_i \frac{\widehat{\xi_h}-\xi_i}{\widehat{w_\xi}^3} = \frac{\xi_i \widehat{\eta_h}-\eta_i \widehat{\xi_h}}{\widehat{w_\xi}^3} = \widehat{\xi_h} \frac{\widehat{\eta_h}-\eta_i}{\widehat{w_\xi}^3} - \widehat{\eta_h} \frac{\widehat{\xi_h}-\xi_i}{\widehat{w_\xi}^3},$$

so kann man den obigen Gleichungen (b) zuerst die Formen:

$$\mathfrak{D}^{(\xi)}_{h,i} = G M_h \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \, . \, q_i \left(\eta_i \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\zeta_i} - \zeta_i \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\eta_i} \right),$$

$$= G M_h \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \, . - q_i \left(\widehat{\eta_h} \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\widehat{\zeta_h}} - \widehat{\zeta_h} \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\widehat{\eta_h}} \right),$$

$$= - G M_h \widehat{\eta_h} \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \, . \, q_i \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\widehat{\zeta_h}}$$

$$+ G M_h \widehat{\zeta_h} \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \, . \, q_i \frac{d . \frac{1}{\widehat{w_\xi}}}{d\widehat{\eta_h}},$$

u. s. f.

geben; wenn man daher noch

$$G M_h \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \, . \, \frac{q_i}{\widehat{w_\xi}} = U_i$$

setzt, so erhält man für die Componenten der von der Masse M_h ausgehenden drehenden Wirkung die Werthe:

$$\alpha.)\quad \begin{cases} \mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i} = -\left(\widehat{\eta}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\zeta}_h} - \widehat{\zeta}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\eta}_h}\right)^{*)}, \\ \mathfrak{J}^{(\eta)}_{h,i} = -\left(\widehat{\zeta}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\xi}_h} - \widehat{\xi}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\zeta}_h}\right), \\ \mathfrak{J}^{(\zeta)}_{h,i} = -\left(\widehat{\xi}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\eta}_h} - \widehat{\eta}_h \dfrac{dU_i}{d\widehat{\xi}_h}\right); \end{cases}$$

daraus folgen die Ausdrücke für die Componenten der drehenden Gesammtwirkung aller Massen, wenn man den letzten Werthen die Summenzeichen $\sum\limits_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n}$. vorsetzt, und die Gleichungen für die drehende Bewegung der Masse M_i um ihren Mittelpunkt werden demnach folgende Form annehmen:

---

*) Unrichtig ist es aber, wenn Pontécoulant in seiner Théorie analytique du système du monde, tome I, pag. 187 die drehende Componente $\mathfrak{J}^{(\xi)}_{h,i}$ auch durch

$$\eta_i \frac{dU_i}{d\zeta_i} - \zeta_i \frac{dU_i}{d\eta_i}$$

ausdrückt, weil man offenbar den Ausdruck:

$$GM_h \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \,.\, q_i \left(\eta_i \frac{d.\frac{1}{\widehat{w}_\xi}}{d\zeta_i} - \zeta_i \frac{d.\frac{1}{\widehat{w}_\xi}}{d\eta_i} \right)$$

nicht durch

$$GM_h \eta_i \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \,.\, q_i \frac{d.\frac{1}{\widehat{w}_\xi}}{d\zeta_i} - GM_h \zeta_i \int_{\Xi_0}^{\Xi} d\xi_i \int_{H_0}^{H} d\eta_i \int_{Z_0}^{Z} d\zeta_i \,.\, q_i \frac{d.\frac{1}{\widehat{w}_\xi}}{d\eta_i}$$

ersetzen kann.

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i \frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} &= (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\mathfrak{q}_i\mathfrak{r}_i - \sum_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n} \left(\widehat{\eta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\zeta}_h} - \widehat{\zeta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\eta}_h}\right), \\
\mathfrak{B}_i \frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} &= (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i - \sum_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n} \left(\widehat{\zeta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\xi}_h} - \widehat{\xi}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\zeta}_h}\right), \\
\mathfrak{C}_i \frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} &= (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i - \sum_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n} \left(\widehat{\xi}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\eta}_h} - \widehat{\eta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\xi}_h}\right).
\end{aligned}\right\} \text{(d.}$$

Diese Gleichungen sind dann einerseits noch mit den Gleichungen (60) zu verbinden, um die Lage der Hauptachsen, oder der Achsen der ξ, η und ζ in Bezug auf die festen Achsen der x, y und z bestimmen zu können, und auf der andern Seite müssen auch die Coordinaten $\widehat{\xi}_h$, $\widehat{\eta}_h$ und $\widehat{\zeta}_h$ des Mittelpunktes der Masse M_h in Bezug auf jene Hauptachsen durch die Coordinaten $\mathfrak{x}'_h$, $\mathfrak{y}'_h$, $\mathfrak{z}'_h$ desselben Mittelpunktes in Bezug auf ein mit dem Mittelpunkt der Masse M_i parallel fortschreitendes Coordinatensystem ersetzt werden, da diese Coordinaten $\mathfrak{x}'_h$, $\mathfrak{y}'_h$, $\mathfrak{z}'_h$ oder $\mathfrak{x}_h - \mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_h - \mathfrak{y}_i$, $\mathfrak{z}_h - \mathfrak{z}_i$ durch die vorhergehende Untersuchung der fortschreitenden Bewegung der Mittelpunkte aller Körper des Systems als in Function der Zeit bekannt vorausgesetzt werden können und müssen, und die Function U_i, wenn die Integrationen ausgeführt gedacht werden, nur eine Function der Coordinaten ξ_h, η_h und ζ_h und der von der Zeit und der Lage der Masse M_i unabhängigen geometrischen Begrenzung dieses Körpers ist.

Dazu wollen wir wie in der vorhergehenden Untersuchung den Winkel ω, welchen die Projection der ζ-Achse in der Ebene der xy mit der Achse der x bildet, durch den Winkel $\omega_{,} = \omega + \frac{1}{2}\pi$ ersetzen, welcher von der x-Achse und der Durchschnittslinie der Ebene der $\xi\eta$ mit der festen Ebene, der xy gebildet wird; den Winkel ψ wollen wir dann bestimmt als denjenigen bezeichnen, welchen die Achse der η mit der genannten Durchschnittslinie einschließt, und der Winkel ϑ zwischen den Achsen der z und ζ wird auch das Maaß für die Neigung der Ebene der $\xi\eta$ gegen die xy-Ebene sein. Wir haben dann nach §. 23 des ersten Buches die Beziehungen:

e.)
$$\begin{cases} \widehat{\xi}_h = x'_h(\cos\psi \sin\omega, \cos\vartheta + \sin\psi \cos\omega,) \\ \qquad - y'_h(\cos\psi\cos\omega,\cos\vartheta - \sin\psi\sin\omega,) - z'_h \cos\psi \sin\vartheta\ , \\ \widehat{\eta}_h = - x'_h(\sin\psi\sin\omega,\cos\vartheta - \cos\psi\cos\omega,) \\ \qquad + y'_h(\sin\psi\cos\omega,\cos\vartheta + \cos\psi\sin\omega,) + z'_h \sin\psi\sin\vartheta\ , \\ \widehat{\zeta}_h = x'_h \sin\omega,\sin\vartheta - y_h'\cos\omega,\sin\vartheta + z'_h\cos\vartheta\ , \end{cases}$$

und folgern daraus die theilweisen Aenderungsgesetze:

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\xi}_h}{d\psi} = - x'_h(\sin\psi\sin\omega,\cos\vartheta - \cos\psi\cos\omega,) \\ \qquad + y'_h(\sin\psi\cos\omega,\cos\vartheta + \cos\psi\sin\omega,) + z'_h\sin\psi\sin\vartheta = \widehat{\eta}_h\ , \\ \frac{d\widehat{\eta}_h}{d\psi} = -\widehat{\xi}_h \quad , \qquad \frac{d\widehat{\zeta}_h}{d\psi} = 0\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\xi}_h}{d\vartheta} = - x'_h\cos\psi\sin\omega,\sin\vartheta + y'_h\cos\psi\cos\omega,\sin\vartheta - z'_h\cos\psi\cos\vartheta\ , \\ \quad = -\widehat{\zeta}_h\cos\psi\ , \\ \frac{d\widehat{\eta}_h}{d\vartheta} = \quad x'_h\sin\psi\sin\omega,\sin\vartheta - y'_h\sin\psi\cos\omega,\sin\vartheta - z'_h\sin\psi\cos\vartheta\ , \\ \quad = \widehat{\zeta}_h\sin\psi\ , \\ \frac{d\widehat{\zeta}_h}{d\vartheta} = \quad x'_h\sin\omega,\cos\vartheta - y'_h\cos\omega,\cos\vartheta - z'_h\sin\vartheta \\ \quad = \widehat{\xi}_h\cos\psi - \widehat{\eta}_h\sin\psi\ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\widehat{\xi}_h}{d\omega,} = \quad x'_h(\cos\psi\cos\omega,\cos\vartheta - \sin\psi\sin\omega,) \\ \qquad\qquad + y'_h(\cos\psi\sin\omega,\cos\vartheta + \sin\psi\cos\omega,)\ , \\ \quad = \widehat{\eta}_h\cos\vartheta - \widehat{\zeta}_h\sin\psi\sin\vartheta\ ; \\ \frac{d\widehat{\eta}_h}{d\omega,} = - x'_h(\sin\psi\cos\omega,\cos\vartheta + \cos\psi\sin\omega,) \\ \qquad\qquad - y'_h(\sin\psi\sin\omega,\cos\vartheta - \cos\psi\cos\omega,)\ , \\ \quad = -\widehat{\xi}_h\cos\vartheta - \widehat{\zeta}_h\cos\psi\sin\vartheta\ , \\ \frac{d\widehat{\zeta}_h}{d\omega,} = \quad x'_h\cos\omega,\sin\vartheta + y'_h\sin\omega,\sin\vartheta\ , \\ \quad = \widehat{\xi}_h\sin\vartheta\sin\psi + \widehat{\eta}_h\sin\vartheta\cos\psi\ . \end{cases}$$

Ferner bestehen zwischen den theilweisen Aenderungsgesetzen der Function U_i die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_i}{d\psi} &= \frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h}\,\frac{d\hat{\xi}_h}{d\psi} + \frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}\,\frac{d\hat{\eta}_h}{d\psi} + \frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h}\,\frac{d\hat{\zeta}_h}{d\psi} \\
\frac{dU_i}{d\vartheta} &= \frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h}\,\frac{d\hat{\xi}_h}{d\vartheta} + \frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}\,\frac{d\hat{\eta}_h}{d\vartheta} + \frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h}\,\frac{d\hat{\zeta}_h}{d\vartheta} \\
\frac{dU_i}{d\omega,} &= \frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h}\,\frac{d\hat{\xi}_h}{d\omega,} + \frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}\,\frac{d\hat{\eta}_h}{d\omega,} + \frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h}\,\frac{d\hat{\zeta}_h}{d\omega,}
\end{aligned}\right\},$$

und wenn in diese Gleichungen die vorstehenden Werthe für $\frac{d\hat{\xi}_h}{d\psi}$, $\frac{d\hat{\eta}_h}{d\psi}$, u. s. f. eingeführt werden, so findet man zuerst

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU_i}{d\psi} &= \hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h} - \hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}, \\
\frac{dU_i}{d\vartheta} &= \left(\hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h} - \hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}\right)\cos\psi + \left(\hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h} - \hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h}\right) \\
\frac{dU_i}{d\omega,} &= \left(\hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h} - \hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h}\right)\cos\vartheta + \left(\hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h} - \hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h}\right)\sin\vartheta\sin\psi \\
&\quad - \left(\hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h} - \hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h}\right)\sin\vartheta\cos\psi
\end{aligned}\right\},$$

und zieht dann daraus die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h} - \hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h} &= -\frac{dU_i}{d\psi} \\
\hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\xi}_h} - \hat{\xi}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h} &= -\frac{dU_i}{d\vartheta}\cos\psi + \left(\frac{dU_i}{d\omega,} - \frac{dU_i}{d\psi}\cos\vartheta\right)\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta} \\
\hat{\eta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\zeta}_h} - \hat{\zeta}_h\frac{dU_i}{d\hat{\eta}_h} &= -\frac{dU_i}{d\vartheta}\sin\psi + \left(\frac{dU_i}{d\omega,} - \frac{dU_i}{d\psi}\cos\vartheta\right)\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}
\end{aligned}\right\}. \quad (f.$$

Führt man endlich diese Werthe in die Gleichungen (d) ein und beachtet, daß

$$\sum_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n} \frac{d\,U_i}{d\psi} = \frac{d.\sum\limits_{h=1,=i+1}^{h=i-1,=n} . U_i}{d\psi} = \frac{d\,\mathfrak{U}}{d\psi}$$

u. s. f.

gesetzt werden kann, so haben wir mit Herbeiziehung der Gleichungen (60) für die drehende Bewegung der Masse M_i folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$\text{g.)}\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\dfrac{d\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\mathfrak{q}\,\mathfrak{r} + \dfrac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\sin\psi - \left(\dfrac{d\mathfrak{U}}{d\omega_{,}} - \dfrac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\cos\vartheta\right)\dfrac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, \\[2ex] \mathfrak{B}\dfrac{d\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{p}\,\mathfrak{r} + \dfrac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\cos\psi + \left(\dfrac{d\mathfrak{U}}{d\omega_{,}} - \dfrac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\cos\vartheta\right)\dfrac{\sin\psi}{\sin\vartheta}, \\[2ex] \mathfrak{C}\dfrac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} + \dfrac{d\mathfrak{U}}{d\psi}. \end{cases}$$

und

$$\text{h.)}\quad \begin{cases} \mathfrak{p} = -\dfrac{d\omega_{,}}{dt}\cos\psi\sin\vartheta + \dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\psi, \\[2ex] \mathfrak{q} = \dfrac{d\omega_{,}}{dt}\sin\psi\sin\vartheta + \dfrac{d\vartheta}{dt}\cos\psi, \\[2ex] \mathfrak{r} = \dfrac{d\omega_{,}}{dt}\cos\vartheta + \dfrac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

in welchen man den Index i weggelassen hat, in denen aber nicht zu übersehen ist, daß sie in der Function $\mathfrak{U}$ auch noch die von der Zeit abhängigen Veränderlichen $\mathfrak{x}'_h$, $\mathfrak{y}'_h$, $\mathfrak{z}'_h$ enthalten.

§. 59.

Aus den vorstehenden Gleichungen (g) und (h) kann wieder durch ihre Verbindung ein Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft der drehenden Bewegung gefunden werden, welcher aber im jetzigen Falle nicht unter vollständig integrirbarer Form erscheint. Multiplicirt man nämlich die Gleichungen (g) der Reihe nach mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, und nimmt ihre Summe, so findet man mit der Beachtung, daß sich aus den Gleichungen (h) auch die Beziehungen:

$$\mathfrak{p} \sin\psi + \mathfrak{q} \cos\psi = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$(\mathfrak{p} \cos\psi - \mathfrak{q} \sin\psi) \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \mathfrak{r} = \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{-\mathfrak{p} \cos\psi + \mathfrak{q} \sin\psi}{\sin\vartheta} = \frac{d\omega}{dt},$$

ergeben, den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{C}\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt},$$

dessen linke Seite ein vollständiges Aenderungsgesetz und zwar nach §. 191 des zweiten Buches das der lebendigen Kraft der Masse M_i in Bezug auf ihren Mittelpunkt vorstellt, die rechte Seite dagegen ist zufolge der Bemerkung am Ende des vorhergehenden Paragraphen der Form nach nur ein theilweises Aenderungsgesetz. Man kann deßhalb dem Integral der vorstehenden Gleichung nur die Form geben:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}^2 = h + 2\int_0^t dt.\left(\frac{d\mathfrak{U}}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}\right),$$

worin wie in dem genannten §. die Constante h den anfänglichen Werth der lebendigen Kraft oder den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{p}_0^2 + \mathfrak{B}\mathfrak{q}_0^2 + \mathfrak{C}\mathfrak{r}_0^2$$

ersetzt, und es leuchtet ein, daß dieselbe zur Fortsetzung unserer Untersuchung durchaus unbrauchbar ist. Es bleibt daher auch hier wieder kein anderer Weg übrig als der der Annäherung, welcher auch im jetzigen Falle durch die bei den Planeten stattfindenden Verhältnisse wesentlich erleichtert wird.

Diese Himmelskörper und insbesondere die Erde, deren drehende Bewegung zu kennen dem Astronomen von höchster Wichtigkeit ist, sind nahezu kugelförmige Körper, in welchen der Mittelpunkt der von einem weit entfernten materiellen Punkte ausgehenden Anziehung sehr nahe am Mittelpunkte der Masse liegt, für welche also die Function U_i nur einen von der Function:

$$G M_i M_h \frac{1}{\sqrt{\widehat{\xi}_h^2 + \widehat{\eta}_h^2 + \widehat{\zeta}_h^2}}$$

sehr wenig verschiedenen Werth hat, für welche daher die drehenden Kräfte

$$\widehat{\eta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\zeta}_h} - \widehat{\zeta}_h \frac{dU_i}{d\widehat{\eta}_h}, \quad \text{u. s. f.}$$

selbst für $M_h = M$ sehr klein werden. Für eine erste Annäherung kann man demnach die von von der Function U abhängigen Glieder in den Gleichungen (g) vernachlässigen, und diese auf

$$\text{i.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{A} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} - (\mathfrak{B} - \mathfrak{C})\, \mathfrak{q}\mathfrak{r} = 0, \\ \mathfrak{B} \frac{d\mathfrak{q}}{dt} - (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})\, \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0, \\ \mathfrak{C} \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\, \mathfrak{p}\mathfrak{q} = 0, \end{cases}$$

zurückführen; unter dieser Form enthalten sie die in den §§. 191 bis 198 abgeleiteten Gesetze der drehenden Bewegung eines festen Systems um einen festen Punkt unter der Voraussetzung, daß keine drehenden Kräfte an demselben vorhanden sind. Dazu kommt noch, daß die Planeten mit sehr großer Annäherung als Umdrehungskörper betrachtet werden können, daß das Massemoment $\mathfrak{C}$ in Bezug auf die geometrische Achse das größte der drei Haupt-Massemomente ist, und die beiden andern derselben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sehr nahe gleich sind; endlich, daß die augenblickliche Drehungsachse nur sehr wenig gegen die geometrische Achse geneigt ist, und daß sie daher gegen diese nach dem in §. 198, Buch II. gegebenen Beweise immer unter einem kleinen Winkel geneigt bleibt und die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ immer sehr kleine Werthe behalten. Man kann daher hier wie bei der Untersuchung der fortschreitenden Bewegung verfahren, nämlich die Gesetze der drehenden Bewegung für kleine Zeiträume durch die aus den Gleichungen (i) sich ergebenden Integrale ausdrücken und dann die aus der Function U entspringenden Aenderungen oder Correctionen suchen, welche an den jenen Integralen zu Grunde liegenden constanten Größen oder anfänglichen Werthen angebracht werden müssen, damit die aus den Gleichungen (i) sich ergebenden Bewegungsgesetze, die Lage der augenblicklichen Drehungsachse,

u. s. f., in jedem Augenblicke mit der wirklichen Bewegung des betreffenden Planeten übereinstimmen.

Wir haben in den genannten §. des zweiten Buches aus den Gleichungen (i) folgende Ergebnisse gezogen:

$$\left.\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h \\ A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 &= k^2 \\ Apa + Bqa' + Cra'' &= k\cos l, = c_3 \\ Apb + Bqb' + Crb'' &= k\cos m, = c_2 \\ Apc + Bqc' + Crc'' &= k\cos n, = c_1 \end{aligned}\right\} \quad (k.$$

und man wird sich leicht aus der dort angegebenen Bedeutung der Constanten k und der Winkel $l,$, $m,$ und $n,$, namentlich wenn man die Erörterungen der §§. 16 und 17 des gegenwärtigen Buches zu Hülfe nimmt, überzeugen, daß den Constanten c_1, c_2, c_3 und k oder C, welche unter sich durch die Gleichung:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = k^2 = C^2 \quad (l.$$

in Verbindung stehen, ganz ähnliche Bedeutungen unterlegt werden können, wie in der vorhergehenden Untersuchung. In der letztern waren die Verhältnisse: $\frac{c_3}{C}$, $\frac{c_2}{C}$, $\frac{c_1}{C}$ die Cosinus der Winkel, welche die Normale zur Ebene der Bahn mit den festen Coordinaten-Achsen bildete, im jetzigen Falle stellen sie die Cosinus der Winkel vor, welche die Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen oder die Normale zu der unveränderlichen Ebene der größten Flächensumme mit den Coordinaten-Achsen einschließt. Wir können daher wie dort die Lage dieser Ebene durch die Winkel γ und ε bestimmen, von welchen der erste von der genannten Ebene mit der Ebene der xy, der andere von dem Durchschnitt dieser Ebenen und der x-Achse gebildet wird, und für welche man wie dort die Beziehungen hat:

$$tang\,\gamma = \frac{\sqrt{c_2^2 + c_3^2}}{c_1}\,; \quad tang\,\varepsilon = -\frac{c_3}{c_2}\,. \quad (m.$$

Mit diesen Beziehungen, welche die vier Elemente h, k, γ und ε der drehenden Bewegung bestimmen, sind aber noch die Integrale der Gleichungen (h) und (l) in §. 195 des zweiten Buches zu verbinden, nämlich:

(n.)

$$t-\tau=\int_{\mathfrak{r},}^{\mathfrak{r}} d\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{\sqrt{\mathfrak{B}h-k^2+\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\mathfrak{r}^2}\sqrt{k^2-\mathfrak{A}h-\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{r}^2}},$$

$$\omega_,-\lambda=\int_{\mathfrak{r},}^{\mathfrak{r}} d\mathfrak{r}\frac{k(h-\mathfrak{C}\mathfrak{r}^2)\mathfrak{C}\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}{(k^2-\mathfrak{C}^2\mathfrak{r}^2)\sqrt{\mathfrak{B}h-k^2+\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\mathfrak{r}^2}\sqrt{k^2-\mathfrak{A}h-\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\mathfrak{r}^2}},$$

worin wieder die Constanten τ und λ ähnliche Bedeutungen haben, wie in der Untersuchung der fortschreitenden Bewegung, und $\mathfrak{r}_,$ den der Zeit τ entsprechenden Werth der Veränderlichen $\mathfrak{r}$ bezeichnet.

Wir haben demnach für die drehende Bewegung eines Planeten um den Mittelpunkt seiner Masse sechs ganz ähnliche Elemente, wie für die fortschreitende seines Mittelpunktes, mit der einzigen Ausnahme, daß hier die halbe Achse a der Bahn durch die lebendige Kraft h ersetzt ist, und wir werden die Aenderungsgesetze dieser Elemente in Bezug auf die Zeit auch auf ähnlichem Wege erhalten, wie im vorhergehenden Falle.

Denken wir uns nämlich die sechs Elemente h, k, γ, ε, λ, τ für das Ende der Zeit t mittels der als beobachtet angenommenen Größen $\omega_,$, ϑ, ψ, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ bestimmt, und bezeichnen die Werthe dieser Veränderlichen für die folgende Zeit unter der Voraussetzung, daß die drehenden Wirkungen der Function U Null, jene Elemente also wirklich unveränderlich wären, mit $\widehat{\omega_,}$, $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\psi}$, $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$, so hat man für das Ende der Zeit t

o.) $\omega_,=\widehat{\omega_,}$, $\vartheta=\widehat{\vartheta}$, $\psi=\widehat{\psi}$, $\mathfrak{p}=\widehat{\mathfrak{p}}$, u. s. f.

und daher sowohl

$$h=f_1(\widehat{\omega_,}, \widehat{\vartheta}, \widehat{\psi}, \widehat{\mathfrak{p}}, \widehat{\mathfrak{q}}, \widehat{\mathfrak{r}}, t)$$

als

$$h=f_1(\omega_,, \vartheta, \psi, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}, t),$$

folglich auch

$$\frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\omega},} = \frac{\delta f_1}{\delta \omega,}\,, \quad \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\psi}} = \frac{\delta f_1}{\delta \psi}\,, \quad \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\mathfrak{p}}} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{p}}\,, \text{ u. s. f.}$$

In Bezug auf die Zeit t hat man aber im ersten Falle für das Element h das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dh}{dt} = 0 = \frac{df_1}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\omega},}\frac{d\widehat{\omega}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\psi}}\frac{d\widehat{\psi}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\vartheta}}\frac{d\widehat{\vartheta}}{dt}$$
$$+ \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\mathfrak{p}}}\frac{d\widehat{\mathfrak{p}}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\mathfrak{q}}}\frac{d\widehat{\mathfrak{q}}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \widehat{\mathfrak{r}}}\frac{d\widehat{\mathfrak{r}}}{dt},$$

während es im zweiten nicht mehr Null wird und die Form:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{df_1}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \omega,}\frac{d\omega}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt}$$
$$+ \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{p}}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{q}}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{r}}\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$$

erhält, welche durch den ersten Werth und die Bedingungen (o) auf

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{p}}\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{p}}}{dt}\right) + \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{q}}\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{q}}}{dt}\right) + \frac{\delta f_1}{\delta \mathfrak{r}}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{r}}}{dt}\right)$$

zurückkommt. Ersetzt man dann in den Gleichungen (i) unserer jetzigen Bezeichnung gemäß $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ durch $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$ und zieht sie von den Gleichungen (g) ab, so findet man

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}\left(\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{p}}}{dt}\right) &= \frac{dU}{d\vartheta}\sin\psi - \left(\frac{dU}{d\omega,} - \frac{dU}{d\psi}\cos\vartheta\right)\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta} \\
\mathfrak{B}\left(\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{q}}}{dt}\right) &= \frac{dU}{d\vartheta}\cos\psi + \left(\frac{dU}{d\omega,} - \frac{dU}{d\psi}\cos\vartheta\right)\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta} \\
\mathfrak{C}\left(\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \frac{d\widehat{\mathfrak{r}}}{dt}\right) &= \frac{dU}{d\psi}
\end{aligned}\right\}\text{(p.}$$

und kann damit dem vorhergehenden Ausdruck für $\frac{dh}{dt}$ die Form geben:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\left(\frac{dU}{d\vartheta}\sin\psi - \frac{dU}{d\omega}\,\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta} + \frac{dU}{d\psi}\,\frac{\cos\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)\\ &+ \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\left(\frac{dU}{d\vartheta}\cos\psi + \frac{dU}{d\omega}\,\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta} - \frac{dU}{d\psi}\,\frac{\sin\psi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right) + \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{C}r}\,\frac{dU}{d\psi}\end{aligned}\right.$$

oder

(q.)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dh}{dt} &= \frac{dU}{d\vartheta}\left(\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\sin\psi + \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\cos\psi\right) - \frac{dU}{d\omega}\left(\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\sin\psi\right)\frac{1}{\sin\vartheta}\\ &+ \frac{dU}{d\psi}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\sin\psi\right)\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} + \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{C}r}\right].\end{aligned}\right.$$

Um dann diese Form zu vereinfachen, und auf die Form der Gleichungen (λ) in §. 57 zu bringen, kann man

$$\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\sin\psi + \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\cos\psi = \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}},\quad \left(\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\sin\psi\right) = -\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\sin\vartheta$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p}\cos\psi - \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q}\sin\psi\right)\cos\vartheta + \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{C}r}\sin\vartheta = \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}\sin\vartheta$$

setzen, und daraus unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ nur mit $\mathfrak{A}p$, $\mathfrak{B}q$, $\mathfrak{C}r$ veränderlich sein sollen, die Werthe ziehen:

$$\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p} = \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\sin\psi + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\sin\vartheta\cos\psi,\quad \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q} = \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\cos\psi + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\sin\vartheta\sin\psi$$

$$\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{C}r} = \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\cos\vartheta + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}.$$

Vergleicht man diese mit den Beziehungen:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{A}p} &= \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial.\mathfrak{A}p} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\,\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial.\mathfrak{A}p} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}\,\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial.\mathfrak{A}p},\\ \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{B}q} &= \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial.\mathfrak{B}q} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\,\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial.\mathfrak{B}q} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}\,\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial.\mathfrak{B}q},\\ \frac{\partial h}{\partial.\mathfrak{C}r} &= \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\,\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial.\mathfrak{C}r} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\,\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial.\mathfrak{C}r} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}\,\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial.\mathfrak{C}r},\end{aligned}\right.$$

so findet man zuerst die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}=\sin\psi\ , \quad \frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}=\cos\psi\ , \quad \frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}=0 \\ \frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}=-\sin\vartheta\cos\psi\,, \quad \frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}=\sin\vartheta\sin\psi\,, \quad \frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}=\cos\vartheta \\ \frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}=0\ , \quad \frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}=0\ , \quad \frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}=1\ ;\end{array}\right\}\ (\text{u.}$$

und da auch in Bezug auf eine Veränderliche φ, von welcher $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$ willkürliche Functionen vorstellen, die vollständigen Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta\psi}=\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}\,\frac{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{\delta\varphi}+\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}\,\frac{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\delta\varphi}+\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}\,\frac{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{\delta\varphi}\,,$$

u. s. f.

bestehen, welche mit den vorhergehenden Gleichungen, die Formen:

$$\frac{\delta \mathfrak{u}}{\delta\varphi}=\frac{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{\delta\varphi}\sin\psi+\frac{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\delta\psi}\cos\psi\ , \quad \frac{\delta \mathfrak{w}}{\delta\varphi}=\frac{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{\delta\varphi}\,,$$

$$\frac{\delta \mathfrak{v}}{\delta\varphi}=-\frac{\delta.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{\delta\varphi}\sin\vartheta\cos\psi+\frac{\delta.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{\delta\varphi}\sin\vartheta\sin\psi+\frac{\delta.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{\delta\varphi}\cos\vartheta$$

annehmen, so findet man durch Integration und unter der Voraussetzung, daß die $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ mit den $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$ Null werden, die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{u}=\mathfrak{A}\mathfrak{p}\sin\psi+\mathfrak{B}\mathfrak{q}\cos\psi. \\ \mathfrak{v}=\mathfrak{C}\mathfrak{r}\cos\vartheta-(\mathfrak{A}\mathfrak{p}\cos\psi-\mathfrak{B}\mathfrak{q}\sin\psi)\sin\vartheta \\ \mathfrak{w}=\mathfrak{C}\mathfrak{r}\end{array}\right\},\ (\text{v.}$$

welche zwischen den genannten Veränderlichen statthaben müssen, um dem obigen Ausdruck (q) und den entsprechenden für k, γ, u. s. f., die gewünschte Form:

$$\text{w.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\,\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega_,}\,\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\,\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}},\\
\frac{dk}{dt} &= \frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{u}} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\omega_,}\,\frac{dh}{d\mathfrak{v}} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\psi}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{w}},\\
&\text{u. s. f.}
\end{aligned}\right.$$

geben zu können.

Setzt man ferner wieder für $\frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta}$, $\frac{d\mathfrak{U}}{d\omega_,}$ und $\frac{d\mathfrak{U}}{d\psi}$ die Werthe

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\vartheta} = \frac{d\mathfrak{U}}{dh}\,\frac{\partial h}{\partial\vartheta} + \frac{d\mathfrak{U}}{dk}\,\frac{\partial k}{\partial\vartheta} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma}\,\frac{\partial\gamma}{\partial\vartheta} + \text{etc.}$$

u. s. f.,

und beachtet, daß die Function $\mathfrak{U}$ nur die Winkel $\omega_,$, ϑ, ψ enthält, und die Veränderlichen $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sich nur mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ändern, daß man also hat

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{u}} = 0 = \frac{d\mathfrak{U}}{dh}\,\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}} + \frac{d\mathfrak{U}}{dk}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{u}} + \frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma}\,\frac{\partial\gamma}{\partial\mathfrak{u}} + \text{etc.},$$

u. s. f.

so kann man den vorhergehenden Werthen (w) für $\frac{dh}{dt}$, $\frac{dk}{dt}$, u. s. f. wieder die Form:

$$\frac{dh}{dt} = (h,k)\frac{d\mathfrak{U}}{dk} + (h,\gamma)\frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma} + (h,\varepsilon)\frac{d\mathfrak{U}}{d\varepsilon} + (h,\lambda)\frac{d\mathfrak{U}}{d\lambda} + (h,\tau)\frac{d\mathfrak{U}}{d\tau},$$

$$\frac{dk}{dt} = (k,h)\frac{d\mathfrak{U}}{dh} + (k,\gamma)\frac{d\mathfrak{U}}{d\gamma} + (k,\varepsilon)\frac{d\mathfrak{U}}{d\varepsilon} + (k,\lambda)\frac{d\mathfrak{U}}{d\lambda} + (k,\tau)\frac{d\mathfrak{U}}{d\tau},$$

u. s. f.

geben, worin nun (h,k) den Ausdruck:

$$\frac{\partial h}{\partial\mathfrak{u}}\,\frac{\partial k}{\partial\vartheta} - \frac{\partial h}{\partial\vartheta}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{u}} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{v}}\,\frac{\partial k}{\partial\omega_,} - \frac{\partial h}{\partial\omega_,}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{v}} + \frac{\partial h}{\partial\mathfrak{w}}\,\frac{\partial k}{\partial\psi} - \frac{\partial h}{\partial\psi}\,\frac{\partial k}{\partial\mathfrak{w}}$$

und jede der übrigen eingeklammerten Größen einen ähnlichen vorstellt, und es sind dann wieder fünfzehn Combinationen (h,k), (h,γ), (h,ε), u. s. f. zu berechnen.

Was zuerst diejenigen Combinationen betrifft, welche λ und τ nicht enthalten, so wird man die darin vorkommenden Größen als Functionen von c_1, c_2, c_3 betrachten, also

$$(h, k) = (h, c_1)\frac{\partial k}{\partial c_1} + (h, c_2)\frac{\partial k}{\partial c_2} + (h, c_3)\frac{\partial k}{\partial c_3},$$
u. s. f.

setzen. Zieht man dann aus den Gleichungen (v) die Werthe von $\mathfrak{A}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{q}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{r}$ in Function von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}\mathfrak{p} &= \mathfrak{u}\sin\psi - (\mathfrak{v} - \mathfrak{w}\cos\vartheta)\frac{\cos\psi}{\sin\vartheta}, \\ \mathfrak{B}\mathfrak{q} &= \mathfrak{u}\cos\psi + (\mathfrak{v} - \mathfrak{w}\cos\vartheta)\frac{\sin\psi}{\sin\vartheta}, \\ \mathfrak{C}\mathfrak{r} &= \mathfrak{w}, \end{aligned}\right\} \quad (x.$$

und führt sie in die Ausdrücke für die Constanten c_1, c_2, c_3 ein, so findet man mit Beachtung der Werthe der Cosinus a, a', a'', etc. in §. 23 des ersten Buches die neuen Werthe in Function von $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \mathfrak{v}, \\ c_2 &= \mathfrak{u}\cos\omega_1 + (\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\cos\vartheta)\frac{\sin\omega_1}{\sin\vartheta}, \\ c_3 &= -\mathfrak{u}\sin\omega_1 + (\mathfrak{w} - \mathfrak{v}\cos\vartheta)\frac{\cos\omega_1}{\sin\vartheta}, \end{aligned}\right\} \quad (y.$$

und schließt daraus

$$(h, c_1) = -\frac{\partial h}{\partial \omega_1}\frac{\partial c_1}{\partial \mathfrak{v}} = 0,$$

weil h nur eine Function von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ ist, und die Werthe (x) dieser Veränderlichen den Winkel ω_1 nicht erhalten, also $\frac{\partial h}{\partial \omega_1}$ Null ist. Weniger einfach ergeben sich die Combinationen

$$(h, c_2) = 0 \quad , \quad (h, c_3) = 0;$$

sie folgen jedoch schon aus den vorhergehenden durch Analogie, und aus ihnen ergeben sich unmittelbar die Werthe:

$$(h, k) = 0 \quad , \quad (h, \gamma) = 0 \quad , \quad (h, \varepsilon) = 0 \, .$$

Die vorhergehenden Werthe (y) von c_1, c_2, c_3 geben ferner

$$(c_1, c_2) = -\frac{\partial c_2}{\partial \omega_{\prime}} = -c_3 \quad , \quad (c_1, c_3) = -\frac{\partial c_3}{\partial \omega_{\prime}} = c_2 \, ,$$

$$(c_2, c_3) = \frac{\partial c_2}{\partial \mathfrak{u}}\frac{\partial c_3}{\partial \vartheta} - \frac{\partial c_2}{\partial \vartheta}\frac{\partial c_3}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial c_2}{\partial \mathfrak{v}}\frac{\partial c_3}{\partial \omega_{\prime}} - \frac{\partial c_2}{\partial \omega_{\prime}}\frac{\partial c_3}{\partial \mathfrak{v}} = c_1 \, ,$$

und da sowohl k als γ Functionen von c_1, c_2 und c_3 sind, ε aber nur von c_2 und c_3, so hat man einmal

$$(k, \gamma) = (k, c_1)\frac{\partial \gamma}{\partial c_1} + (k, c_2)\frac{\partial \gamma}{\partial c_2} + (k, c_3)\frac{\partial \gamma}{\partial c_3}$$

$$(k, \varepsilon) = (k, c_2)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_2} + (k, c_3)\frac{\partial \varepsilon}{\partial c_3} \; ;$$

ferner findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (1) und der vorstehenden Werthe von (c_1, c_2) und (c_1, c_3)

$$(k, c_1) = (c_2, c_1)\frac{\partial k}{\partial c_2} + (c_3, c_1)\frac{\partial k}{\partial c_3} = (c_2, c_1)\frac{c_2}{k} + (c_3, c_1)\frac{c_3}{k} = 0;$$

ebenso ist leicht zu sehen, daß man auch hat

$$(k, c_2) = 0 \quad , \quad (k, c_3) = 0 \, ,$$

und folglich

$$(k, \gamma) = 0 \quad , \quad (k, \varepsilon) = 0 \, .$$

Die Gleichung:

$$\cos \gamma = \frac{c_1}{k}$$

macht den Winkel γ wie früher von c_1 und k abhängig, und man erhält daher auf gleiche Weise wie in §. 58 den Werth:

$$(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{k \sin \gamma} \, .$$

Ebenso wird man durch dasselbe Verfahren, wie bei der fortschreitenden Bewegung die Werthe der Combinationen (h, τ), (k, τ), u. s. f., (h, λ), (k, λ), u. s. f., bestimmen, nachdem man in die Integrale (n) die Veränderliche $\mathfrak{w}$ für $\mathfrak{C}\tau$ eingeführt hat, und sich dieselben unter der Form:

$$t - \tau = f_1(h, k, \mathfrak{w}) \quad , \quad \omega - \gamma = f_2(h, k, \mathfrak{w})$$

ausgeführt denkt. Ich muß mich jedoch darauf beschränken, zu bemerken, daß die Ergebnisse mit Ausnahme der Combination (h, τ), welche der frühern (a, τ) entspricht und für welche man den einfachen Werth: $(h, \tau) = \varepsilon$ finden wird, ganz dieselben sind, wie früher. Man hat nämlich

$$(k, \lambda) = 1 \ , \ (\gamma, \lambda) = \frac{\cos\gamma}{k \sin\gamma} \ , \ (\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{k \sin\gamma}$$

und alle übrigen Combinationen sind Null.

Die Gleichungen zur Bestimmung der Aenderung der sechs Elemente der drehenden Bewegung sind demnach folgende sechs:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \varepsilon \frac{dU}{d\tau} \ , \quad \frac{d\tau}{dt} = -\varepsilon \frac{dU}{dh} \ , \\
\frac{dk}{dt} &= \frac{dU}{d\lambda} \ , \quad \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{1}{k \sin\gamma} \frac{dU}{d\gamma} \ , \\
\frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{dU}{dk} - \frac{\cos\gamma}{k \sin\gamma} \frac{dU}{d\gamma} \ , \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \frac{\cos\gamma}{k \sin\gamma} \frac{dU}{d\lambda} + \frac{1}{k \sin\gamma} \frac{dU}{d\varepsilon} \ ,
\end{aligned}\right\} \quad (z.$$

welche mit den Gleichungen (ξ) in §. 58 der äußern Form nach völlig übereinstimmen; die Function U selbst ist indessen von der Function V in ihrer Form wesentlich verschieden und verlangt daher für die Anwendung der vorhergehenden Gleichungen eine ganz andere Behandlung, als es für die zuletzt genannten Gleichungen der Fall ist.

Die Erde und der Mond sind übrigens die beiden einzigen Körper unsers Sonnensystems, für welche die Anwendung der vorhergehenden Gleichungen für uns von Interesse ist und sein kann, weil es einerseits der Beobachtung bis jetzt nicht möglich war, hinsichtlich der drehenden Bewegung der übrigen Planeten und selbst der Sonne solche

Gegebene zu liefern, welche eine Anwendung der vorhergehenden Theorie möglich machen, da diese immer von einem anfänglichen Zustande der Bewegung abhängig ist, und weil anderseits die Theorie zwecklos bleibt, wenn sie nicht mit Ergebnissen der Beobachtung verglichen werden kann. Für die beiden genannten Körper, die Erde und den Mond genügt es übrigens, außer ihrer gegenseitigen Wirkung noch die der Sonne in Rechnung zu nehmen, so daß in diesem Falle das System auf drei Körper beschränkt ist, welche aber durch ihre gegenseitigen Wirkungen in Folge ihrer Massen und gegenseitigen Stellungen und selbst ihrer Gestalt eine Reihe höchst wichtiger Erscheinungen in den drehenden Bewegungen der Erde und des Mondes hervorrufen, welche unter den Namen: Präcession der Nachtgleichen, Nutation der Erdachse, Aenderung der Schiefe der Ekliptik, Librationen des Mondes, u. s. f., seit längerer oder kürzerer Zeit durch die Beobachtung festgestellt worden sind. Eine vollständige Entwickelung der Gesetze dieser sogenannten Störungen in der drehenden Bewegung der Erde und des Mondes, sowie der Störungen in den elliptischen Bewegungen der ältern Planeten um die Sonne gibt das obengenannte Werk von Pontecoulant nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft und der Beobachtungen.

Drittes Kapitel.

Beispiele stetiger veränderlicher Systeme. Gleichgewicht und Bewegung vollkommen biegsamer und elastischer Körper.

§. 61.

Alle festen Stoffe sind mehr oder weniger elastisch, d. h. sie besitzen bald in niederem, bald in höherem Grade die Eigenschaft, Veränderungen ihrer Gestalt, welche durch äußere Kräfte hervorgerufen wurden, wieder aufzuheben und ihre ursprüngliche Gestalt wieder herzustellen, wenn jene äußern Kräfte zu wirken aufhören. Bei vielen derselben ist aber diese Fähigkeit in sehr enge Grenzen eingeschlossen; indem sie nur sehr kleine Aenderungen ihrer Gestalt wieder ganz ausgleichen, oder größere nur sehr wenig vermindern und daher leicht bleibende Aenderungen annehmen; solche Stoffe nennt man deßhalb auch oft unelastische. Bei andern ist jene Fähigkeit in sehr hohem Grade vorhanden; sie vermögen noch sehr weit gehende Veränderungen ihrer Gestalt wieder vollkommen auszugleichen und heißen deßhalb vorzugsweise elastische Stoffe. Es ist dabei aber nicht zu übersehen, daß diese äußerliche Beurtheilung des höhern oder niedern Grades der Elasticität wesentlich von der ursprünglichen Gestalt eines Körpers abhängt, da die eine Form bei gleicher Aenderung der innern relativen Lage der einzelnen Stofftheilchen viel weiter gehende Aenderungen gestattet als eine andere.

Vollkommen elastisch im Sinne der in der Einleitung gegebenen Erklärung ist kein fester Stoff, d. h. es besitzt keiner die Fähigkeit auch nur kleine Aenderungen der Gestalt mit derselben Intensität der Bewegung, mit derselben lebendigen Kraft wieder auszugleichen, mit welcher jene Aenderungen durch die äußern Kräfte erzeugt wurden. Ebenso wenig gibt es einen vollkommen unelastischen Körper; man kann sich aber den gänzlichen Mangel an Elasticität und die vollkommene Elasticität als die beiden Grenzen denken, zwischen welchen sich die verschiedenen Stoffe je nach dem höhern oder niedern Grade ihrer Elasticität einreihen lassen; die besonders elastischen Körper werden sich der Grenze der vollkommenen Elasticität um so mehr nähern, je

kleiner die in ihrem Innern vor sich gehenden Aenderungen in der gegenseitigen Lage ihrer materiellen Punkte sind, und umgekehrt werden die wenig elastischen Stoffe um so mehr dem gänzlichen Mangel an Elasticität nahe kommen, je heftiger die Wirkungen sind, welche die Formänderung veranlassen, vorausgesetzt jedoch, daß diese Formänderung nicht in eine gänzliche Theilung des Körpers übergeht. Und wie man bei den ersten Anwendungen der Mechanik auf die Erscheinungen der Schwere die Ausdehnung der untersuchten Bewegung so beschränkt, daß man ohne fühlbaren Fehler die Gewichte als parallele und constante Kräfte annehmen kann, so kann man auch im jetzigen Falle für die erste und einfachste Anwendung unserer allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgesetze stetiger veränderlicher Systeme auf die als veränderlich betrachteten Stoffe der festen Aggregatform die Untersuchung auf solche Formänderungen beschränken, für welche die Stoffe ohne merklichen Fehler entweder als sehr nahe vollkommen elastisch oder als vollkommen unelastisch angenommen werden dürfen. Im gegenwärtigen Kapitel werde ich mich jedoch ausschlüßlich auf die erstere Klasse von Erscheinungen beschränken und entweder die betreffenden Körper aus Stoffen bestehend voraussetzen, welche wenigstens nach einer Richtung hin vollkommen elastisch sind, oder die Kräfte, welche die Formänderungen bewirken nur so groß, daß diese Formänderungen noch innerhalb der Grenze der vollkommenen Elasticität liegend angenommen werden können.

Für die Gleichungen, welche in dem ersten Kapitel des gegenwärtigen Abschnittes für stetige veränderliche Systeme abgeleitet wurden, haben wir keine andere Voraussetzung zu Grunde gelegt, als die Stetigkeit; sie gelten daher für alle stetige Systeme; ihre Anwendung hängt aber von den Beziehungen ab, welche zwischen den innern Spannungen und den geometrischen Dehnungen bestehen, und darin unterscheiden sich die elastischen Systeme wesentlich von den nicht elastischen, weil sich gerade in diesen Beziehungen das Kennzeichen der Elasticität ausspricht. Diese Beziehungen würden wir also zunächst für vollkommen elastische Stoffe zu ermitteln haben; wir wollen jedoch den Gang der Untersuchung dadurch erleichtern, daß wir von den einfachsten Systemen zu den zusammengesetzteren fortschreiten.

§. 62.

Das einfachste stetige System ist eine materielle Linie, d. h. eine einfache Reihe von materiellen Punkten, welche für unsere Vorstellung stetig aufeinander folgen, weil wir diese Punkte nicht einzeln

zu unterscheiden vermögen, welche aber in Wirklichkeit durch sehr kleine Zwischenräume von einander getrennt sind, und die materielle Linie wird homogen sein, wenn alle diese Zwischenräume für irgend zwei aufeinanderfolgende Punkte gleiche Größe haben.

Eine solche materielle Linie werde nun zuerst in dem Zustande gedacht, daß keine äußere Kraft an derselben angreift und die innern Kräfte im Gleichgewichte sind, und dabei vorausgesetzt, daß die Linie in diesem Zustande homogen sei, daß also irgend zwei aufeinanderfolgende Punkte derselben immer in gleicher Entfernung von einander liegen. Es wird dann zur Erklärung dieses Zustandes nothwendig sein und genügen, daß wir zwischen je zwei solcher aufeinanderfolgenden Punkte zwei innere Kräfte annehmen, welche einander gleich und entgegengesetzt sind, von denen also die eine diese beiden Punkte einander zu nähern sucht, während die andere ihre Entfernung zu vergrößern strebt; im übrigen könnte uns die Natur dieser Kräfte für unsere weitere Untersuchung ziemlich gleichgültig sein. Um jedoch der Vorstellung eine bestimmte Richtung zu geben, wollen wir uns die allgemeine Eigenschaft der Materie, sich gegenseitig anzuziehen als die erstere Kraft, als die Ursache des gegenseitigen Bestrebens zur Annäherung betrachten, und die trennende Kraft der Wärme als die Ursache ihrer Nichtvereinigung. Wir haben dann für die erste Kraft (P_1) ein bereits bekanntes Gesetz, nämlich

$$P_1 = G \frac{\mu^2}{w^2},$$

wenn wir wie früher die Intensität dieser Kraft für zwei Punkte, deren Entfernung gleich 1 ist, und welche die Einheit der Masse enthalten, mit G, ferner die für alle gleiche Masse eines Punktes unserer Linie mit μ und die gegenseitige Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Punkte derselben mit w bezeichnen. Das Gesetz, nach welchem sich die zweite Kraft P_2 regelt, ist nicht bekannt, weil uns noch eine klare Einsicht in die Natur der Wärme fehlt. Nehmen wir aber die durch die Erfahrung gegebene Eigenschaft der Elasticität zu Hülfe, so werden wir schließen, daß weil zwei materielle Punkte, welche unter dem Einflusse der Kräfte P_1 und P_2 allein im Gleichgewichte sind, und durch eine äußere Kraft etwas mehr von einander entfernt oder einander etwas mehr genähert werden, als sie ursprünglich waren, ihren frühern Abstand wieder annehmen, wenn die äußere Kraft zu wirken aufhört, die trennende Kraft P_2 mit der Vergrößerung der ursprünglichen Entfernung abnehmen, mit der Verminderung dagegen zunehmen muß, und

zwar rascher ab= oder zunehmen muß, als die anziehende Kraft P_1, daß man also das Gesetz:

$$P_2 = C\frac{\mu^2}{w^n}$$

annehmen kann, worin C die Intensität der trennenden Kraft der Wärme für die Einheit der Entfernung und der Massen, und der Exponent n jedenfalls größer als 2 sein wird. Es ist jedoch dabei zu beachten, daß in dem letztern Gesetz der Factor C nicht für alle Stoffe denselben Werth hat, wie der Factor G in dem ersten, daß er vielmehr selbst wieder einen Factor einschließt, welcher das Maaß für die Wärmecapacität der verschiedenen Stoffe ausdrückt, welchen wir aber hier nicht besonders darstellen, da es sich doch nicht um eine Vergleichung der Elasticitäten verschiedener Stoffe handelt, sondern nur um die Erscheinungen, welche wir an einem aus einem bestimmten Stoffe bestehenden Körper als Folge jener innern Kräfte wahrnehmen.

Wichtiger für uns ist die weitere aus der Erfahrung gezogene Folgerung, daß der Factor C auch nicht unveränderlich ist, wie der Factor G, sondern für wesentliche Aenderungen in der Entfernung zweier Punkte, wahrscheinlich in Folge der veränderten Wärmecapacität, einen andern Werth annimmt, und daß sich dann deßhalb nach Entfernung der äußern Kräfte ein neuer, von dem ursprünglichen verschiedenen Gleichgewichtszustand herstellt. Die Grenzen der vollkommenen Elasticität eines Stoffes werden darnach durch diejenigen Aenderungen in der ursprünglichen Entfernung der einzelnen materiellen Punkte gegeben sein, für welche der Factor C unverändert bleibt.

Die Kräfte P_1 und P_2, welche zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten thätig sind, und von diesen entweder unmittelbar ausgehen oder sich auf dieselben stützen, haben keinen Einfluß auf die Richtung der Geraden, welche zwei solche Punkte verbindet; unsere materielle Linie wird daher ohne äußere Kräfte in jeder beliebigen Gestalt im Gleichgewichte sein und ohne Widerstand jede andere beliebige Gestalt annehmen, also vollkommen biegsam und die Grundform für den in §. 47 betrachteten vollkommen biegsamen Faden sein, nur mit dem Unterschiede, daß dieser letztere als unveränderlich in der Länge vorausgesetzt wurde, während unserer materiellen Linie außer der vollkommenen Biegsamkeit auch noch die Eigenschaft der Dehnbarkeit und Elasticität zukommt.

Denken wir uns demnach unsere Linie in der ursprünglichen von äußern Kräften unabhängigen Gestalt als eine Gerade AB, Fig. 19,

und bezeichnen die Entfernung zweier Punkte m und m' derselben in diesem Zustande mit a, so haben wir nach dem Vorhergehenden die Bedingung:

$$G \frac{1}{a^2} - C \frac{1}{a^n} = 0 \,. \qquad (a.$$

Lassen wir nun in A und B in der Verlängerung der Geraden AB zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte P angreifen, so wird sich unter dem Einflusse dieser Kräfte ein neuer Gleichgewichtszustand A'B' oder A" B" herstellen, je nachdem deren Wirkung dahin geht, A und B von einander zu entfernen, oder diese Punkte einander zu nähern. Es wird nun zwischen irgend zwei Punkten m und m' eine Spannung $T = P$ entstehen und für alle eine positive oder negative Dehnung ε eintreten, die Entfernung a sich also für alle in $a + \varepsilon$ verändern, so daß unter der obigen Voraussetzung für die Unveränderlichkeit des Factors C die Gleichung

$$P + C \frac{\mu^2}{(a+\varepsilon)^n} - G \frac{\mu^2}{(a+\varepsilon)^2} = 0 \,, \qquad (b.$$

besteht, welche mit Berücksichtigung der Gleichung (a) die Formen annimmt:

$$P\,(a+\varepsilon)^n - (n-2)\, G \mu^2 a^{n-3} \varepsilon \left(1 + \frac{n-3}{2} \frac{\varepsilon}{a} + \text{etc.}\right) = 0 \,,$$

oder

$$P = (n-2)\, G \frac{\mu^2}{a^2} \frac{\varepsilon}{a} \left(1 + \frac{\varepsilon}{a}\right)^{-n} \left(1 + \frac{n-3}{2} \frac{\varepsilon}{a} - + \text{etc.}\right)$$

$$= (n-2)\, G \frac{\mu^2}{a^2} \frac{\varepsilon}{a} \left(1 - \frac{n+3}{2} \frac{\varepsilon}{a} - \text{etc.}\right) .$$

Diese Formen zeigen, daß, wie oben schon bemerkt wurde, $n > 2$ sein muß, damit ε und P gleichzeitig positiv oder gleichzeitig negativ sein können, ferner, daß ε mit P Null wird, wie es die vollkommene Elasticität erfordert, daß aber nur für sehr kleine Aenderungen des ursprünglichen Abstandes a, für welche man $\frac{n+3}{2} \frac{\varepsilon}{a}$, und um so mehr noch die höhern Potenzen von $\frac{\varepsilon}{a}$ gegen die Einheit vernachlässigen kann,

P denselben absoluten Werth behält, wenn man das Zeichen von ε wechselt, die Kraft also stauend wirken läßt, anstatt dehnend. Für so kleine Dehnungen oder Stauungen kommt die Beziehung zwischen P und ε auf die einfache Gleichung:

$$P = (n-2)\, G \frac{\mu^2}{a^2} \frac{\varepsilon}{a} = \varepsilon \frac{\varepsilon}{a} \quad , \quad \varepsilon = a \frac{P}{\varepsilon}$$

zurück, und spricht aus, daß unter dieser Voraussetzung die Aenderung des ursprünglichen Abstandes a oder die Dehnung ε der dehnenden Kraft P proportional ist; der Coeffizient $\varepsilon = (n-2)\, G \frac{\mu^2}{a^2}$ in derselben stellt eine Kraft vor, welche bei gleichbleibender vollkommner Elasticität jenen Abstand verdoppeln würde, weil man $\varepsilon = a$ für $P = \varepsilon$ erhält. Dieser Coeffizient wird Elasticitäts-Coeffizient oder auch Elasticitätsmodul genannt. Beachtet man dann, daß das Verhältniß der Dehnung ε zur ursprünglichen Entfernung a zweier Punkte dem Verhältniß der Verlängerung oder Verkürzung l der ganzen Linie AB zu ihrer ursprünglichen Länge L gleich ist, so hat man auch

$$101.) \qquad P = \varepsilon \frac{l}{L} \quad \text{oder} \quad l = L \frac{P}{\varepsilon}$$

und schließt aus der durch eine gegebene Kraft $P_{,}$ erzeugten Verlängerung oder Verkürzung $l_{,}$ den Werth von ε durch die Gleichung:

$$\varepsilon = P_{,} \frac{L}{l_{,}} ,$$

wobei aber auf die obige Bedingung, daß das Verhältniß $\frac{l_{,}}{L}$ sehr klein bleiben muß, Rücksicht zu nehmen ist.

§. 63.

Wir wollen nun allgemeiner annehmen, daß an jedem Punkt einer solchen materiellen Linie eine Kraft angreift, deren Intensität und Richtung sich von einem Punkte zum andern stetig ändert und demnach als eine Function der Coordinaten des betreffenden Punktes betrachtet und dargestellt werden kann, und untersuchen, welche Gestalt diese Linie annehmen muß, wenn sie unter dem Einflusse dieser Kraft im Gleich-

gewichte bleiben soll, und wie sich die Gesetze ihrer Bewegung ausdrücken lassen.

Da die Linie für unsere Wahrnehmung eine stetige ist, so können wir die Wirkung jener Kraft nur in Bezug auf eine bestimmte Länge derselben beurtheilen und es werden dann die Componenten qX, qY, qZ ihrer Wirkung qR für einen bestimmten Punkt die Aenderungsgesetze der entsprechenden Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ jener physischen Wirkung in Bezug auf die Aenderung der Länge sein, weil in unserm jetzigen Falle die Ausdehnung des Systems auf die Längenausdehnung zurückkommt; man wird also haben

$$qX = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial s} \quad , \quad qY = \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial s} \quad , \quad qZ = \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial s} \, ,$$

oder

$$\mathfrak{X} = \int_{s_0}^{s} \partial s . qX \quad , \quad \mathfrak{Y} = \int_{s_0}^{s} \partial s . qY \quad , \quad \mathfrak{Z} = \int_{s_0}^{s} \partial s . qZ \, .$$

Dagegen hat die Spannung T in einem beliebigen Punkte aus eben diesem Grunde die Bedeutung einer physischen Kraft, da die materielle Linie nur einen Punkt als Querschnitt bietet, d. h. es werden hier die Spannungen $T_x^{(x)}$ und $\mathfrak{T}_x^{(x)}$, $T_y^{(x)}$ und $\mathfrak{T}_y^{(x)}$, u. s. f. in §. 37 gleichbedeutend. Ferner wird es einleuchten, daß man unser jetziges System in einem bestimmten Punkte nur durch einen Schnitt begrenzen kann, und daß es gleichgültig ist, zu welcher Ebene dieser Schnitt parallel sein mag, da es in jenem Punkte nur eine einzige Spannung geben kann. Man hat daher entweder

$$T^{(x)} = T \quad , \quad T^{(y)} = 0 \quad , \quad T^{(z)} = 0 \, ,$$

oder

$$T^{(y)} = T \quad , \quad T^{(x)} = 0 \quad , \quad T^{(z)} = 0 \, ,$$

u. s. f.

und die Gleichungen (c) in §. 38 kommen auf die einfachen

$$\mathfrak{X} + T_x = 0 \quad , \quad \mathfrak{Y} + T_y = 0 \quad , \quad \mathfrak{Z} + T_z = 0 \quad (d)$$

zurück, wenn T_x, T_y und T_z die Componenten von T nach den drei Coordinatenachsen bedeuten. Endlich ist leicht einzusehen, daß die der

Größe und Richtung nach stetig sich ändernde Kraft auch eine stetige Krümmung der materiellen Linie erzeugen, oder daß diese eine stetig gekrümmte Curve bilden wird, und daß die Spannung T nach der Tangente an dieser Curve in dem betreffenden Punkte gerichtet sein muß. Man hat daher für die Componenten T_x, T_y, T_z auch die Werthe:

$$T_x = T\frac{dx}{ds} \quad , \quad T_y = T\frac{dy}{ds} \quad , \quad T_z = T\frac{dz}{ds}$$

und die vorhergehenden Gleichungen (d) nehmen damit und mit den Werthen von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Form an:

$$\text{e.)} \left\{ \begin{array}{c} T\frac{dx}{ds} + \int_{s_0}^{s} ds.qX = 0 \quad , \quad T\frac{dy}{ds} + \int_{s_0}^{s} ds.qY = 0 \, , \\ T\frac{dz}{ds} + \int_{s_0}^{s} ds.qZ = 0 \, , \end{array} \right.$$

worin der Bogen s_0 bis zu einem Punkte $x_0 y_0 z_0$ genommen vorausgesetzt wird, wo die Spannung Null ist. Wenn kein solcher Punkt vorhanden ist, sondern an dem im Punkte xyz begrenzten Theil der Linie außer den stetig wirkenden geometrischen Componenten qX, qY und qZ noch eine physische Kraft T_0 in einem Punkte $x_0 y_0 z_0$ angreift, deren Richtung dann offenbar auch mit der Richtung der Curve in diesem Punkte zusammenfallen muß, so sind die Componenten $T_0 \cos\alpha_0$, $T_0 \cos\beta_0$, $T_0 \cos\gamma_0$ noch den physischen Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in den vorhergehenden Gleichungen (e) beizufügen, und die Integrale von jenem Punkte an bis zu einem andern zu nehmen, bis zu welchem nur geometrische oder stetig sich ändernde Kräfte thätig sind. Es ergibt sich dieses indessen einfacher, wenn wir zuerst für die Gleichungen (e) ihre Aenderungs- oder Uebergangsgesetze:

$$103.) \left\{ \begin{array}{c} \frac{d.T\frac{dx}{ds}}{ds} + qX = 0 \quad , \quad \frac{d.T\frac{dy}{ds}}{ds} + qY = 0 \, , \\ \frac{d.T\frac{dz}{ds}}{ds} + qZ = 0 \, , \end{array} \right.$$

nehmen, welche nun mit den entsprechenden Abänderungen die auf unsern jetzigen Fall angewendeten Bedingungsgleichungen (75) vorstellen, und aus denen durch die in Bezug auf s als möglich gedachte Integration die Gleichungen (e) in der allgemeineren Form:

$$\left.\begin{aligned} T\frac{dx}{ds} - T_0 \cos\alpha_0 + \int_0^s ds.qX = 0 \\ T\frac{dy}{ds} - T_0 \cos\beta_0 + \int_0^s ds.qY = 0 \\ T\frac{dz}{ds} - T_0 \cos\gamma_0 + \int_0^s ds.qZ = 0 \end{aligned}\right\} , \qquad (104.$$

hervorgehen, worin der Bogen s von dem Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ an gerechnet ist, für welchen die Spannung gleich T_0 gegeben oder bekannt vorausgesetzt wird.

Wenn die Integration ausführbar ist, so zieht man aus diesen Gleichungen sogleich die Aenderungsgesetze der Coordinaten:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_0 \cos\beta_0 - \int_0^s ds.qY}{T_0 \cos\alpha_0 - \int_0^s ds.qX}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{T_0 \cos\gamma_0 - \int_0^s ds.qZ}{T_0 \cos\alpha_0 - \int_0^s ds.qX}, \quad (105.$$

welche zusammen den beiden Gleichungen der von der materiellen Linie im Gleichgewichtszustande gebildeten Curve angehören.

Aus den Gleichungen (103) lassen sich noch zwei andere allgemeine Gesetze für den Gleichgewichtszustand ableiten. Wenn man die angedeuteten Aenderungsgesetze von $T\frac{dx}{ds}$, u. s. f., zerlegt, und darnach die genannten Gleichungen unter die Form bringt:

$$\text{f.)}\quad \begin{cases} \frac{dx}{ds}\frac{dT}{ds} + T\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + qX = 0, \\ \frac{dy}{ds}\frac{dT}{ds} + T\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + qY = 0, \\ \frac{dz}{ds}\frac{dT}{ds} + T\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} + qZ = 0, \end{cases}$$

dann die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0$$

und die Beziehungen:

$$\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{\cos\lambda}{\varrho}, \quad \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{\cos\mu}{\varrho}, \quad \frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\cos\nu}{\varrho}$$

beachtet (vergl. §. 30 der Einleitung und §. 64 des ersten Buches), so wird man aus den Gleichungen (f) entweder den Ausdruck:

$$\text{g.)}\quad \frac{dT}{ds} + q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

oder die Gleichung:

$$\text{h.)}\quad T + \varrho q(X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu) = 0$$

erhalten, je nachdem man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ oder mit $\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}$, u. s. f. multiplicirt und die Summe der Producte nimmt. Die erste dieser Gleichungen spricht aus, daß das

Aenderungsgesetz der Spannung in Bezug auf die Aenderung der Bogenlänge durch die nach der Tangente gerichtete Componente der geometrischen Kraft qR dargestellt wird, und gibt durch Integration den Ausdruck:

$$T_0 - T = \int_0^s ds\,.\,q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right), \quad (106.$$

durch welchen die Aenderung der Spannung zwischen dem Anfang und Ende des Bogens s berechnet werden kann.

Ersetzt man dann in der Gleichung (1) die nach der Hauptnormale gerichtete Componente von qR, nämlich $q(X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu)$ durch N, so folgt daraus noch

$$T + N\varrho = 0 \quad \text{oder} \quad N = -\frac{T}{\varrho} = -T\varkappa, \quad (107.$$

und diese Werthe zeigen einerseits, daß die Krümmung $\varkappa$ in einem bestimmten Punkte des Fadens der normalen Componenten der geometrischen Kraft in diesem Punkte direct und der Spannung verkehrt proportional ist, und daß die Richtung der Krümmung oder des Krümmungshalbmessers durch die Richtung der normalen Componenten von qR bestimmt wird.

Es besteht demnach eine merkwürdige Uebereinstimmung in den Beziehungen der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes, welcher sich vermöge der veränderlichen Kraft R in einer Curve bewegt, zu der tangentialen und normalen Componenten dieser Kraft, und den Beziehungen der Spannung einer vollkommen biegsamen materiellen Linie zu denselben Componenten der geometrischen Kraft qR in irgend einem Punkte derselben.

§. 64.

Die Gleichungen, welche im vorhergehenden §. abgeleitet wurden, können auch wie die Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes, sowohl dazu dienen, die Größe und Richtung der geometrischen Kraft qR zu bestimmen, wenn die Gestalt der materiellen Linie und die Spannung in einem beliebigen Punkte für den Gleichgewichtszustand gegeben ist, oder umgekehrt, diese letztern Eigenschaften aus der gegebenen Kraft abzuleiten.

Für den ersten Fall, welcher wie bei der Bewegung der leichtere ist, sind die Gleichungen:

$$y = f_1(x) \quad , \quad z = f_2(x)$$

der zu bildenden Curve gegeben und die Spannung T in Function der Veränderlichen x , y , z ausgedrückt. Zieht man also aus jenen Gleichungen die Werthe der Aenderungsgesetze $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, und führt sie mit T in die Gleichungen (103) ein, so geben diese durch eine neue Differentiation in Bezug auf s die Werthe der Componenten qX , qY , qZ , und es kann dann noch über die Dichte q verfügt werden, wenn X, Y und Z selbst in Function von x oder einer der andern Veränderlichen ausgedrückt werden sollen.

Wäre z. B. verlangt, daß die materielle Linie einen Kreis bilde, der in der Ebene der xz liegt, und daß die Spannung T für alle Punkte dieselbe und einem gegebenen Gewichte Q gleich sei, so hat man einmal

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{z}{r} \quad , \quad \frac{dy}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \pm \frac{x}{r}$$

und damit folgt

$$qY = 0 \, ,$$

$$-qX = \pm Q \frac{d.\frac{z}{r}}{ds} = \pm Q \frac{x}{r^2} \quad , \quad -qZ = \pm Q \frac{d.\frac{x}{r}}{ds} = \pm Q \frac{z}{r^2} \, ;$$

mithin hat man für die Resultirende den constanten Werth:

$$qR = q\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{Q}{r}$$

und der Richtungswinkel a dieser Kraft ergibt sich durch die Gleichung:

$$tang\, a = \frac{Z}{X} = \pm \frac{z}{x} ,$$

welche zeigt, daß die Richtungslinie jener Resultirenden immer durch den Mittelpunkt des Kreises gehen, oder zur Curve normal sein muß, daß die Resultirende selbst aber sowohl in der Verlängerung des Halbmessers als auch gegen den Mittelpunkt des Kreises hin wirken kann.

und man wird sich leicht überzeugen, daß im ersten Fall stabiles, im zweiten dagegen nicht stabiles Gleichgewicht stattfinden wird.

Dasselbe Ergebniß sieht man übrigens hier unmittelbar aus den Gleichungen (106) und (107), von denen die letztere hier die Form $N = -\frac{Q}{r}$ annimmt, während die erstere die Bedingung

$$q\left(R\frac{dx}{ds} + X\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad qR = N$$

liefert. Man hat demnach, abgesehen vom Zeichen

$$T = \rho N = qrR$$

und schließt daraus, *daß die Spannung T der physischen Wirkung gleich ist, welche von der geometrischen Kraft R auf einen dem Halbmesser r gleichen Theil der materiellen Linie hervorgebracht wird.*

Im Allgemeinen sieht man, daß wenn die Kraft qR immer zu der von der materiellen Linie gebildeten Curve normal sein soll, man immer

$$N = qR \quad \text{und} \quad \frac{dT}{ds} = 0$$

hat, folglich auch

$$T = T_0 = \rho N = \rho qR \quad \text{oder} \quad qR = \frac{T_0}{\rho};$$

es ist dann die in einem beliebigen Punkte thätige geometrische Kraft dem Krümmungshalbmesser daselbst verkehrt proportional, oder es ist *die physische Wirkung*, welche durch die Kraft R auf eine dem Krümmungshalbmesser an Länge gleiche materielle Linie von constanter Dichte q ausgeübt werden kann, eine unveränderliche für alle Punkte der Curve.

Soll demnach qR constant bleiben, so muß auch ρ unveränderlich und die Curve ein Kreisbogen sein; und es folgt daraus weiter, daß nur dann Gleichgewicht bestehen kann, wenn die Richtung der Kraft R immer in derselben Ebene bleibt.

Zu den Fällen, in welchen die geometrische Kraft immer normal wirkt, gehört namentlich derjenige, wenn ein vollkommen biegsamer

Faden über eine Fläche gespannt und keine Reibung vorausgesetzt wird, so daß die an den Enden des Fadens angebrachten spannenden Kräfte und der normale Widerstand der Fläche die einzigen Kräfte sind, welche an dem System angreifen. Unter dieser Voraussetzung muß nach dem Vorhergehenden

1) die Spannung des Fadens in allen Punkten dieselbe, also auch an beiden Enden gleich sein;

2) der Druck, welchen die Fläche zu erleiden, oder der Widerstand, den sie dagegen zu leisten hat, ist der Krümmung proportional;

3) der Krümmungshalbmesser der von dem Faden beschriebenen Curve ist auch in allen Punkten normal zu der Fläche, diese Curve folglich eine **Krümmungscurve** (Einl. §. 39), und unsere vorhergehenden analytischen Gleichgewichtsbedingungen führen sehr einfach auf die am genannten Orte abgeleiteten Differential-Gleichungen dieser Curven.

Ist nämlich $z = f(x, y)$ die Gleichung der betreffenden Fläche, so hat man für die Winkel l, m, n, welche der normale Widerstand N mit den drei Coordinaten-Achsen bildet, die Werthe:

$$\cos l = -V'\frac{dz}{dx}, \quad \cos m = -V'\frac{dz}{dy},$$

$$\cos n = V' = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}};$$

die Componenten φX, φY und φZ in den Gleichungen (f) werden daher

$$-NV'\frac{dz}{dx}, \quad -NV'\frac{dz}{dy}, \quad NV';$$

und da T constant und gleich $-\rho N$ ist, so nehmen diese Gleichungen die Form an

$$\left\{\begin{array}{l} \rho\dfrac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + V'\dfrac{dz}{dx} = 0, \quad \rho\dfrac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + V'\dfrac{dz}{dy} = 0, \\ \rho\dfrac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} - V' = 0, \end{array}\right.$$

und die Elimination von $\frac{V}{\varrho}$ führt auf die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0 \\ \frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{dz}{dy}\cdot\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds} = 0 \end{aligned}\right\}$$

welche mit den in dem genannten §. der Einleitung gefundenen Gleichungen der Krümmungscurve identisch sind.

Um nun auch die Reibung zu berücksichtigen, welche zwischen dem Faden und der Fläche stattfindet, wollen wir uns auf den am meisten Anwendung findenden Fall beschränken, wo nur Reibung in der Richtung des Fadens, also keine Seiten-Reibung stattfindet, wo nämlich der Faden schon eine Krümmungslinie auf der Fläche bildet und daher kein Bestreben hat, sich seitwärts aus seiner Lage zu entfernen. Man hat dann wieder $N = -T\varkappa$ und daher, wenn f den Reibungs-Coeffizienten bezeichnet, und die Reibung der Spannung T entgegenwirkend angenommen wird,

$$\frac{dT}{ds} + fN = 0 \quad , \quad \frac{dT}{ds} = fT\varkappa .$$

Führt man also für $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ den Werth: $\frac{d\tau}{ds}$ ein, worin τ den Winkel bedeutet, welchen die Tangente in dem Endpunkte des Bogens s oder im Punkte xyz mit der Tangente am Anfang desselben oder im Punkte $x_0 y_0 z_0$ bildet, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dT}{ds} = fT\frac{d\tau}{ds} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = f ,$$

und daraus folgt durch Integration

$$logn\frac{T}{T_0} = f\tau \quad , \quad T = T_0 e^{f\tau} .$$

Diese Spannung T, welche der spannenden Kraft T_0 und der Reibung auf der Fläche das Gleichgewicht hält, d. h. die Grenze des Gleichgewichtes so herstellt, daß eine kleine Vermehrung von T das Gleichgewicht stört, ist demnach weder von der Gestalt der Fläche, noch von der darauf beschriebenen Krümmungscurve, noch von der Länge des Fadens zwischen den Punkten $x\,y\,z$ und $x_0\,y_0\,z_0$ ab, sondern nur von dem Winkel τ, welchen die Tangenten in diesen beiden Punkten mit einander bilden. Der Druck auf die Fläche ist demnach

$$N = T_0\,\varkappa\,e^{f\tau} ,$$

und die Größe der Reibung F zwischen jenen Punkten, welche offenbar dem Unterschiede der Spannungen in denselben gleich ist, wird durch

$$F = T_0\left(e^{f\tau} - 1\right)$$

gemessen; sie ist proportional der anfänglichen Spannung T_0 und hängt ebenfalls nur von dem Winkel τ ab.

Wird z. B. ein Faden in der Richtung der größten Krümmung über eine Cylinderfläche gespannt, deren normaler Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist, so ist τ dem Bogen s proportional, und zwar $\tau = \frac{s}{r}$ oder gleich dem entsprechenden Mittelpunktswinkel, und man findet unter der Voraussetzung $f = \frac{1}{3}$ folgende Werthe für die Spannung und Reibung,

$$\text{für } \tau = \tfrac{1}{2}\pi \;,\quad T = T_0\,e^{\frac{\pi}{6}} = 1{,}688\,T_0 \;,\quad F = 0{,}688\,T_0 \;,$$

$$= \pi \;,\quad = T_0\,e^{\frac{\pi}{3}} = 2{,}850\,T_0 \;,\quad = 1{,}850\,T_0 \;,$$

$$= \tfrac{3}{2}\pi \;,\quad = T_0\,e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}811\,T_0 \;,\quad = 3{,}811\,T_0 \;,$$

$$= 2\pi \;,\quad = T_0\,e^{\frac{2\pi}{3}} = 8{,}121\,T_0 \;,\quad = 7{,}121\,T_0 \;,$$

u. s. f.

Diese Werthe sind die größten, welche T erhalten darf, wenn das Gleichgewicht nicht gestört werden, oder wenn der Faden auf der Fläche nicht im Sinne der Spannung T gleiten soll. Will man dagegen den entsprechenden kleinsten Werth, also diejenige Grenze des Gleichgewichtes, an welcher eine kleine Verminderung von T Bewegung im Sinne von T_0 zur Folge hat und demnach die Reibung zu Gunsten von T wirkt, so muß man das Zeichen vor f ändern, und

$$T = T_0 e^{-fr}$$

nehmen, was darauf hinauskommt, T und T_0 zu vertauschen.

§. 65.

Für die umgekehrte Anwendung unserer allgemeinen Gleichungen müssen einmal die geometrischen Componenten X, Y, Z, dann die ursprüngliche Dichte q_0 des Fadens gegeben sein; ferner diejenigen Größen, welche zur Bestimmung seiner speziellen Form nothwendig sind, also entweder seine ursprüngliche Länge und zwei Punkte, durch welche er gehen oder an welchen er befestigt sein soll, oder die Länge einer Sehne und der Pfeil dazu, u. s. f.

Die ursprüngliche Länge und Dichte des Fadens ändern sich durch die Spannung; es ist daher streng genommen die Dichte q in den Gleichungen (103) u. ff. nicht die ursprüngliche, sondern diejenige, welche der Faden im Gleichgewichtszustande angenommen hat, und wenn die ursprüngliche Länge eines Fadens und zwei Befestigungspunkte gegeben sind, so muß für die strenge Betrachtung auch die durch die Spannung bewirkte Verlängerung berücksichtigt werden. In den meisten Fällen sind diese Aenderungen der Dichte und Länge so klein, daß sie ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können, und auch gewöhnlich in solchen Untersuchungen vernachlässigt werden. Die nachfolgende Betrachtung wird übrigens zeigen, wie diese Aenderungen berücksichtigt werden können.

Denken wir uns zuerst einen homogenen Faden, an welchem die nach derselben Geraden und durchaus in demselben Sinne thätige geometrische Kraft q X angreift, welcher also offenbar die Gestalt einer Geraden annehmen muß, wenn der eine Endpunkt festgehalten wird. Sei $\mathfrak{x}$ die Verlängerung, welche eine von diesem Endpunkt an gemessene Länge x durch die Spannung T erleidet, also $\mathfrak{x} + \Delta \mathfrak{x}$ die Verlängerung der Länge $x + \Delta x$ durch die Spannung $T + \Delta T$. Es wird

dann $\Delta\mathfrak{x}$ die Verlängerung des Fadenstückes Δx sein, und diese einer constanten Spannung $T + \alpha\,\Delta T$ zugeschrieben werden können, welche zwischen T und $T + \Delta T$ liegt, so daß man nach §. 62 die Gleichung:

$$\Delta\mathfrak{x} = (\Delta x - \Delta\mathfrak{x})\,\frac{T + \alpha\Delta T}{\varepsilon} \text{ oder } \frac{\Delta\mathfrak{x}}{\Delta x}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon} + \alpha\frac{\Delta T}{\varepsilon}\right) = \frac{T}{\varepsilon} + \alpha\frac{\Delta T}{\varepsilon}$$

hat, wenn man beachtet, daß $\Delta x - \Delta\mathfrak{x}$ die ursprüngliche Länge von Δx war. Daraus folgt für die geometrische Dehnung in dem Endpunkte der Länge x oder in dem Punkte m, dessen Abscisse in Bezug auf den Anfangspunkt des Fadens x ist, die Beziehung:

$$\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{T}{\varepsilon},$$

welche mit Vernachlässigung des nach unserer Voraussetzung sehr kleinen Bruches $\frac{T}{\varepsilon}$ neben der Einheit, also für die der Gleichung (101) zu Grunde liegende Annäherung auf

108.) $$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{T}{\varepsilon}$$

zurückkommt, und das Integral dieser Gleichung in Bezug auf x zwischen den Grenzen $l + \mathfrak{l}$ oder l' und 0 genommen, gibt die ganze Verlängerung

$$\mathfrak{l} = \int_0^{l'} \partial x \,.\, \frac{T}{\varepsilon}.$$

Man hat aber nach der Gleichung (106) im jetzigen Falle die Werthe:

$$T = T_0 - \int_0^x dx\,.\,qX = P + \int_x^{l'} dx\,.\,qX$$

und daher

$$T_0 = P + \int_0^{l'} dx\,.\,qX,$$

worin T_0 die am Anfangspunkte angreifende Kraft vorstellt, welche der am Ende wirkenden Kraft P und der von der Kraft X erzeugten physischen Wirkung das Gleichgewicht halten muß, und damit folgt

$$l = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{l'} \partial x \left(P + \int_x^{l'} dx \,.\, qX\right) . \qquad (109.$$

Dieser Ausdruck kann aber auch wieder nur angewendet werden, wenn die Dichte q nach der Dehnung als gegeben angenommen und darnach die ursprüngliche Dichte q_0 für den Punkt $x - \mathfrak{x} = x_0$ bestimmt wird, wozu man im jetzigen Falle die einfache Beziehung hat:

$$q_0 = q\left(1 + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\right) = q\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\right), \qquad (110,$$

wie man sich entweder aus der Gleichung (72^b) in §. 35 überzeugen wird, indem man ϱ_1 gleich Null nimmt, also

$$q_0 = q e^{\varrho} ,$$

und für e^{ϱ} die ersten Glieder $1 + \varrho$, dann für ϱ den Werth (92) setzt, der im jetzigen Falle auf $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$ zurückkommt, oder auch unmittelbar durch den Schluß, daß man haben muß

$$\int_0^l dx_0 \,.\, q_0 = \int_0^{l+\mathfrak{l}} dx \,.\, q = \int_0^l dx \,.\, q + \int_l^{l+\mathfrak{l}} dx \,.\, q$$

$$= \int_0^l dx_0 \,.\, q + \int_0^l dx_0 \,.\, q \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \int_0^l dx_0 \,.\, q\left(1 + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\right) .$$

Mit der obigen Annäherung hat man daher einfach

$$q = q_0 ,$$

übereinstimmend mit den Gleichungen (97) in §. 44 und den daselbst gemachten Voraussetzungen und Folgerungen. Die vorstehenden Gleichungen deuten aber auch darauf hin, daß man mit dieser Annahme die obigen Integrale (109) zwischen den Grenzen l und 0 statt zwischen l' und 0 nehmen müsse, um die Vernachlässigung einigermaßen zu compensiren.

Wird z. B. ein schwerer homogener Faden lothrecht aufgehängt und am untern Endpunkte durch eine Kraft P gespannt, so hat man $qX = qg = p$; es wird daher

$$T = P + p(l - x) \quad , \quad \mathfrak{l} = \frac{P}{\varepsilon} l + \frac{1}{2} \frac{pl^2}{\varepsilon} \; ,$$

oder wenn das ganze Gewicht pl der Linie durch Q ersetzt wird,

$$\mathfrak{l} = \frac{P + \frac{1}{2}Q}{\varepsilon} l \; ;$$

die Verlängerung ist also in diesem Falle dieselbe, als wenn der Faden gewichtlos gedacht, und dafür die Hälfte seines Gewichtes am untern Endpunkte mit der Kraft P vereinigt wird.

Gleiche Beziehungen bestehen auch in Bezug auf die Dehnung des nach irgend einer Curve gekrümmten Fadens; man hat auch hier in dem Endpunkte des Bogens s für die geometrische Dehnung in der Richtung des Fadens die Gleichung:

111.) $$\varepsilon \frac{\delta \mathfrak{l}}{\delta s} = T \; ,$$

und daher für die durch die äußern Kräfte eingetretene Verlängerung dieses Bogens den Ausdruck:

112.) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{l} &= \int_0^s ds . \frac{T}{\varepsilon} = \int_0^s ds . \left[\frac{T_0}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s ds . q \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \right] , \\ &= \int_0^s ds . - \varrho \frac{N}{\varepsilon} \; , \end{aligned} \right.$$

welcher wie die vorhergehenden nur angenähert richtig und nur unter der Voraussetzung anwendbar ist, daß $\frac{T}{\varepsilon}$ in der ganzen Ausdehnung des Fadens ein sehr kleiner Bruch ist.

Es dürfte ferner noch zu erwähnen sein, daß wenn auch bei einem vollkommen biegsamen Faden für die wirkliche Ausführung von keiner Stauung die Rede sein kann, für die rationelle Betrachtung immerhin auch ein solcher Gleichgewichtszustand denkbar ist, in welchem die äußern Kräfte die materielle Linie in der Richtung ihrer Länge zusammenzudrücken oder zu stauen streben; es ist denkbar, daß sich die materielle Linie in der Gestalt einer Geraden mit dem einen Endpunkt an einen festen Punkt stützt und im Gleichgewicht befindet, während am andern Endpunkt eine Kraft P angreift, welche gegen jenen Stütz-

punkt gerichtet ist, oder an allen Punkten derselben eine in gleichem Sinne gerichtete geometrische Kraft; es ist z. B. denkbar, daß eine solche schwere biegsame Gerade, in vertikaler Richtung in's Gleichgewicht gebracht und im untersten Punkte unterstützt, im Gleichgewichte bleibt, und zwar ebensowohl, als es sich denken läßt, daß ein auf seine Spitze gestellter Kegel im Gleichgewichte bleibt, und man wird leicht einsehen, daß die in diesem labilen Gleichgewichtszustande stattfindende Stauung oder Verkürzung des Fadens auf dieselbe Weise bestimmt wird, wie die Verlängerung oder Dehnung im Zustande des stabilen Gleichgewichtes.

§. 66.

Die allgemeinen Gleichungen für den Gleichgewichtszustand der materiellen Linie nehmen eine einfachere Form an, wenn die geometrische Kraft in allen Punkten derselben parallel gerichtet ist und eine der Coordinaten-Achsen, z. B. die der z, auch parallel zu dieser constanten Richtung angenommen wird. Man hat dann $X = 0$, $Y = 0$; unsere Gleichungen (103) werden einfach

$$\frac{d.T\frac{dx}{ds}}{ds} = 0\ ,\quad \frac{d.T\frac{dy}{ds}}{ds} = 0\ ,\quad \frac{d.T\frac{dz}{ds}}{ds} + qZ = 0\ , \quad (A.$$

und die beiden ersten derselben geben die Beziehungen:

$$T\frac{dx}{ds} = T_0 \cos\alpha_0\ ,\quad T\frac{dy}{ds} = T_0 \cos\beta_0\ ,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos\beta_0}{\cos\alpha_0} = \tang\varepsilon_0\ , \quad (B.$$

welche aussprechen, daß in dem betreffenden Falle die ganze Linie eine ebene Curve bildet und zwar in einer Ebene liegt, welche zur Achse der z oder zur Richtung der geometrischen Kraft parallel ist und die Richtung der Spannung T_0 enthält; sie drücken damit aber auch die Bedingung aus, daß die Richtung der am andern Endpunkte des Bogens s angreifenden Spannung T_n in derselben Ebene liegen muß. Man kann daher im jetzigen Falle diese Ebene selbst als Ebene der xz nehmen, wodurch die mittlere der vorhergehenden Gleichungen (A) überflüssig wird, und die Gleichungen (106) und (107) auf die einfachen Formen:

$$
\text{C.)} \quad \left\{ \begin{aligned} & T = T_0 - \int_0^s ds \,.\, qZ \frac{dz}{ds} = T_0 - \int_0^z dz \,.\, qZ \\ & \text{und} \\ & T = -\varrho qZ \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right.
$$

zurückkommen.

Diese Gleichungen finden unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der Gestalt und Spannung eines schweren, vollkommen biegsamen Fadens, welcher an zwei festen Punkten aufgehängt und nur der Wirkung der Schwere unterworfen ist. Ein solcher Faden wird nach dem Vorhergehenden eine vertikale ebene Curve bilden, welche gewöhnlich **Kettenlinie** genannt wird, weil sie die ideale Form der von einer frei aufgehängten Kette gebildeten krummen Linie vorstellt. Nach dem, was kurz vorher bemerkt wurde, kann man sich aber auch eine solche schwere materielle Linie in der umgekehrten Form, nämlich die convexe Seite nach oben gerichtet und sich auf zwei feste Punkte stützend, im Gleichgewichte denken, und so wird sie die ideale Form eines Gewölbbogens vorstellen, also als **Gewölblinie** bezeichnet werden müssen. Offenbar ist die **Kettenlinie** die **beständige**, die **Gewölblinie** dagegen die **nichtbeständige** Form für das Gleichgewicht einer schweren materiellen Linie, welche in zwei Punkten befestigt ist; ebenso wird es einleuchten, daß die Spannung T im ersten Falle einen **Zug**, im andern einen **Druck** vorstellt, und daß daher in diesem eine **Stauung** des Fadens statt haben muß, während in jenem der Faden gedehnt oder gestreckt wird.

Die lothrechte Ebene, in welcher die schwere Linie im Zustande des Gleichgewichts enthalten sein muß, geht nothwendig durch die beiden festen Punkte; diese Ebene wird man also als Ebene der xz und darin die Achse der z parallel zur Richtung der Schwere annehmen; die positive Hälfte derselben sei aufwärts gerichtet, und demnach

$$Z = -g \quad , \quad -qZ = p \,,$$

worin p das im Allgemeinen veränderliche **geometrische Gewicht** der Linie in dem Punkte xz vorstellt, die auf sie wirkende äußere Kraft. Die Gleichungen, aus welchen die Gestalt und die Spannung der Linie bestimmt werden muß, sind demnach folgende vier:

$$\frac{d.T\frac{dx}{ds}}{ds}=0\,,\qquad \frac{d.T\frac{dz}{ds}}{ds}=p\,,$$
$$\frac{dT}{ds}=p\frac{dz}{ds}\,,\qquad T=p\varrho\frac{dx}{ds}\,.\qquad (D.$$

und es geht daraus hervor, daß die verschiedenen Formen, welche die schwere Linie annehmen kann, nur von dem geometrischen Gewicht p abhängen, nämlich davon ob diese Kraft in der ganzen Ausdehnung der Linie constant oder nach einem gegebenen Gesetze veränderlich ist.

Die erste dieser Gleichungen ist von p unabhängig und spricht durch ihr erstes Integral:

$$T\frac{dx}{ds}=T_0\cos\alpha_0 \qquad (a.$$

die allgemeine Eigenschaft aus, daß die horizontale Componente der Spannnng für alle Punkte der Ketten= oder Gewölblinie gleich bleibt. Die zweite gibt

$$T\frac{dz}{ds}-T_0\sin\alpha_0=\int_{s_0}^{s}ds\,.\,p \qquad (b.$$

und drückt aus, daß der Unterschied zwischen den vertikalen Spannungs=Componenten in dem Punkte $x_0\,z_0$ und den entsprechenden Componenten in dem Punkte $x\,z$ dem Gewichte des zwischen diesen Punkten liegenden Bogens gleich ist.

Aus der dritten der Gleichungen (D) folgt die Beziehung:

$$T-T_0=\int_{s_0}^{s}ds\,.\,p\frac{dz}{ds}\,, \qquad (c.$$

welche dahin gedeutet werden kann, daß der Unterschied zwischen den Spannungen in den genannten Punkten durch das Gewicht eines gleichen Bogens ausgedrückt wird, dessen geometrisches Gewicht aber nur die tangentiale Componente des geometrischen Gewichtes p ist. Aus der vierten der obigen Gleichungen, nämlich aus

$$T=p\frac{dx}{ds}\varrho=p.\varrho\frac{dx}{ds} \qquad (d.$$

endlich folgt das allgemeine Gesetz, daß die Spannung T selbst in dem Punkte xz durch das Gewicht einer materiellen Linie gemessen wird, welche dem Krümmungshalbmesser an Länge und deren constantes geometrisches Gewicht der normalen Componenten des geometrischen Gewichtes p in dem betreffenden Punkte gleich ist, oder durch das Gewicht einer materiellen Linie, welche durchaus das geometrische Gewicht p besitzt und deren Länge der verticalen Projection des Krümmungshalbmessers gleich ist.

Die Dehnung oder Stauung der schweren Linie wird durch das Integral:

E.) $$= \int_0^s ds.\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s ds.p\frac{dz}{ds}\right) \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s ds.p\varrho\frac{dx}{ds}$$

gegeben, das durch dasselbe ausgesprochene Gesetz scheint sich aber nicht einfach in Worten ausdrücken zu lassen.

§. 67.

Die einfachste Annahme, welche sich über das geometrische Gewicht p machen läßt, besteht offenbar darin, diese Größe als unveränderlich für alle Punkte der materiellen Linie oder den Faden als homogen anzunehmen; die Curve ABC, Fig. 20, welche derselbe alsdann bildet, ist die gemeine oder einfache Kettenlinie, welche auch vorzugsweise den Namen Kettenlinie führt.

Unter dieser Voraussetzung gibt die Gleichung (c) des vorhergehenden §.

f.) $$T - T_0 = p(z - z_0)$$

und zeigt, daß der Unterschied zwischen den Spannungen zweier Punkte blos von ihrem verticalen Abstande abhängt und dem Gewicht eines Fadenstückes von einer diesem Abstand gleichen Länge gleich ist. Nimmt man dann den tiefsten Punkt B der Curve, wo die Tangente horizontal ist, als denjenigen, dessen Coordinaten x_0, z_0 sind, in welchem die Spannung gleich T_0 ist und von dem an der Bogen s gemessen wird, so hat man $\alpha_0 = 0$ und daher nach Gleichung (a)

g.) $$T\frac{dx}{ds} = T_0 \quad ; \quad T = T_0\frac{ds}{dx} ;$$

die Spannung ist dann auch der Sekante des Neigungswinkels der Tangente gegen die horizontale Achse der x proportional. Durch diesen Scheitel B der Curve legen wir ferner die Achse der z, so daß auch $x_0 = 0$ wird, und nehmen den Anfangspunkt O so an, daß die Spannung T_0 in B dem Gewicht eines Fadenstückes von der Länge $OB = z_0$ gleich ist, daß man also hat

$$T_0 = p z_0 \quad , \quad z_0 = \frac{T_0}{p} \; , \tag{h.}$$

und damit aus Gleichung (f) einfach

$$T = p z \; ; \tag{i.}$$

nach dieser Annahme wird folglich die Spannung in einem beliebigen Punkte durch das Gewicht eines Fadenstückes von der Länge der Ordinate dieses Punktes gemessen.

Ebenso gibt die Gleichung (b) nun die einfachen Beziehungen:

$$T\frac{dz}{ds} = p s \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \frac{s}{z} \quad , \quad z^2 - z_0{}^2 = s^2 \; , \tag{k.}$$

von denen die erste lehrt, daß die verticale Componente der Spannung durch das Gewicht des betreffenden Bogenstückes s gemessen wird, die zweite und dritte, daß die Ordinate z die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen beide Katheten von dem Bogen s und der Ordinate z_0 des Scheitels, den man auch den Parameter der Kettenlinie nennt, gebildet werden, und daß der von den Seiten z und s dieses Dreieckes gebildete Winkel zugleich der Winkel ist, welchen die Tangente in dem betreffenden Punkte xz mit der Achse der z macht. Zieht man demnach von dem Fußpunkte P der Ordinate $MP = z$, Fig. 20, eine Senkrechte PS auf die Tangente MT, so wird das Dreieck MPS das besprochene sein, in welchem MS die Länge des Bogens BM vorstellt, und $BS = OB = z_0$ ist.

Aus diesem Dreieck oder durch Verbindung der Gleichungen (g), (h) und (i) schließt man ferner die Gleichung:

$$z\frac{dx}{ds} = z_0 \; , \tag{l.}$$

welche mit den Gleichungen (k) verbunden nach Elimination des Bogens s das Aenderungsgesetz der Coordinaten unserer Curve gibt, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{\left(\frac{z}{z_0}\right)^2 - 1} = \sqrt{-1}.\sqrt{1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^2},$$

und daraus folgt die Gleichung derselben unter der Form:

$$x = z_0\sqrt{-1}\, arc\, cos\, \frac{z}{z_0} \quad \text{oder} \quad z = z_0\, cos\, \frac{x}{z_0\sqrt{-1}},$$

welche durch die bekannte Beziehung:

$$\text{l.)} \qquad cos\, \alpha = \tfrac{1}{2}\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}\right)$$

in die Gleichung:

$$\text{m.)} \qquad z = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x}{z_0}} + e^{-\frac{x}{z_0}}\right)$$

übergeht. Diese Gleichung begreift aber nicht nur die Curve ABC des stabilen Gleichgewichtes, sondern auch, wie in der Einleitung zur Analysis der Stetigkeit gezeigt wird, die auf der Seite der negativen z liegende Curve A'B'C' für das nichtbeständige Gleichgewicht; während also die erste Curve die Gestalt der Kettenlinie vorstellt, zeigt die zweite die Lage und Gestalt der Gewölblinie.

Dividirt man endlich die mittlere der Gleichungen (k) durch die Gleichung (l), so folgt, was übrigens auch aus dem Dreiecke MPS auf einen Blick hervorgeht,

$$s = z_0 \frac{dz}{dx}$$

und mit dem aus der Gleichung (m) gezogenen Werthe von $\frac{dz}{dx}$ erhält man den Ausdruck:

$$\text{n.)} \qquad s = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x}{z_0}} - e^{-\frac{x}{z_0}}\right),$$

worin der Bogen s durch die Veränderliche x ausgedrückt erscheint.

Die vorhergehenden Ergebnisse können übrigens auch noch auf andere Weise abgeleitet werden. So können die Werthe von z und s in Function von x unmittelbar und unabhängig von einander gefunden werden, wenn man in der Gleichung (l) die Veränderliche z durch ihren

Werth aus der letzten der Gleichungen (k), nämlich $z = \sqrt{z_0^2 + s^2}$ ersetzt; denn sie gibt so

$$\frac{dx}{ds} = \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + s^2}} \quad , \qquad x = z_0 \, logn \frac{s + \sqrt{z_0^2 + s^2}}{z_0}$$

und daraus zieht man auf die Zahlen übergehend

$$s + \sqrt{z_0^2 + s^2} = z + s = z_0 e^{\frac{x}{z_0}} .$$

Ferner ist

$$(z + s)(z - s) = z_0^2 \quad , \qquad z - s = \frac{z_0^2}{z + s} = z_0 e^{-\frac{x}{z_0}} ,$$

und die Summe der Werthe von $z + s$ und $z - s$ gibt

$$z = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x}{z_0}} + e^{-\frac{x}{z_0}} \right) ,$$

während durch die Differenz derselben der Werth:

$$s = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{x}{z_0}} - e^{-\frac{x}{z_0}} \right)$$

hervorgeht, wie oben.

Mit den vorhergehenden Ergebnissen zieht man auch noch aus der Gleichung (d) des vorigen §. einen einfachen Werth für den Krümmungshalbmesser, wenn man diese mit den Gleichungen (i) und (k) verbindet; man findet so

$$\varrho = z \frac{ds}{dx} = \frac{z^2}{z_0} , \qquad (o.$$

und schließt daraus, daß der Krümmungshalbmesser in M die dritte geometrische Proportionale zu dem Parameter z_0 und zu der Ordinate z ist, oder die Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreiecks, dessen eine Kathete die Ordinate und worin der von beiden eingeschlossene Winkel wieder der Winkel ist, welchen die Tangente in M mit der Achse der x bildet. Dieses Dreieck ist offenbar das Dreieck MPR, Fig. 20, und

es folgt daraus unmittelbar, daß der Krümmungshalbmesser auch der Normalen MR gleich ist, wenn unter Normale hier, wie es in der Curvenlehre gebräuchlich ist, das von der x=Achse begrenzte Stück der unbegrenzten Normalen verstanden wird. Es geht dieß übrigens auch sehr einfach aus dem bekannten Ausdruck:

$$\overline{MR} = z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

für die Länge der Normalen hervor, wenn man für $\frac{dx}{dz}$ den Werth $\frac{s}{z_0}$ einführt und die letzte der Gleichungen (k) beachtet, wodurch sich ergibt

$$\overline{MR} = \frac{z^2}{z_0} = \varrho \, .$$

Im Scheitel ist ϱ dem Parameter z_0 gleich; für große Werthe von z dagegen wird auch ϱ sehr groß, da es wie das Quadrat von z wächst; die beiden Zweige BA und BC der Curve ABC nähern sich also in der Gestalt immer mehr geraden Linien, ohne daß man jedoch feste Asymptoten für dieselben bezeichnen könnte, da $\frac{dz}{dx}$ und x mit z unendlich wird.

Endlich zeigen die bisher abgeleiteten Gleichungen, daß die meisten von ihnen unmittelbar eine noch einfachere Form annehmen, wenn man darin den Winkel τ, welchen die Tangente in M mit der x=Achse einschließt, als unabhängige Veränderliche einführt; man findet damit die Beziehungen:

$$\text{p.)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dz}{dx} = tang\,\tau \;, \quad T = p\,z_0 \sec\tau = T_0 \sec\tau \;, \quad z = z_0 \sec\tau \;, \\ s = z_0\, tang\,\tau \;, \quad \varrho = z_0 \sec^2\tau \;, \end{array} \right.$$

und es bleibt darnach nur noch übrig, auch die Absciſſe x in Function dieses Winkels auszudrücken. Dazu hat man

$$\frac{dz}{d\tau} = z_0 \sec\tau\, tang\,\tau = z_0 \frac{dz}{dx} \sec\tau \;,$$

und zieht daraus zuerst

$$\frac{dx}{d\tau} = z_0 \sec\tau\,,$$

und dann

$$x = z_0 \int_0^\tau d\tau \frac{1}{\cos\tau} = z_0 \operatorname{logn} \operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau\right) \qquad (q.$$

als den verlangten Werth von x in Function von τ.

§. 68.

Die Anwendung der im Vorhergehenden abgeleiteten Beziehungen zwischen den verschiedenen Größen, welche bei einer Kettenlinie vorkommen, setzt voraus, daß der Parameter z_0, von welchem allein die besondere Form derselben abhängt, gegeben oder bekannt sei; gewöhnlich ist aber dieser nicht unmittelbar gegeben, sondern muß zuvor aus andern Gegebenen berechnet werden.

Im allgemeinsten Falle können die horizontalen und verticalen Abstände der beiden Aufhängspunkte und entweder noch die Länge oder noch die größte Senkung der Kettenlinie in Bezug auf einen der genannten Punkte gegeben sein. Das letztere ist das natürlichere; es läßt sich aber unter dieser Voraussetzung z_0 am wenigsten leicht bestimmen.

Bezeichnet man den horizontalen Abstand AD der Aufhängspunkte A und C, Fig. 21, mit 2a, den verticalen Abstand CD derselben mit c, und die tiefste Senkung BF der Kettenlinie in Bezug auf die durch A gelegte Horizontale mit h, ferner die Abstände AF und FD mit a_1 und a_2, so hat man zur Bestimmung der drei Unbekannten z_0, a_1 und a_2 zuerst die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} AH &= h + z_0 = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_1}{z_0}} + e^{-\frac{a_1}{z_0}}\right), \\ CK &= h + c + z_0 = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_2}{z_0}} + e^{-\frac{a_2}{z_0}}\right), \end{aligned}\right\} \quad a_1 + a_2 = 2a\,,$$

aus welchen leicht die neuen Gleichungen:

$$h = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_1}{2z_0}} - e^{-\frac{a_1}{2z_0}}\right)^2, \quad h + c = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_2}{2z_0}} - e^{-\frac{a_2}{2z_0}}\right)^2;$$

und

$$h+2z_0=\tfrac{1}{4}z_0\left(e^{\frac{a_1}{2z_0}}+e^{-\frac{a_1}{2z_0}}\right)^2,\quad h+c+2z_0=\tfrac{1}{4}z_0\left(e^{\frac{a_2}{2z_0}}+e^{-\frac{a_2}{2z_0}}\right)^2$$

hervorgehen. Daraus zieht man sodann

$$r.)\ e^{\frac{a_1}{2z_0}}=\sqrt{\frac{h}{2z_0}}+\sqrt{\frac{h+2z_0}{L z_0}},\quad e^{\frac{a_2}{2z_0}}=\sqrt{\frac{h+c}{2z_0}}+\sqrt{\frac{h+c+2z_0}{2z^2}},$$

und das Produkt dieser Gleichungen gibt

$$2z_0 e^{\frac{a}{2z_0}}=\left(\sqrt{h}+\sqrt{h+2z_0}\right)\left(\sqrt{h+c}+\sqrt{h+c+2z_0}\right).$$

Ebenso findet man

$$e^{-\frac{a_1}{2z_0}}=\sqrt{\frac{h+2z_0}{2z_0}}-\sqrt{\frac{h}{2z_0}},\quad e^{-\frac{a_1}{2z_0}}=\sqrt{\frac{h+c+2z_0}{2z_0}}-\sqrt{\frac{h+c}{2z_0}}$$

und daher

$$2z_0 e^{-\frac{a}{2z_0}}=\left(\sqrt{h+2z_0}-\sqrt{h}\right)\left(\sqrt{h+c+2z_0}-\sqrt{h+c}\right),$$

und schließt aus diesen Ergebnissen die Gleichung:

$$z_0\left(e^{\frac{a}{2z_0}}+e^{-\frac{a}{2z_0}}\right)=\sqrt{(h+2z_0)(h+c+2z_0)}+\sqrt{h(h+c)},$$

welche in Bezug auf z_0 aufzulösen ist. Dazu kann man ihr dadurch, daß man $\frac{a}{2z_0}=u$, $h+c=h'$ setzt, die Form geben:

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{u}+e^{-u}\right)=\sqrt{\left(\frac{h}{a}u+1\right)\left(\frac{h'}{a}u+1\right)}+u\frac{\sqrt{hh'}}{a},$$

unter welcher sie natürlich nur annäherungsweise aufgelöst werden kann.

Man kann diese Gleichung aber auch durch Construction auflösen, indem man sie in zwei zerlegt, nämlich in

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)$$

und

$$ay = u\sqrt{hh'} + \sqrt{(hu + a)(h'u + a)}\,,$$

und jede dieser Gleichungen einzeln construirt; der Werth von u, welcher dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Curve angehört, wird dann der gesuchte Werth sein. Die erste der vorstehenden Gleichungen ist offenbar eine Kettenlinie mit dem Parameter 1 und läßt sich leicht mit Hülfe der Tafeln für e^{x} construiren. Die zweite derselben, unter die Form:

$$\left(ay - u\sqrt{hh'}\right)^2 = (hu + a)(h'u + a)$$

gebracht und entwickelt, kommt auf

$$a^2y^2 - 2a\sqrt{hh'}uy - (h + h')au - a^2 = 0$$

zurück und zeigt so, daß sie einer Hyperbel angehört, deren Mittelpunkt aber nicht im Anfangspunkt liegt und deren Achse gegen die Achse der u um einen Winkel ω geneigt ist, für welchen man hat

$$tang\, 2\omega = \frac{\sqrt{hh'}}{\frac{1}{2}a}\,.$$

Setzt man dann zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4hh'} + a\right) = k \quad , \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 4hh'} - a\right) = l\,,$$

so hat man für die Coordinaten des Mittelpunktes dieser Hyperbel die Werthe

$$\alpha = -\frac{\frac{1}{2}(h + h')}{l}\cos\omega \quad , \quad \beta = -\frac{\frac{1}{2}(h + h')}{k}\sin\omega$$

und die Gleichung derselben auf Mittelpunkt und Achse bezogen wird

$$ky^2 - lu^2 = a\,;$$

ihre Halbachsen sind demnach

$$\sqrt{\frac{a}{k}} \text{ und } \sqrt{\frac{a}{l}} \text{ oder } \sqrt{\frac{2}{sec\,2\omega+1}} \text{ und } \sqrt{\frac{2}{sec\,2\omega-1}}.$$

Hat man auf diese Weise u gefunden, so ergibt sich daraus unmittelbar der Werth von z_0 und die Lage der x = Achse in Bezug auf die festen Punkte. Die Werthe von a_1 und a_2 ergeben sich aus den Gleichungen (r) unter der Form:

$$e^{\frac{a_1 u}{a}} = \sqrt{\frac{hu}{a}} + \sqrt{\frac{hu}{a}+1}\ , \quad e^{\frac{a_2 u}{a}} = \sqrt{\frac{h'u}{a}} + \sqrt{\frac{h'u}{a}+1}\,,$$

wenn man auf beiden Seiten die Logarithmen nimmt, wodurch man hat

$$a_1 = \frac{a}{u}\,logn\left(\sqrt{\frac{hu}{a}} + \sqrt{\frac{hu}{a}+1}\right),$$

$$a_2 = \frac{a}{u}\,logn\left(\sqrt{\frac{h'u}{a}} + \sqrt{\frac{h'u}{a}+1}\right).$$

Die daraus hervorgegangenen Werthe müssen dann auch die Gleichung $a_1 + a_2 = 2a$ befriedigen, und bestimmen die Lage der z = Achse in Bezug auf die festen Punkte A und C. Die Ausführung eines Beispieles muß dem Leser zur Uebung empfohlen werden, namentlich in Bezug auf die Construction der vorhergehenden Hyperbel.

Das Aufsuchen des Parameters z_0 wird wesentlich einfacher, wenn die beiden festen Punkte A und C in derselben Horizontalen liegen, also $h' = h$ ist, weil dann zufolge der Gleichungen (r) auch $a_1 = a_2 = a$ werden muß. Man erhält daher z_0 durch die Gleichung:

$$\frac{2h}{z_0} = \left(e^{\frac{a}{2z_0}} - e^{-\frac{a}{2z_0}}\right)^2 \text{ oder } \frac{4hu}{a} = \left(e^{u} - e^{-u}\right)^2,$$

welche sich wieder in zwei zerlegen läßt, nämlich in

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{u} - e^{-u}\right) \quad \text{und} \quad y^2 = \frac{h}{a}u\,,$$

deren zweite einer gemeinen Parabel angehört, welche durch die Abscisse ihres Durchschnittes mit der durch die erste dargestellten Curve den Werth von u bestimmt. Noch einfacher dürfte es übrigens sein

$$y = \frac{1}{4}\left(e^{u} - e^{-u}\right)^2 \quad \text{und} \quad y = \frac{h}{a}u$$

zu setzen, also die durch die erste dieser Gleichungen dargestellte Curve durch eine Gerade zu schneiden, welche um den Winkel $\alpha = arc\ tang\ \frac{h}{a}$ gegen die Achse der u geneigt ist, und durch den Scheitel jener Curve geht.

Für die Berechnung von z_0 ist es vortheilhafter, die Beziehungen (p) des vorhergehenden §. anzuwenden, also die Gegebenen durch den Winkel τ auszudrücken und zuerst den einem Aufhängspunkte entsprechenden Werth dieses Winkels zu berechnen. Bezeichnet man diesen Werth mit $\tau_,$, so hat man

$$h + z_0 = z_0 \sec\tau \quad , \quad h = z_0(\sec\tau - 1) = z_0 \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\tau_,}{\cos\tau}$$

$$a = z_0\, logn\, tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\tau_,)$$

und zieht daraus

$$\frac{a}{h} = \frac{logn\, tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_,)}{2\sin^2\frac{1}{2}\tau_,} \cos\tau_, \,.$$

Um diese Gleichung aufzulösen, setzt man

$$y = log \frac{logn\, tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_,)}{\sin^2\frac{1}{2}\tau_,} \cos\tau_, - log \frac{2a}{h}$$

oder

$$y = log\, log\, tang(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\tau) + 2dE\, log\, \sin\tfrac{1}{2}\tau + log\, \cos\tau_, + k\,,$$

worin k den constanten Logarithmus

$$log\, 2{,}30259 + log \frac{h}{2a} = 0{,}36222 + log \frac{h}{2a}$$

vorstellt, und bestimmt $\tau_,$ so, daß y Null wird; mit diesem Werthe von $\tau_,$ ergibt sich dann z_0 durch die Gleichungen:

$$z_0 = a \frac{1}{logn\, tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_,)} = \frac{1}{2} h \frac{\cos\tau_,}{\sin^2\frac{1}{2}\tau_,}\,.$$

Wäre z. B. $2a = 160^m$, $h = 16^m$ gegeben, also $\frac{2a}{h} = 10$, so wird

$$k = 0,36222 + \log \tfrac{1}{10} = 9,36222 ,$$

und die Berechnung des entsprechenden Werthes von $\tau_,$ ist folgende:

1) für $\tau_, = 20^0$, $\frac{1}{2}\tau_, = 10^0$		2) für $\tau_, = 25^0$, $\frac{1}{2}\tau_, = 12^0 30'$	
$\log tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_,)$	$= 0,15477$	$\log tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_,)$	$= 0,19581$
$\log \log tang\ 55^0$	$= 9,18969$	$\log \log tang\ 57^0 30'$	$= 9,29183$
$\log \cos 20^0$	$= 9,97299$	$\log \cos 25^0$	$= 9,95728$
d. E. $lg \sin 10^0$	$= 0,76033$	d. E. $\log \sin 12^0 30'$	$= 0,66466$
" " " "	$= 0,76033$	" " " "	$= 0,66466$
k	$= 9,36222$	k	$= 9,36222$
y	$= 0,04556$	y	$= 9,94065$
			$= -0,05935$

Der wahre Werth von $\tau_,$ liegt demnach etwas näher an 20^0 als an 25^0, also zwischen 22^0 und 23^0; man findet durch eine gleiche Rechnung

3) für $\tau_, = 22^0$,	4) für $\tau_, = 23^0$
$y = 0,00122$,	$y = -0,01968$

und schließt daraus, daß der gesuchte Werth von $\tau_,$ den Unterschied zwischen 22^0 und 23^0 im Verhältniß $1:20$ theilt, also nahe an $22^0 3'$ liegt. Die weitere Rechnung gibt

5) für $\tau_, = 22^0 2'$	6) für $\tau_, = 22^0 4'$
$y_, = 0,00051$	$y_, = -0,00020$

und zeigt, daß $\tau_,$ im Verhältnisse $2:5$ näher an $22^0 2'$ liegt, und demnach gleich $22^0\ 3',4$ gesetzt werden kann, wie es denn auch durch wiederholte Berechnung von y bestätigt wird. Man hat auch eine weitere Bestätigung in der doppelten Berechnung von z_0, nämlich

$\log a$	$= 1,90309$	$\log \frac{1}{2} h$	$= 0,90309$
d. E. $lg\ tang(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\tau_1)$	$= 0,76579$	$lg \cos \tau_,$	$= 9,97799$
d. E. $\log M$	$= 9,63778$	d. E. $\log \sin \frac{1}{2}\tau_,$	$= 0,71829$
$\log z_0$	$= 2,30666$	" " "	$= 0,71829$
z_0	$= 202^m,61$,	$\log z_0$	$= 2,30666$,

welche eine vollkommene Uebereinstimmung der Werthe von $\log z_0$ ergibt.

Wenn statt der Senkung h die ursprüngliche Länge 2l des biegsamen Fadens und die Lage der beiden Aufhängepunkte wie oben gegeben ist, so muß streng genommen zuerst die Verlängerung 2ι berechnet werden, welche durch das Aufhängen erzeugt wird. Dazu hat man nach Gleichung (e) in §. 66 und mit dem vorhergehenden Werthe von T den Ausdruck:

$$\iota = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{l'} ds \,.\, p\mathfrak{z} = \frac{l' p \mathfrak{z}}{\varepsilon},$$

worin l′ die Länge des einen Theiles AB, Fig. 21, der aufgehängten Kettenlinie und $\mathfrak{z}$ die Ordinate seines Schwerpunktes bezeichnet, und welcher ausspricht, daß die Verlängerung dieselbe ist, als wenn die Spannung des Fadens AB in allen Punkten derjenigen gleich gemacht wird, welche in dem Punkte J stattfindet, der mit dem Schwerpunkte S, von AB in derselben Horizontalen liegt, also wenn man den gewichtlos vorausgesetzten Faden AB in lothrechter Lage durch ein am untern Ende angebrachtes Gewicht $p\mathfrak{z}$ spannen würde.

Für die Ordinate $\mathfrak{z}$ haben wir in §. 33 des zweiten Buches den Werth:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2} z_{,} + \frac{z_0}{2l'} x_{,}$$

gefunden, worin $z_{,}$ und $x_{,}$ die Coordinaten vom Endpunkte des Bogens l′ bezeichnen, also Größen, welche ebensowenig als der Parameter z_0 unmittelbar gegeben sind; es würden daher die Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser letztern Größe dienen sollen, viel zu complicirt, wenn man dabei die Verlängerung sogleich mit berücksichtigen wollte. Man wird viel besser thun, wenn man diese in allen Fällen sehr kleine Verlängerung zuerst vernachlässigt *), den Parameter z_0 auf die nachfolgende Weise mit der gegebenen Länge bestimmt, und dann, wenn es nothwendig erscheint, für die darauf folgende Gestalt des Fadens die Ordinaten $\mathfrak{z}_{,}$ und $\mathfrak{z}_{,,}$ der Schwerpunkte der vom Scheitel anfangenden beiden Bogentheile berechnet, um damit die Verlängerung des Fadens zu finden und den vorherbestimmten Werth von z_0 zu verbessern.

---

*) Diese Verlängerung ist selbst für Fäden aus vulkanisirtem Kautschuk, dem dehnbarsten Stoff, den man bis jetzt kennt, noch eine sehr geringe, da für ihn das Verhältniß $\frac{p}{\varepsilon}$ doch noch einen ziemlich kleinen Werth hat.

Nehmen wir also an, die wirkliche Länge $2l'$ des Fadens sei bekannt, und l_1 und l_2 seien die unbekannten Längen der beiden vom Scheitel anfangenden Bogentheile BA und BC, Fig. 21, so daß man hat $l_1 + l_2 = 2l'$; ferner sei $2a = AD$ der horizontale und $c = CD$ der verticale Abstand der Aufhängspunkte A und C, von denen der erste wieder aus den beiden Theilen $a_1 = AF$ und $a_2 = FD$ besteht, so daß $2a = a_1 + a_2$. Wir haben dann gemäß der Gleichung (n) die Beziehungen:

$$l_1 = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_1}{z_0}} - e^{-\frac{a_1}{z_0}}\right) \quad , \quad l_2 = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_2}{z_0}} - e^{-\frac{a_2}{z_0}}\right) ,$$

ferner wie im vorhergehenden Falle

$$h + z_0 = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_1}{z_0}} + e^{-\frac{a_1}{z_0}}\right) \quad , \quad h + c + z_0 = z_0 \left(e^{\frac{a_2}{z_0}} + e^{-\frac{a_2}{z_0}}\right)$$

und ziehen daraus als Summe der beiden ersten und als Differenz der beiden letztern die neuen Gleichungen:

$$l_1 + l_2 = 2l' = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_1}{z_0}} - e^{-\frac{a_1}{z_0}} + e^{\frac{a_2}{z_0}} - e^{-\frac{a_2}{z_0}}\right) ,$$

$$c = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{\frac{a_2}{z_0}} + e^{-\frac{a_2}{z_0}} - e^{\frac{a_1}{z_0}} - e^{-\frac{a_1}{z_0}}\right) .$$

Daraus folgt weiter

$$2l' + c = z_0 \left(e^{\frac{a_2}{z_0}} - e^{-\frac{a_1}{z_0}}\right) \quad , \quad 2l' - c = z_0 \left(e^{\frac{a_1}{z_0}} - e^{-\frac{a_2}{z_0}}\right)$$

und

$$4l'^2 - c^2 = z_0^2 \left(e^{\frac{2a}{z_0}} + e^{-\frac{2a}{z_0}} - 2\right) = z_0^2 \left(e^{\frac{a}{z_0}} - e^{-\frac{a}{z_0}}\right)^2 ;$$

macht man also $\frac{a}{z_0} = u$, woraus $z_0 = \frac{a}{u}$ folgt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{u}\left(e^{u} - e^{-u}\right) = \sqrt{\frac{4l'^2 - c^2}{a^2}} ,$$

welche in Bezug auf u aufzulösen ist, und dazu in die zwei Gleichungen:

$$y = e^{u} - e^{-u} \quad , \qquad y = u\sqrt{\frac{4l'^2 - c^2}{a_2}}$$

zerlegt werden kann.

Hat man mittels dieser Gleichungen den Werth von u und daraus z_0 berechnet, also die Lage der x=Achse in Bezug auf die Aufhängspunkte bestimmt, so bleibt noch die Lage des Scheitels B oder die Lage der z=Achse, d. h. der Werth von a_1 oder a_2 zu berechnen. Dazu setzt man

$$a_2 = (u + v)\, z_0 \quad , \qquad a_1 = (u - v)\, z_0 ,$$

und findet damit nach dem Vorhergehenden die Beziehung:

$$c = \tfrac{1}{2} z_0 \left(e^{u} - e^{-u}\right)\left(e^{v} - e^{-v}\right)$$

oder die Gleichung:

$$e^{v} - e^{-v} = \frac{2c}{z_0\left(e^{u} - e^{-u}\right)} ,$$

deren rechte Seite nur aus bekannten Größen besteht, und daher leicht in Bezug auf v aufgelöst werden kann.

Nehmen wir z. B. die horizontale Entfernung der Aufhängpunkte $2a = 150^{m}$, die verticale $c = 20^{m}$ und die Länge $2l = 2l' = 200^{m}$, so folgt

$$\frac{\sqrt{(2l + c)(2l - c)}}{a} = \frac{\sqrt{220.180}}{75} = 2,6533 = ku \; ;$$

ferner hat man

für u=1	, e^u=2,7183,	e^{-u}=0,3679,	$e^u - e^{-u}$=2,3504,	ku=2,6533,
„ =1,10,	„ =3,0042,	=0,3329,	„ =2,6713,	„ =2,9186,
„ =1,20,	„ =3,3201,	=0,3012,	„ =3,0189,	„ =3,1840,
„ =1,30,	„ =3,6693,	=0,2725,	„ =3,3968,	„ =3,4493,
„ =1,35,	„ =3,8574,	=0,2592,	„ =3,5982,	„ =3,5820,
„ =1,34,	„ =3,8190,	=0,2618,	„ =3,5572,	„ =3,5555,
„ =1,33,	„ =3,7810,	=0,2645,	„ =3,5165,	„ =3,5290,

es ist also

für $u = 1,33$, $e^u - e^{-u} - ku = -0,0125$,
„ $= 1,34$, e „ $= +0,0017$,

und demnach der gesuchte Werth $u = 1,3388$. In der That findet man für diesen Werth übereinstimmend $ku = e^u - e^{-u} = 3,5523$ und berechnet damit

$$z_0 = \frac{a}{u} = \frac{75}{1,3388} = 56^m,020 ,$$

$$\frac{2c}{z_0\left(e^u - e^{-u}\right)} = \frac{40}{56,020 \cdot 3,5523} = 0,2010 ,$$

wodurch sich die Gleichung:

$$e^{2v} - 0,201\, e^v = 1 ,$$

ergibt, und dann die Werthe folgen

$$e^v = 1,1053 \;,\; v z_0 = 5,609 \;,\; a_1 = 69,391 \;,\; a_2 = 80,609 ,$$

damit berechnen sich die Ordinaten z_1 und z_2 der Aufhängepunkte A und C und die Bogenlängen $AB = l_1$ und $BC = l_2$

$$z_1 = 104^m,78 \;,\; z_2 = 124^m,74 \;,\; l_1 = 88^m,54 \;,\; l_2 = 111^m,45$$

also

$$z_2 - z_1 = c = 19^m,96 \;,\quad l_1 + l_2 = 199^m,99 .$$

Man hat daher für die Coordinaten $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ der Schwerpunkte dieser Bogen die Werthe:

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{1}{2} z_1 + \frac{z_0}{2 l_1} \mathfrak{a}_1 = 74\overset{m}{,}34\,, \quad \mathfrak{z}_2 = \frac{1}{2} z_2 + \frac{z_0}{2 l_2} \mathfrak{a} = 82\overset{m}{,}63\,,$$

und findet demnach, wenn für das Verhältniß $\frac{p}{\varepsilon}$ der ziemlich große Werth $\frac{1}{1000}$ angenommen wird, für die Verlängerungen l_1 und l_2 die Zahlen:

$$l_1 = 88{,}54 . 0{,}07434 = 6\overset{m}{,}582\,, \quad l_2 = 111{,}45 . 0{,}08263 = 9\overset{m}{,}209\,,$$

welche eine Länge $2l' = 215\overset{m}{,}79$ für den aufgehängten Faden geben. Mit dieser neuen Länge muß nun auf demselben Wege wie vorher der genauere Werth für z_0 berechnet, und so fortgefahren werden, bis alle Größen die entsprechende Genauigkeit erhalten haben.

§. 69.

Außer den geometrischen Eigenschaften, welche in §. 67 abgeleitet wurden, besitzt die einfache Kettenlinie noch die beachtenswerthe mechanische Eigenschaft, daß der Schwerpunkt eines beliebigen Bogenstückes derselben tiefer liegt, als der eines gleichlangen Bogens irgend einer andern schweren homogenen Curve, welche durch die beiden Endpunkte jenes Bogens gezogen werden kann.

Es liegt auf der Hand, daß die Curve, deren Schwerpunkt bei gleicher Bogenlänge und denselben Aufhängepunkten eine tiefste Lage hat, nur eine ebene Curve und ihre Ebene nur vertikal gerichtet sein kann; es genügt also in dieser Beziehung, nur Curven zu vergleichen, welche in der durch die gegebenen Aufhängepunkte gelegten Vertikal-Ebene durch diese Punkte gezogen werden können. In dieser Ebene nehmen wir daher eine beliebige lothrechte Gerade als Achse der z, eine beliebige wagrechte als Achse der x an, und bezeichnen die Coordinaten der beiden Aufhängepunkte in Bezug auf diese Achsen mit $x_0\, z_0$ und $x_,\, z_,$, die allen Curven zwischen diesen Punkten gemeinschaftliche Länge mit L und den Abstand ihres Schwerpunktes von der x-Achse mit $\mathfrak{z}$.

Die Gleichung einer solchen Curve wird die Form

$$z = f(x, k)$$

erhalten, worin k eine Größe vorstellt, welche für jede einzelne Curve constant, aber von einer zu andern als veränderlich zu betrachten ist, und von welcher für den Uebergang von einer Curve zu andern z und x willkürliche Functionen vorstellen. Diese Functionen stehen jedoch durch die Gleichung:

$$\frac{\delta z}{\delta k} = f'_x(x, k) \frac{\delta x}{\delta k} = \frac{dz}{dx} \frac{\delta x}{\delta k},$$

welche nach §. 42 der Einleitung das Gesetz für die Aenderung der Coordinaten bei dem Uebergang von einer Curve zur andern ausdrückt, in gegenseitiger Abhängigkeit, so daß nur eines der beiden Uebergangsgesetze $\frac{\delta z}{\delta k}$ oder $\frac{\delta x}{\delta k}$ als gänzlich willkürlich beliebig angenommen werden kann.

Für das Moment des Bogens L in Bezug auf die x=Achse hat man ferner (Buch II., §. 28) den Ausdruck:

$$L\mathfrak{z} = \int_{x_0}^{x_,} dx \,.\, z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

und schließt daraus für die Ordinate $\mathfrak{z}$ des Schwerpunktes von L bei dem Uebergang von einer Curve zur andern das Aenderungsgesetz:

$$L \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta k} = \frac{\delta . \int_{x_0}^{x_,} dx \,.\, z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k} = \int_{x_0}^{x} dx . \frac{\delta . z \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{\delta k},$$

welches, wenn die angedeutete Variation theilweise ausgeführt und die Versetzung der Zeichen d und δ, d. h. die Umänderung in der Ordnung der Uebergänge von einem Punkt zu einem benachbarten vorgenommen wird, auch die Form annimmt:

$$L \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta k} = \int_{x_0}^{x_,} dx . \left[\frac{\delta z}{\delta k} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \frac{z \frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} . \frac{d . \frac{\delta z}{\delta k}}{dx} \right].$$

Das zweite Glied der eingeklammerten Größe unter dem Integralzeichen kann theilweise integrirt werden und dadurch ergibt sich der Ausdruck:

$$L\frac{\delta z}{\delta k} = \overset{z_,}{\underset{z_0}{\Delta_z}} . \frac{z\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \frac{\delta z}{\delta k} - \int_{x_0}^{x_,} dx . \frac{\delta z}{\delta k} D_x \frac{z\frac{dz}{dk}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_,} dx . \frac{\delta z}{\delta k} \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} ,$$

in welchem das Aenderungsgesetz von $z\frac{dz}{dx}\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ in Bezug auf x durch das Zeichen D_x angedeutet ist, und welcher sich mit der Beachtung, daß das Uebergangsgesetz $\frac{\delta z}{\delta k}$ an den beiden Grenzen Null wird, weil diese Grenzen als feste Punkte allen Curven gemeinschaftlich sind, daß man also

$$\overset{z_,}{\underset{z_0}{\Delta_z}} . \frac{z\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \frac{\delta z}{\delta k} = 0$$

hat, auf den einfacheren

$$L\frac{\delta z}{\delta k} = \int_{x_0}^{x_,} dx . \left(\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} - D_x \frac{z\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} \right) \frac{\delta z}{\delta k}$$

zurückführen läßt.

Soll nun dieser Werth ein kleinster werden, so muß die rechte Seite auf Null zurückkommen, und dieß ist wegen des willkürlichen Factors $\frac{\delta z}{\delta k}$ nur möglich, wenn die eingeklammerte Größe für jeden Werth von x oder für jeden Punkt der Curve Null wird. Man erhält daher für die betreffende Curve die Bedingungsgleichung:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}-\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+z\frac{d^2z}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}+\frac{z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^3}}=0,$$

woraus nach einigen leichten Reductionen die einfache Gleichung:

A.) $$1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-z\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

als die bezeichnende Eigenschaft derjenigen Curve hervorgeht, deren Schwerpunkt die tiefste Lage hat.

Bringt man aber diese Gleichung unter die Form:

$$z=\frac{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

und vergleicht die rechte Seite derselben mit dem allgemeinen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ebener Curven:

$$\varrho=\frac{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dx^2}}$$

so findet man leicht die Beziehung:

$$\varrho=z\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=z\frac{ds}{dx},$$

welche mit der Gleichung (o) in §. 67 identisch ist und zeigt, daß die durch die Gleichung (A) ausgedrückte Eigenschaft der einfachen Kettenlinie angehört.

Man erhält übrigens aus der Gleichung (A) leicht unmittelbar die Gleichung der betreffenden Curve, wenn man

$$\frac{dz}{dx}=p\;,\quad \frac{dx}{dz}=\frac{1}{p}\;,\quad \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=p\frac{dp}{dz}$$

setzt und die genannte Gleichung in

$$\frac{dz}{dp} = \frac{p}{1+p^2} z$$

umwandelt; denn man zieht daraus als erstes Integral unter der Voraussetzung, daß man $p = \frac{dz}{dx} = 0$ hat, wenn $z = z_0$ ist,

$$logn \frac{z}{z_0} = \frac{1}{2} logn (1 + p^2) ,$$

oder in andern Formen

$$z = z_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} , \quad p = \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{z^2}{z_0^2} - 1} ,$$

übereinstimmend mit den frühern in §. 67 erhaltenen Differential-Gleichungen, aus welchen wir die Gleichung der Kettenlinie abgeleitet haben.

§. 70.

Um auch eine Anwendung unserer Gleichungen (D) in §. 66 auf einen Fall zu geben, wo das geometrische Gewicht p nicht constant ist, wollen wir die einfache Voraussetzung machen, daß dieses Gewicht dem Cosinus des Winkels τ proportional sei, welchen die Tangente in dem betreffenden Punkte mit der wagrechten Achse der x bildet, daß man also hat

$$p = p_0 \cos \tau = p_0 \frac{dx}{ds} ,$$

wenn p_0 das geometrische Gewicht im Scheitel vorstellt, wo $\tau = 0$ ist.

Unter dieser Voraussetzung geben die beiden ersten der Gleichungen (D) die Beziehungen:

$$T \frac{dx}{ds} = T_0 , \quad T \frac{dz}{ds} = \int_0^s ds \, . \, p_0 \frac{dx}{ds} = p_0 x ,$$

für welche wieder der Scheitel als der Punkt $x_0 z_0$ genommen ist, in dem der Faden die Spannung T_0 hat. Macht man dann $T_0 = p_0 h$, und dividirt die zweite der vorstehenden Gleichungen durch die erste, so

erhält man daraus, und wenn $z_0 = 0$ gesetzt wird, so daß der Scheitel selbst Anfang der Coordinaten ist,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x}{h} \;, \quad z = \frac{x^2}{2h} \;, \quad x^2 = 2hz \,.$$

Unter der jetzigen Voraussetzung muß demnach der Faden die Gestalt einer gewöhnlichen Parabel erhalten, wenn er im Gleichgewicht bleiben soll, und man kann sich diesen Fall in solcher Weise vorstellen, daß an einem gewichtlosen Faden ABC, Fig. 22, ein zweiter aber schwerer homogener Faden DE mittels beliebig vieler verticaler gewichtloser Fäden ab aufgehängt sei und dabei die Form einer Geraden erhalten soll; p_0 wird dann das constante geometrische Gewicht des Fadens DE sein.

Für die Spannung T erhält man durch die vorhergehenden Gleichungen den Werth:

$$T = T_0 \frac{ds}{dx} = T_0 \sqrt{1 + \frac{x^2}{h^2}} = p_0 \sqrt{h^2 + x^2}$$

und damit folgt nach (E) in §. 66 die Verlängerung l des Fadens vom Scheitel an

$$l = \int_0^s ds \,.\, \frac{T_0}{\varepsilon} \frac{ds}{dx} = \int_0^x dx \,.\, \frac{T_0}{\varepsilon} \left(\frac{ds}{dx}\right)^2$$

$$= \int_0^x dx \,.\, \frac{T_0}{\varepsilon} \left(1 + \frac{x^2}{h^2}\right) = \frac{T_0}{\varepsilon} x \left(1 + \frac{x^2}{3h^2}\right) .$$

Alle diese Gleichungen sind leicht auf einen gegebenen Fall anzuwenden, weil die Größe h leicht zu bestimmen ist, wenn die Lage der Aufhängepunkte und die tiefste Senkung des Fadens oder auch seine Länge gegeben ist. Ich werde indessen hier nicht näher darauf eingehen, da wir bei der Theorie der Kettenbrücken im folgenden Bande einen allgemeinen Fall untersuchen werden, welcher den einfachen vorhergehenden einschließt.

§. 71.

Eine etwas allgemeinere Anwendung als in den vorhergehenden Untersuchungen, finden unsere Gleichungen (103) bis (107) bei der

Bestimmung der Gestalt eines schweren Fadens, welcher an zwei Punkten befestigt ist, und mit diesen eine gleichförmige Bewegung um eine verticale Achse besitzt. Unter dieser Voraussetzung ergeben sich nämlich aus den in §. 45 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen (100) mit Berücksichtigung der in §. 63 angewendeten Umwandlung der Kräfte $\frac{\delta T_x}{\delta x}$ u. s. f., folgende Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d.T\frac{d\xi}{ds}}{ds}+q(\Xi+\xi\varphi^2)=0\ ,\quad \frac{d.T\frac{d\eta}{ds}}{ds}+q(H+\eta\varphi^2)=0 \\ \frac{d.T\frac{d\zeta}{ds}}{ds}+qZ=0 \end{array}\right\}, \quad (113.$$

für welche die Achse der ζ als Drehungsachse genommen ist und φ die constante Winkelgeschwindigkeit bedeutet, die äußern Kräfte Ξ, H, Z aber noch unbestimmt gelassen sind. Für einen schweren Faden und eine verticale Drehungsachse hat man wieder

$$\Xi=0\ ,\quad H=0\ ,\quad Z=-g$$

und daher die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d.T\frac{d\xi}{ds}}{ds}+q\varphi^2\xi=0\ ,\quad \frac{d.T\frac{d\eta}{ds}}{ds}+q\varphi^2\eta=0\ , \\ \frac{d.T\frac{d\zeta}{ds}}{ds}-gq=0\ , \end{array}\right\} \quad (114.$$

welche auch aus den Gleichungen (103) hervorgehen, wenn man für x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ und für die Kräfte qX, qY die Componenten des geometrischen Bewegungsdruckes $q\varphi^2\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ einführt.

Unter der einfachsten Voraussetzung endlich, daß die beiden Aufhängepunkte in einer und derselben Ebene mit der Drehungsachse liegen und daß dann auch der Faden selbst ganz in dieser Ebene enthalten ist, welche wir als die der $\xi\zeta$ nehmen wollen, kommen die vorstehenden Gleichungen auf zwei, nämlich die erste und dritte zurück, und zeigen,

daß sich der jetzige Zustand des Fadens von dem frühern hauptsächlich durch die horizontale Componente der Spannung unterscheidet, welche nun nicht mehr constant ist, wie im frühern Falle.

Man wird ferner leicht einsehen, daß sich aus den Gleichungen (113) und (114) auf dieselbe Weise, wie aus den Gleichungen (103) die Gleichungen:

$$T_0 - T = \int_{s_0}^{s} ds \, . \, q \left[\Xi \frac{d\xi}{ds} + H \frac{d\eta}{ds} + Z \frac{d\zeta}{ds} + \varphi^2 \left(\xi \frac{d\xi}{ds} + \eta \frac{d\eta}{ds} \right) \right]$$

und

115.) $$T - T_0 = \int_{s_0}^{s} ds \, . \, q \left(g \frac{d\zeta}{ds} - \varphi^2 \xi \frac{d\xi}{ds} \right)$$

ableiten lassen, aus welchen die Spannung unmittelbar in Function der Coordinaten ξ und ζ berechnet werden kann, wenn die Function unter dem Integralzeichen ein vollständiges Aenderungsgesetz darstellt, also namentlich in dem Falle, wo die Dichte q constant ist; man erhält dann einfach

$$T - T_0 = qg(\zeta - \zeta_0) - \tfrac{1}{2} q \varphi^2 (\xi^2 - \xi_0^2) \, .$$

Auch für die verticale Componente der Spannung ergibt sich wie in dem Falle des äußern Gleichgewichtes aus der letzten der Gleichungen (114) der einfache Werth:

$$T \frac{d\zeta}{ds} - T \sin\alpha_0 = gq(s - s_0) \, ;$$

für die horizontale Componente dagegen kann der Werth nicht unmittelbar in Function der Coordinaten oder der Bogen-Entfernung: $s - s_0$ des betreffenden Punktes ausgedrückt werden; man erhält aber den Ausdruck:

$$T_0 \cos\alpha_0 - T \frac{d\xi}{ds} = \int_{s^0}^{s} ds . q\varphi^2 \xi = q(s - s_0) \varphi^2 \xi_{,} \, ,$$

in welchem $\xi_{,}$ die Abscisse des Schwerpunktes von dem Bogen $s - s_0$ bedeutet, und welcher ausspricht, daß die Aenderung der horizontalen Componenten der Spannung dem dynamischen Drucke der in ihrem Mittelpunkte vereinigten Masse $q(s - s_0)$ des Bogens $s - s_0$ gleich ist.

Wenn die anfänglichen Zustände der Art sind, daß der Scheitel der Curve in der Drehungsachse bleibt, so kann man diesen wieder als den Punkt annehmen, dessen Coordinaten ξ_0, ζ_0 sind, und den Bogen s in demselben anfangen lassen, so daß man hat $s_0 = 0$, $\xi_0 = 0$. Macht man dann auch $T_0 = g q \zeta_0$, so erhält man die einfachen Gleichungen:

$$T = q\left(g\zeta_0 - \frac{1}{2}\varphi^2\xi^2\right) \quad , \quad T\frac{d\zeta}{ds} = gqs \ ,$$

und daraus folgt durch Elimination von T

$$2ks\frac{ds}{d\zeta} = 2k\zeta - \xi^2 \ ,$$

worin k für $\frac{g}{\varphi^2}$ steht. Man hat zwar auch noch

$$\frac{d.T\frac{d\xi}{ds}}{ds} = - q\varphi^2\xi \quad \text{und daraus} \quad \frac{d.s\frac{d\xi}{d\zeta}}{ds} = - \frac{\xi}{k} ,$$

allein alle diese Ausdrücke bieten wegen der Vermischung der drei Veränderlichen ξ, ζ und s, welche in gegenseitiger Abhängigkeit stehen, für die weitere Integration unübersteigliche Hindernisse dar, und können nur unter erleichternden Voraussetzungen annäherungsweise weiter behandelt werden.

Läßt man dagegen dieselbe Voraussetzung zu, wie in dem vorher behandelten Falle, nämlich daß die Dichte q dem Cosinus des Winkels τ proportional sein soll, so hat man für einen beliebigen Punkt $q = q_0\frac{d\xi}{ds}$, wenn q_0 die Dichte im Scheitel vorstellt, und es wird demnach unter Beibehaltung der obigen Annahme in Betreff des anfänglichen Zustandes und der Lage der Achsen

$$T\frac{d\xi}{ds} = T_0 - \int_{s_0}^{s} ds \, . \, q_0\varphi^2\xi\frac{d\xi}{ds} = T_0 - \frac{1}{2}q_0\varphi^2\xi^2 .$$

$$T\frac{d\zeta}{ds} = \int_{s_0}^{s} ds \, . \, gq_0\frac{d\xi}{ds} = gq_0\xi \ ;$$

daraus folgt sogleich das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{g q_0 \xi}{g q_0 \zeta_0 - \frac{1}{2} q_0 \varphi^2 \xi^2} = \frac{2k\xi}{2k\zeta_0 - \xi^2},$$

und aus diesem zieht man

$$\zeta - \zeta_0 = k \, logn \frac{2k\zeta_0}{2k\zeta_0 - \xi^2}$$

als die Gleichung der von dem Faden gebildeten Curve. Mit den vorhergehenden Componenten von T erhält man dann leicht die Spannung selbst, während sich im jetzigen Falle der Ausdruck:

$$\frac{dT}{ds} = q_0 \left(g \frac{d\zeta}{ds} - \varphi^2 \xi \frac{d\xi}{ds} \right) \frac{d\xi}{ds}$$

nicht direct integriren läßt. Eine weitere Untersuchung dieses Falles mag dem Interesse des Lesers überlassen bleiben.

§. 72.

Gehen wir nun zur Untersuchung der innern Bewegung eines elastischen Fadens über, welcher sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet.

Die diesem Zustande entsprechenden allgemeinen Gleichungen (78) in §. 38 nehmen unter Zugrundlegung der in §. 63 angewendeten Betrachtungen für einen solchen Faden die Form an:

$$116. \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta . T \frac{dx}{ds}}{\delta s} + q \left(X - \dfrac{d . u_x}{dt} \right) = 0 , \quad \dfrac{\delta . T \frac{dy}{ds}}{\delta y} + q \left(Y - \dfrac{d . u_y}{dt} \right) = 0 , \\ \qquad \dfrac{\delta . T \frac{dz}{ds}}{\delta s} + q \left(Z - \dfrac{d . u_z}{dt} \right) = 0 , \end{array} \right.$$

und gehen dann unter der Voraussetzung, daß die geometrischen Dehnungen desselben sehr klein bleiben zufolge der in §. 44 entwickelten Betrachtungen in die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial . T\dfrac{dx}{ds}}{\partial s} + qX = q\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} \quad , \quad \dfrac{\partial . T\dfrac{dy}{ds}}{\partial s} + qY = q\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} , \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial . T\dfrac{dz}{ds}}{\partial s} + qZ = q\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\end{array}\right\} (117.$$

über, welche den daselbst abgeleiteten Gleichungen (98) entsprechen.

Bei einer materiellen Linie gibt es nur eine bestimmte Richtung des Ueberganges von einem Punkte zu einem andern; es muß daher hier die Richtung der geometrischen Dehnung mit der Uebergangsrichtung (§. 42) also mit der Richtung der Tangente an der von dem Faden gebildeten Curve zusammenfallen; der Winkel ϑ in der Gleichung (b) §. 42 wird Null und man hat demnach für die geometrische Dehnung $\mathfrak{d}$ den Werth:

$$\mathfrak{d} = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{d\mathfrak{y}}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{d\mathfrak{z}}{ds}\frac{dz}{ds} .$$

Sind dann

$$y^{(0)} = f_1(x^{(0)}) \qquad \text{und} \qquad z^{(0)} = f_2(x^{(0)})$$

die Gleichungen für diejenige Form der materiellen Linie, von welcher aus die Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in der Lage der einzelnen Punkte gerechnet werden,

$$y = \varphi_1(x) \qquad z = \varphi_2(x)$$

ihre Gleichungen am Ende der Zeit t, $T^{(0)}$ die Spannung der Linie in dem Punkte dessen Coordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$ und $z^{(0)}$ waren und T diejenige, wenn seine Coordinaten

$$x = x^{(0)} + \mathfrak{x} \quad , \quad y = y^{(0)} + \mathfrak{y} \quad , \quad z = z^{(0)} + \mathfrak{z} \quad (a.$$

geworden sind, so kann man unter der obigen Voraussetzung sehr kleiner Dehnungen, und nach §. 69

$$T = T^{(0)} + \varepsilon\,\mathfrak{d}$$

setzen, wenn wie früher ε den Elasticitätsmodul des betreffenden Fadens und $\mathfrak{d}$ die geometrische Dehnung im Punkte $x\,y\,z$ bezeichnet; man hat ferner

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx^{(0)}}{ds} + \frac{d\mathfrak{x}}{ds} \quad , \quad \text{u. s. f.;}$$

die zu den Achsen parallelen Componenten der Spannung werden daher

$$118.\quad \begin{cases} T\dfrac{dx}{ds} = (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{dx^{(0)}}{ds} + (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{d\mathfrak{x}}{ds}\,, \\[2ex] T\dfrac{dy}{ds} = (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{dy^{(0)}}{ds} + (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{d\mathfrak{y}}{ds}\,, \\[2ex] T\dfrac{dz}{ds} = (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{dz^{(0)}}{ds} + (T^{(0)} + \varepsilon\mathfrak{d})\dfrac{d\mathfrak{z}}{ds}\,, \end{cases}$$

und die geometrische Dehnung $\mathfrak{d}$ kann darin mit Vernachlässigung der sehr kleinen Glieder $\left(\dfrac{d\mathfrak{x}}{ds}\right)^2$, $\left(\dfrac{d\mathfrak{y}}{ds}\right)^2$, $\left(\dfrac{d\mathfrak{z}}{ds}\right)^2$ durch den Werth:

$$119.)\qquad \mathfrak{d} = \frac{d\mathfrak{x}}{ds}\,\frac{dx^{(0)}}{ds} + \frac{d\mathfrak{y}}{ds}\,\frac{dy^{(0)}}{ds} + \frac{d\mathfrak{z}}{ds}\,\frac{dz^{(0)}}{ds}$$

ersetzt werden.

Ebenso lassen sich auch die geometrischen Kräfte qX, qY, qZ mittels der vorhergehenden Beziehungen (a) durch die Coordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ und deren Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ausdrücken, und wenn alle diese Ausdrücke in die Gleichungen (117) eingeführt sind, so hängt die Bestimmung der Bewegungsgesetze der materiellen Linie noch von der Auflösung der Aufgabe ab, für die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ Functionen von $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ und t zu finden, welche diesen Gleichungen und dem anfänglichen Zustande des Fadens Genüge leisten, indem man dabei beachtet, daß nach der Ableitung der Gleichungen (96) in §. 44 die Aenderungsgesetze $\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}$, u. s. f., nur partielle Aenderungsgesetze in Bezug auf t allein ausdrücken, während die Aenderungsgesetze $\dfrac{d.T\dfrac{dx}{ds}}{ds}$, $\dfrac{d\mathfrak{x}}{ds}$, u. s. f., von der Aenderung von t unabhängig sind und nur in Bezug auf die Aenderung von s oder von x bestehen.

§. 73.

Nehmen wir als Anwendung den einfachsten Fall, indem wir voraussetzen, daß ein solcher Faden AB, Fig. 23, an einem unverrückbaren Punkte A befestigt und durch einen zweiten festen Punkt B gezogen sei, und durch eine Kraft P gespannt werde, gegen welche sein Gewicht

vernachlässigt werden kann, daß also dieser Faden in seinem Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Geraden und eine durchaus constante Spannung P besitze. Es sei dann A der Anfangspunkt der Coordinaten, AB die Achse der x und demnach

$$y^{(0)} = 0 \quad , \quad z^{(0)} = 0$$

die Gleichungen seiner Gestalt für das ruhende Gleichgewicht, von welcher wir ausgehen wollen, so daß die Coordinaten eines Punktes m, dessen Lage M in jenem Zustande durch die Abscisse $x^{(0)}$ bestimmt ist, während der Bewegung oder am Ende der Zeit t durch

$$x = x^{(0)} + \mathfrak{x} \quad , \quad y = \mathfrak{y} \quad , \quad z = \mathfrak{z}$$

vorgestellt werden.

Nach diesen Voraussetzungen haben wir

$$T^{(0)} = P \quad , \quad \frac{d\,x^{(0)}}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{d\,y^{(0)}}{ds} = 0 \quad , \quad \frac{d\,z^{(0)}}{ds} = 0 \; ,$$

also nach (119)

$$\mathfrak{d} = \frac{d\,\mathfrak{x}}{ds} = \frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}} \cdot \frac{d\,x^{(0)}}{ds} \; ;$$

es ist aber auch

$$\frac{ds}{d\,x^{(0)}} = \sqrt{\left(1 + \frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,x^{(0)}}\right)^2 + \left(\frac{d\,\mathfrak{z}}{d\,x^{(0)}}\right)^2}$$

und wenn die Quadrate der sehr kleinen Verhältnisse $\frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}}$, $\frac{d\,\mathfrak{y}}{d\,x^{(0)}}$ und $\frac{d\,\mathfrak{z}}{d\,x^{(0)}}$ neben der Einheit vernachlässigt werden

$$\frac{ds}{d\,x^{(0)}} = 1 + \frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}} \quad , \quad \frac{d\,x^{(0)}}{ds} = 1 - \frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}} \; ,$$

also mit gleicher Annäherung einfach

$$\mathfrak{d} = \frac{d\,\mathfrak{x}}{d\,x^{(0)}} \, .$$

Darnach werden dann die Componenten (118) der Spannung T während der Bewegung die Werthe erhalten:

$$\text{b.)}\quad\left\{\begin{aligned} T\frac{dx}{ds} &= \left(P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}\right)\left(1 + \frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}\right),\\ T\frac{dy}{ds} &= \left(P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}\right)\frac{d\mathfrak{y}}{dx^{(0)}},\\ T\frac{dz}{ds} &= \left(P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}\right)\frac{d\mathfrak{z}}{dx^{(0)}},\end{aligned}\right.$$

von welchen der erstere mit Vernachlässigung des kleinen Gliedes $\frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}$ neben der Einheit noch auf den einfacheren

$$T\frac{dx}{ds} = P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dx^{(0)}}$$

zurückgeführt werden kann. Man kann ferner wieder in den Aenderungsgesetzen dieser Componenten in Bezug auf die Aenderung von s diese Veränderliche durch die $x^{(0)}$ ersetzen, und zur Vereinfachung x für $x^{(0)}$ einführen, wodurch dieselben die Form annehmen:

$$\text{c.)}\quad\left\{\begin{aligned} \frac{d.T\frac{dx}{ds}}{ds} &= \varepsilon\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2},\\ \frac{d.T\frac{dy}{ds}}{ds} &= \left(P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dy}\right)\frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2} + \varepsilon\frac{d\mathfrak{y}}{dx}\,\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2},\\ \frac{d.T\frac{dz}{ds}}{ds} &= \left(P + \varepsilon\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\right)\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} + \varepsilon\frac{d\mathfrak{z}}{dx}\,\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}.\end{aligned}\right.$$

Nimmt man endlich an, daß der Faden ursprünglich homogen ist und in seiner ganzen Ausdehnung eine constante Elasticität besitzt, so daß die durch die Kraft P bewirkte geometrische Dehnung auch durchaus constant ist, so kann nach §. 44, Gleichung (97), auch die Dichte q während der Bewegung als constant betrachtet werden. Bezeichnet man dann die Entfernung der beiden Punkte A und B mit L, und das Gewicht des zwischen diesen Punkten liegenden Fadenstückes im gespannten Zustande mit p, so hat man

$$q = \frac{p}{Lg} \,. \qquad \text{(d.}$$

Das obengenannte Fadenstück wird nach Wegnahme der Kraft P auf eine Länge L — l zurückgehen, so daß man hat (§. 65)

$$P = \varepsilon \frac{l}{L-l} \quad , \qquad \varepsilon = P\left(\frac{L}{l} - 1\right)$$

oder unter der Voraussetzung, daß $\frac{L}{l}$ groß genug ist, um die Einheit neben diesem Werthe vernachlässigen zu können, einfach

$$\varepsilon = P \frac{L}{l} \,. \qquad \text{(e.}$$

Führt man nun diese Werthe mit den Werthen (c) in die Gleichungen (117) ein, beachtet, daß darin für unsere Voraussetzung die äußern Kräfte qX, qY und qZ wegfallen, und macht zur Abkürzung

$$\frac{\varepsilon}{q} = \frac{PL}{pl} Lg = a^2 \quad , \qquad \frac{P}{q} = \frac{P}{p} Lg = b^2 \,,$$

so ergeben sich folgende Gleichungen für die innere Bewegung unserer materiellen Linie:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} &= a^2 \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dx^2} \,, \\ \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} &= b^2 \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx^2} + a^2 \left(\frac{d\mathfrak{y}}{dx} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dx^2} + \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx^2} \right) , \\ \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} &= b^2 \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dx^2} + a^2 \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dx} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dx^2} + \frac{d\mathfrak{x}}{dx} \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dx^2} \right) , \end{aligned}\right\} \qquad \text{(120.}$$

welche zeigen, daß die zur Geraden AB parallele Bewegung eines Punktes unabhängig ist von seinen senkrecht zu derselben gerichteten Bewegungen, daß aber diese letztern selbst wesentlich von den erstern abhängen. *)

---

*) Nach den bisher gegebenen Ableitungen der Gleichungen (120) (vergl. Poisson, Traité de mécanique; II, §. 483, Duhamel, Cours de mécanique, II, §. 204; Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des

§. 74.

Die erste der vorhergehenden Gleichungen stellt nur eine einfache Beziehung auf, welche zwischen den Aenderungsgesetzen der Veränderlichen $\mathfrak{x}$ als Function von x und t in Bezug auf jede dieser letztern allein stattfinden muß und kann deßhalb durch sehr viele Functionen von x und t befriedigt werden, nämlich durch alle Functionen von der Form:

$$\mathfrak{x} = f_1 [k(x \pm at)] ,$$

wie man sich leicht durch Differenziren überzeugen wird. Man umfaßt demnach alle Fälle, wenn man

$$\mathfrak{x} = f_1(k_1 x + k_1 at) \pm f_2(k_2 x - k_2 at)$$

---

corps solides §. 42.) erscheinen die beiden letzten derselben in derselben einfachen Form wie die erste, also ihre rechten Seiten auf das erste Glied reduzirt. Man hat dabei den Fehler begangen, für diese beiden Gleichungen das Glied $\varepsilon\mathfrak{d}$ oder $\varepsilon \frac{d\mathfrak{x}}{dx}$ in den beiden letzten der Spannungscomponenten (b) neben P zu vernachlässigen; denn abgesehen davon, daß man $\frac{L}{l}$ sehr groß voraussetzt, daß also auch ε gemäß der Gleichung (e) so groß gegen P sein wird, daß man nicht geradezu $\varepsilon\mathfrak{d}$ gegen P vernachlässigen kann, so müßte doch consequent eine solche Vernachlässigung für alle Spannungscomponenten gültig sein und angenommen werden; damit reduzirt sich aber $T\frac{dx}{ds}$ auf P allein, und die erste der Gleichungen (120) gibt mit der Beachtung, daß für $x = 0$ auch, unabhängig von t, $\mathfrak{x} = 0$ sein muß

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = 0 \quad , \quad \mathfrak{x} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0 ;$$

mit diesen Werthen kommen dann allerdings die beiden letzten der Gleichungen (120) auf die einfachen

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2} \quad , \quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2}$$

zurück; diese sind deßhalb aber auch nicht allgemein richtig, sondern nur für den speziellen Fall, daß für alle Punkte $\mathfrak{x} = 0$ ist, daß also keine longitudinale Bewegung stattfindet oder keine vorausgesetzt wird, wie dieß gewöhnlich bei der Untersuchung der Transversal-Schwingungen gespannter Saiten der Fall ist.

setzt, worin f_1 und f_2 zwei verschiedene willkürliche Functionen andeuten, welche aber für unsere Anwendung so beschaffen sein müssen, daß sie dem anfänglichen Zustande des Fadens genügen können, d. h. sowohl den anfänglichen Werth von $\mathfrak{x}$, als den anfänglichen Werth von

$$\mathfrak{u}_x = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = ak_1 f'_1 (k_1 x + k_1 at) \mp ak_2 f'_2 (k_2 x - k_2 at)$$

auszudrücken vermögen, so daß für jeden beliebigen Punkt die Bedingungen:

$$f_1 (k_1 x) \pm f_2 (k_2 x) = \mathfrak{x}_0$$

und

$$ak_1 f'_1 (k_1 x) \mp ak_2 f'_2 (k_2 x) = \left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)_0$$

befriedigt werden, wenn $\mathfrak{x}_0$ und $\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)_0$ die anfänglichen Werthe von $\mathfrak{x}$ und $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ bezeichnen.

Nehmen wir z. B. die Gleichgewichtslage des Fadens beziehungsweise seiner einzelnen Punkte als die anfängliche Lage, so ist $\mathfrak{x} = 0$, und es muß für alle Werthe von x zwischen 0 und L der Gleichung:

$$f_1 (k_1 x) \pm f_2 (k_2 x) = 0$$

genügt werden, was offenbar nur möglich ist, wenn man $f_2 = f_1$ und $k_2 = k_1$ macht und das untere Zeichen nimmt, oder mit dem obern Zeichen $k_2 = -k_1$ setzt und für $f_2 = f_1$ eine solche Function wählt, daß $f(-x) = -f(x)$ wird. Damit dann aber innere Bewegung stattfindet, müssen wir den einzelnen Punkten verschiedene anfängliche Geschwindigkeiten $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ ertheilt voraussetzen, welche sich von A bis B stetig ändern, für diese Punkte selbst aber Null sind; wir müssen also für $\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)_0$ dessen Werth nach den vorhergehenden Bedingungen auf

$$\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)_0 = 2akf'(kx)$$

zurückkommt, eine solche Function von x wählen, welche für $x = 0$ und für $x = L$ Null wird, welche aber zugleich auch die Eigenschaft

hat, daß für diese Werthe von x der allgemeine Werth von $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$ immer Null bleibt.

Alle diese Bedingungen werden am einfachsten erfüllt, wenn man

$$f'(kx) = \tfrac{1}{2} Ak \sin kx$$

nimmt, woraus zuerst vermöge der Bedingung: $\sin kL = 0$ für k der Werth:

$$k = i\pi \frac{1}{L}$$

hervorgeht, worin i irgend eine ganze Zahl bedeutet, und dann

$$f(kx) = -\tfrac{1}{2} A \cos kx$$

folgt, so daß man nach dieser Annahme für die innere Bewegung des Fadens die Gleichungen erhält:

$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{1}{2} A\left(\cos i\pi \dfrac{x-at}{L} - \cos i\pi \dfrac{x+at}{L}\right), \\ \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = \dfrac{1}{2} A i\pi \dfrac{a}{L}\left(\sin i\pi \dfrac{x+at}{L} + \sin i\pi \dfrac{x-at}{L}\right), \end{cases}$$

oder in einer andern Form, welche zugleich die Uebereinstimmung dieser Werthe mit den obigen Bedingungen augenfällig macht,

$$\text{f.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = A \sin i\pi \dfrac{x}{L} \sin i\pi \dfrac{at}{L}, \\ \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = A i\pi \dfrac{a}{L} \sin i\pi \dfrac{x}{L} \cos i\pi \dfrac{at}{L}. \end{cases}$$

Man schließt daraus, daß jeder einzelne Punkt des Fadens eine oscillirende Bewegung besitzt, wie die, welche wir in §. 84 des ersten Buches untersucht haben, daß nach einer Zeit

$$t_1 = t + 2\frac{L}{ia}$$

jeder Punkt wieder dieselbe Lage und dieselbe Geschwindigkeit hat, wie am Ende der Zeit t, daß man also für die Dauer einer Oscillation den Werth:

$$\mathfrak{t} = t_1 - t = 2\frac{L}{i\,a}$$

erhält, welcher mit dem durch a ersetzten Ausdruck die Formen:

$$\mathfrak{t} = \frac{2}{i}L\sqrt{\frac{q}{\varepsilon}} = \frac{2}{i}\sqrt{\frac{pL}{g\varepsilon}} = 2\frac{L}{i}\sqrt{\frac{pl}{PL^2g}} = \frac{2}{i}\sqrt{\frac{pl}{gP}}$$

annimmt, und zeigt, daß diese Schwingungsdauer nur von dem Elasticitätscoeffizienten, der Dichte q und dem Längentheile $\frac{L}{i}$ der materiellen Linie abhängt, aber nicht von der Spannung P.

Wenn $i = 1$, so oscilliren alle Punkte zwischen A und B in gleichem Sinne, der Coeffizient A ist das Maaß für die größte positive oder negative Ausweichung des Mittelpunktes der Länge L aus seiner Gleichgewichtslage, ebenso der Coeffizient $\pi A \frac{a}{L}$ das Maaß für die größte Geschwindigkeit dieses Punktes, und die Schwingungsdauer ist

$$\mathfrak{t} = 2L\sqrt{\frac{q}{\varepsilon}} = 2\sqrt{\frac{pL}{g\varepsilon}}; \qquad (g.$$

es macht daher jeder Punkt in einer Sekunde

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varepsilon}{pL}}$$

Schwingungen, wenn der Werth von g auf die Sekunde als Zeiteinheit bezogen vorausgesetzt wird.

Hat man dagegen $i = 2$, so wird für alle Werthe von t nun auch $\mathfrak{x} = 0$, wenn $x = \frac{1}{2}L$ ist; es bleibt also in diesem Falle der Mittelpunkt der Linie AB wie ihre Endpunkte fortwährend in Ruhe, die Coeffizienten A und $2\pi A\frac{a}{L}$ drücken die größte Ausweichung und die größte Geschwindigkeit der Endpunkte des ersten und dritten Viertels der Länge L aus, und der letztere zeigt, daß für gleiche Ausweichung A die größte Vibrationsgeschwindigkeit im jetzigen Falle doppelt so groß sein muß, als im vorhergehenden. Ferner schließt man aus den Gleichungen (f), daß sowohl die Ausweichungen als die Geschwindigkeiten der beiden vorhergenannten Punkte in demselben Augenblicke immer dem

Sinne nach entgegengesetzt sind. Die Schwingungsdauer T wird nun halb so groß, als vorher, also so wie in dem Falle, wo nur die halbe Linie ohne Ruhe= oder Knotenpunkt schwingt. — Für $i = 3$ theilt sich der Faden durch zwei Knotenpunkte in drei Theile, für $i = 4$ in vier Theile u. s. f., von denen jeder nach denselben Gesetzen schwingt, wie für $i = 1$ die ganze Linie.

Aus der ersten der Gleichungen (f) zieht man

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = i\pi \frac{A}{L} \cos i\pi \frac{x}{L} \sin i\pi \frac{at}{L},$$

und damit folgt aus der Gleichung (b) für die Spannung T der Werth

$$T = P + i\pi\varepsilon \frac{A}{L} \cos i\pi \frac{x}{L} \sin i\pi \frac{at}{L},$$

wenn man die vielleicht vorhandenen sehr kleinen zu AB senkrechten Componenten und die sehr kleine Größe $\frac{d\mathfrak{z}}{dx}$ neben 1 vernachlässigt. Wenn $i = 1$ ist, haben daher die Endpunkte A und B allein die größte Spannung auszuhalten, nämlich die Spannung:

$$P + \pi\varepsilon \frac{A}{L} = P\left(1 + \pi \frac{A}{l}\right),$$

aber nicht gleichzeitig, sondern abwechselnd nach einer halben Schwingungsdauer der Punkt A die Spannung $P\left(1 + \pi \frac{A}{l}\right)$, B die Spannung $P\left(1 - \pi \frac{A}{l}\right)$ oder A die Spannung $P\left(1 - \pi \frac{A}{l}\right)$ und B die Spannung $P\left(1 + \pi \frac{A}{l}\right)$; der Unterschied in der Spannung dieser Punkte ist daher

$$2P\pi \frac{A}{l},$$

und wenn man beachtet, daß l selbst sehr klein ist und nicht gar viel größer als $2\pi A$ sein wird, so wird man diesen Unterschied als sehr beträchtlich erkennen und sich daraus die durch die Erfahrung nachgewiesene starke Erschütterung der Befestigungspunkte A und B einer

wenn auch nur schwach gespannten Saite erklären, welche ihrer Länge nach in Schwingungen versetzt wird, und durch sogenannte longitudinale Schwingungen einen Ton gibt.

Die vorhergehenden Untersuchungen lassen sich nämlich mit großer Annäherung auf die innere Bewegung einer Saite anwenden, welche im Vergleich zu ihrer Länge AB sehr dünn ist, welche also nahezu wie eine materielle Linie betrachtet werden kann. Die Höhe des musikalischen Tones, welchen eine solche Saite gibt, steht bekanntlich im geraden Verhältnisse der Anzahl ihrer Schwingungen in einer und derselben Zeit; er kann daher einfach durch den Werth

$$n = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{g\varepsilon}{pL}} = \frac{i}{2L}\sqrt{\frac{\varepsilon}{q}} = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{gP}{pl}}$$

mathematisch ausgedrückt und daraus mittels der Gegebenen p, L und ε berechnet werden. Für $i = 1$ erhält man den Grundton der Saite, für $i = 2$ die erste Octave denselben, für $i = 3$ die Quinte von dieser Octav, für $i = 4$ die zweite Octave, u. s. f. Nehmen wir z. B. eine Saite von 1 Meter Länge, welche 0,9 Gramm wiegt, und durch 10 Kilogramm um $\frac{1}{1000}$ ihrer Länge gedehnt wird, so haben wir in den obigen Ausdruck für n die Werthe:

$$g = 9{,}809^{m}\ , \quad P = 10000^{gr}\ , \quad p = 0{,}9^{gr}\ , \quad l = 0{,}001^{m}$$

einzuführen, wodurch sich für $i = 1$, also für den Grundton

$$n = 5220$$

ergibt; diese Saite wird demnach in 1 Sekunde 5220 Längenschwingungen machen und sehr nahe den Ton geben, welcher in der Musik das fünf gestrichene e genannt wird, wenn man für das eingestrichene a (das a der Stimmgabel) 430 Schwingungen annimmt.

§. 75.

Ganz ähnlichen Gesetzen sind die Quer- oder Transversal-Schwingungen der Saiten unterworfen, welche entweder durch Streichen derselben senkrecht zu ihrer Länge oder durch ein Ausbiegen der Saite aus ihrer Gleichgewichtslage und ein rasches Zurückschnellenlassen hervorgerufen und besonders zur Erzeugung musikalischer Töne benützt werden.

In beiden Fällen kann $\mathfrak{x}$ also auch $\frac{d\mathfrak{x}}{dx}$ und $\frac{d^2\mathfrak{x}}{dx^2}$ gleich Null angenommen werden; *) wenn wir also die Ebene des Striches oder der anfänglichen Ausbiegung als Ebene der xy annehmen, so wird die zweite der Gleichungen (120) unter der Form:

i.) $$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2}$$

die Gesetze der Bewegung der Saite enthalten. Die Integrale dieser Gleichung werden nun die Form:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{y} &= f_1(k_1 x + k_1 bt) \pm f_2(k_2 x - k_2 bt) \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} &= bk_1 f'_1(k_1 x + k_1 bt) \mp bk_2 f'_2(k_2 x - k_2 bt) \end{aligned} \right.$$

erhalten, und für die im vorhergehenden Falle gemachten Voraussetzungen, daß die anfängliche Lage der Saite die Gleichgewichtslage sei und ihr durch das Streichen eine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt werde, durch die Functionen:

k.) $$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{y} &= B \sin i\pi \frac{x}{L} \sin i\pi \frac{bt}{L} \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} &= B i\pi \frac{b}{L} \sin i\pi \frac{x}{L} \cos i\pi \frac{bt}{L} \end{aligned} \right.$$

befriedigt werden. Man schließt daraus, daß die Dauer $\mathfrak{t}'$ einer solchen Querschwingung durch

l.) $$\mathfrak{t}' = 2\frac{L}{ib} = \frac{2L}{i}\sqrt{\frac{q}{P}} = \frac{2}{i}\sqrt{\frac{Lp}{gP}}$$

ausgedrückt wird, daß also in der Zeiteinheit

$$\mathfrak{n}' = \frac{i}{2}\sqrt{\frac{gP}{Lp}}$$

---

*) Strenggenommen ist dieß nur der Fall, wenn die anfängliche Ausbiegung der Saite durchaus symmetrisch ist in Bezug auf ihre Mitte.

solcher Schwingungen gemacht werden und ein musikalischer Ton von entsprechender Höhe erzeugt wird. Dieser Ton hängt also nicht von der Elasticität der Saite, sondern nur von ihrer Spannung ab.

Für $i = 1$ schwingen alle Punkte der Saite bis auf die festen Endpunkte derselben; sie bildet also in irgend einem Augenblicke eine halbe Sinuscurve und gibt ihren Grundton

$$n' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gP}{Lp}},$$

welcher zu dem Grundton der Längenschwingungen in dem durch die Erfahrung bestätigten Verhältnisse:

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{1}{L}}$$

steht. Für die obige Saite ergibt sich darnach bei einer Spannung von 10 Kil. die Schwingungszahl

$$n' = 165$$

oder nahe der Ton, welcher in der Musik einfach mit e bezeichnet wird und der um 5 Octaven tiefer ist, als der obenberechnete; denn man hat

$$\sqrt{\frac{1}{L}} = \sqrt{0,001} = \frac{1}{31,62..},$$

also nahezu

$$n = 2^5 . n' .$$

Für $i = 2$, bleibt die Mitte der Saite in Ruhe oder bildet einen Schwingungsknoten; die Saite selbst hat also in irgend einem Augenblicke die Gestalt einer ganzen Sinuscurve, da immer die eine Hälfte im Sinne der positiven y, die andere im Sinne der negativen ausgebogen erscheint; der Ton der Saite ist die Octave des Grundtons. Für $i = 3$ bilden sich zwei Schwingungsknoten, und der Ton erhebt sich zur Quinte von dem vorhergehenden; u. s. f. Bei langen und langsam schwingenden Saiten lassen sich die Schwingungsknoten mit bloßem Auge wahrnehmen; bei schnellschwingenden macht man sie durch sogenannte Reiterchen sichtbar, welche überall rasch abgeworfen werden,

wo die Saite, während sie tönt, in Bewegung ist, während sie an den Knotenpunkten sitzen bleiben. Die Theilung der Saite läßt sich leicht dadurch bewerkstelligen, daß man sie während des Streichens in dem Theilungspunkte, welcher einem Ende zunächst liegt, leicht mit dem Finger berührt.

Nehmen wir nun den Fall an, daß man der Saite eine anfängliche Ausbiegung gibt und dann sich selbst überläßt, daß also für $t=0$ die Geschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$ für alle Punkte Null sei und die Ordinate $\mathfrak{y}$ eine beliebige Function von x, nur von der Art, daß sie sowohl für $x=0$, wie für $x=L$ Null wird. Für diesen Fall hat man also die Bedingungen:

$$\mathfrak{y} = \varphi(x) = f_1(k_1 x) \pm f_2(k_2 x) ,$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \quad 0 \quad = k_1 f'_1(k_1 x) \mp k_2 f'_2(k_2 x) ,$$

von welcher die zweite wieder auf die Bedingungen:

$$k_1 = k_2 \;,\quad f'_1(u) = f'_2(u) \quad \text{oder} \quad k_2 = -k_1 \;,\quad f'_2(u) = -f'_1(u)$$

also auch, da es sich hier nur um Formen handelt,

1.) $$f_1(kx) = \tfrac{1}{2}\varphi(x)$$

führt. Damit ergeben sich für die Bewegung der Saite die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{y} &= f[k(x+bt)] + f[k(x-bt)] , \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} &= kbf'[k(x+bt)] - kbf'[k(x-bt)] , \end{aligned}\right.$$

welche aber auch noch der Bedingung Genüge zu leisten haben, daß für jeden Werth von t sowohl $\mathfrak{y}$ als $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$ Null wird, wenn man darin $x=0$ oder $x=L$ setzt. Es kann daher in diesen Gleichungen nur dann $f(kx+kbt)$ unmittelbar durch $\tfrac{1}{2}\varphi(x+bt)$ ersetzt werden, wenn die gegebene Function $\varphi(x)$ selbst den letztern Bedingungen zu entsprechen vermag. Dieß ist z. B. der Fall, wenn man

$$\varphi(x) = B \sin i\pi \frac{x}{L},$$

setzt, worin i eine ganze Zahl bedeutet; denn man hat dann

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} B \left(\sin i\pi \frac{x+bt}{L} + \sin i\pi \frac{x-bt}{L} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{2} i\pi \frac{B}{L} \left(\cos i\pi \frac{x+bt}{L} - \cos i\pi \frac{x-bt}{L} \right) \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} y &= B \sin i\pi \frac{x}{L} \cos i\pi \frac{bt}{L} \\ \frac{dy}{dt} &= -i\pi \frac{B}{L} b \sin i\pi \frac{x}{L} \sin i\pi \frac{bt}{L} \end{aligned}\right\} \quad (m.$$

und diese Gleichungen leisten unsern Bedingungen augenscheinlich Genüge; sie sind auch im Grunde dieselben, wie die Gleichungen (k) nur mit dem Unterschiede, daß hier die Zeit t mit der größten positiven Ausweichung der Saite aus ihrer Gleichgewichtslage anfängt, während dort der Anfang der Zeit für den im Sinne der positiven y stattfindenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage bestimmt, also um ein Viertel der Schwingungsdauer früher angenommen ist. Es gehen daher die Gleichungen (m) aus den Gleichungen (k) hervor, wenn man in diesen

$$t = t' + \frac{1}{4} t' = t' + \frac{1}{2} \frac{L}{ib}$$

einführt.

Wenn dagegen die gegebene Function $\varphi(x)$ nicht selbst den zuletzt genannten Bedingungen genügen kann, so muß man der Function $f_1(kx)$ in der Gleichung (l) eine solche Form geben, daß diese Gleichung und jene Bedingungen befriedigt werden, z. B. dadurch, daß man diese Function aus mehreren Gliedern zusammensetzt, von denen jedes einzelne den betreffenden Bedingungen genügt, und deren Summe für $t = 0$ der gegebenen Function $\varphi(x)$ gleich wird.

Man wird sich nämlich leicht überzeugen, daß die ursprüngliche Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = b^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

und die Bedingungen: $\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = 0$ für $t = 0$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$ und $\mathfrak{y} = 0$ für $x = 0$ und $x = L$ und für jedes t, nicht blos durch die Functionen (m) befriedigt werden, worin i einen einzigen beständigen Werth hat, sondern auch durch eine beliebige Anzahl solcher Glieder, worin i verschiedene Werthe hat, also durch die Functionen:

$$\mathfrak{y} = B_1 \sin i_1 \pi \frac{x}{L} \cos i_1 \pi \frac{bt}{L} + B_1 \sin i_2 \pi \frac{x}{L} \cos i_2 \pi \frac{bt}{L}$$
$$+ B_3 \sin i_3 \pi \frac{x}{L} \cos i_3 \pi \frac{bt}{L} + \text{etc.}$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = -\frac{\pi b}{L}\left[i_1 B_1 \sin i_1 \pi \frac{x}{L} \sin i_1 \pi \frac{bt}{L} + i_2 B_2 \sin i_2 \pi \frac{x}{L} \sin i_2 \pi \frac{bt}{L}\right.$$
$$\left. + i_3 B_3 \sin i_3 \pi \frac{x}{L} \sin i_3 \pi \frac{bt}{L} + \text{etc.}\right],$$

worin i_1, i_2, i_3, etc. beliebige ganze Zahlen vorstellen. Auch zeigt die Erfahrung, daß eine Saite mehrere Töne zugleich geben kann, und zwar die sogenannten harmonischen Töne, indem nicht nur die Saite im Ganzen schwingt, wie für $i = 1$, sondern auch jede Hälfte, jedes Drittheil, u. s. f. für sich noch besondere Schwingungen macht. Am leichtesten erhält man durch Streichen gleichzeitig den Grundton und die Octave; die so tönende Saite hat dann in der größten Ausweichung aus der Gleichgewichtslage die in Fig. 24 dargestellte Gestalt, und die Gleichungen ihrer Bewegung haben die Form:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{y} &= B_1 \sin \pi \frac{x}{L} \cos \pi \frac{bt}{L} + B_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} \cos 2\pi \frac{bt}{L} \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} &= -\frac{\pi b}{L}\left(B_1 \sin \pi \frac{x}{L} \sin \pi \frac{bt}{L} + 2B_2 \sin 2\pi \frac{x}{L} \sin 2\pi \frac{bt}{L}\right). \end{aligned}\right.$$

Jedes der beiden Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichungen gibt demnach gleichsam einen Ton für sich, und es hängt von der Größe der Coeffizienten B_1 und B_2 ab, welcher der stärkere von beiden Tönen ist. Nimmt man an, daß die Stärke eines Tones dem Quadrat der Vibrationsgeschwindigkeit proportional ist, so verhalten sich die beiden Töne der Stärke nach wie B_1^2 zu $4B_2^2$; sie tönen also beide gleich stark, wenn $B_2 = \frac{1}{2}B_1$, und es wird der Grundton oder die Octave vorherrschen, je nachdem B_1 größer oder kleiner als $2B_2$ ist.

Darnach können wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{y} &= \sum_{i=1}^{i=\infty} . B_i \sin i\pi \frac{x}{L} \cos i\pi \frac{bt}{L} \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} &= -\frac{\pi b}{L} \sum_{i=1}^{i=\infty} . i B_i \sin i\pi \frac{x}{L} \sin i\pi \frac{bt}{L}\end{aligned}\right\} \quad (n.$$

als die allgemeinsten Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = b^2 \frac{d^2\mathfrak{y}}{dx^2}$$

unter denen, welche unsern Bedingungen über den anfänglichen Zustand der Saite entsprechen, aufstellen, und es wird sich noch darum handeln, die Coeffizienten B_i so zu bestimmen, daß man hat

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} . B_i \sin i\pi \frac{x}{L} = \varphi(x) , \quad (o.$$

wenn wie oben $\mathfrak{y} = \varphi(x)$ die Gestalt der anfänglichen Ausbiegung der Saite ausdrückt, für welche $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$ Null ist. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn man

$$B_i = \frac{2}{L} \int_0^L du . \varphi(u) \sin i\pi \frac{u}{L} \quad (p.$$

nimmt, dabei aber beachtet, daß dieses bestimmte Integral in mehrere Theile zerlegt werden muß, wenn die anfängliche Ausbiegung der Saite nicht eine stetige Curve bildet, sondern aus Theilen verschiedener Curven besteht. *)

---

*) Was den Beweis dieses Satzes betrifft, so muß für denselben auf die Lehrbücher der Analysis verwiesen werden. Man wird sich übrigens leicht überzeugen, daß der Ausdruck (p) auch dem Falle genügt, wo $\varphi(x)$ die einfache Form:

$$\varphi(x) = H \sin h\pi \frac{x}{L}$$

hat, indem dann alle B_i für $i >$ oder $<$ h Null werden, also nur $B_h = H$ übrig bleibt; darin liegt aber auch der Grund jener Gleichung (p), da nach (o) $\varphi(x)$ nur aus Gliedern von der vorhergehenden Form besteht.

Nehmen wir z. B. den oft vorkommenden Fall, daß die Saite durch Anzupfen (pizzicato) zum Tönen gebracht wird, daß sie also in der anfänglichen Ausbiegung aus zwei Geraden besteht, welche einen sehr stumpfen Winkel einschließen. Seien f die Ordinate des Scheitels dieses Winkels, m und n die Längen der beiden Schenkel oder ihrer Projectionen auf die Gleichgewichtslage, also $L = m + n$, und

$$y = f\frac{x}{m} \quad \text{und} \quad y = f\frac{L}{n}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

die Gleichungen der beiden Schenkel, von denen aber die erste nur von $x = 0$ bis $x = m$, und die zweite nur von $x = m$ bis $x = L$ gültig ist: für diesen Fall hat man dann

$$B_i = \frac{2}{L}\int_0^m du \,.\, f\frac{u}{m}\, \sin i\pi\frac{u}{L} + \frac{2}{L}\int_m^L du \,.\, f\frac{L}{n}\left(1 + \frac{u}{L}\right) \sin i\pi\frac{u}{L}$$

zu nehmen und findet so nach den gehörigen Reductionen

$$B_i = 2f\frac{L^2}{m\,n\,i^2\pi^2}\sin i\pi\frac{m}{L}\,.$$

Man kann dann noch

$$m = \tfrac{1}{2}L + k \quad , \quad n = \tfrac{1}{2}L - k$$

setzen, wodurch der vorstehende Ausdruck sich in

$$B_i = 8f\frac{L}{L^2 - 4k^2}\cdot\frac{1}{i^2\pi^2}\left(\sin\frac{i}{2}\pi\cos i\pi\frac{k}{L} + \cos\frac{i}{2}\pi\sin i\pi\frac{k}{L}\right)$$

auflöst, und für ein gerades $i = 2i'$ auf

$$B_{2i'} = 8f\frac{L^2}{L^2 - 4k^2}\cdot\frac{1}{4i'^2\pi^2}\cos i'\pi\sin 2i'\pi\frac{k}{L}$$

und für ein ungerades $i = 2i' + 1$ auf

$$B_{2i'+1} = 8f\frac{L^3}{L^2 - 4k^2}\cdot\frac{1}{\pi^2(2i'+1)^2}\cos i'\pi\cos(2i'+1)\pi\frac{k}{L}$$

zurückkommt. Die Gleichungen (n) nehmen damit die Form an:

$$\mathfrak{y} = 8f\pi^2(L^2-4k^2)\left\{\begin{array}{l} \cos\pi\frac{k}{L}\sin\pi\frac{x}{L}\cos\pi\frac{bt}{L} \\ -\frac{1}{4}\sin2\pi\frac{k}{L}\sin2\pi\frac{x}{L}\cos2\pi\frac{bt}{L} \\ -\frac{1}{9}\cos3\pi\frac{k}{L}\sin3\pi\frac{x}{L}\cos3\pi\frac{bt}{L} \\ +\frac{1}{16}\sin4\pi\frac{k}{L}\sin4\pi\frac{x}{L}\cos4\pi\frac{bt}{L} \\ +\frac{1}{25}\cos5\pi\frac{k}{L}\sin5\pi\frac{x}{L}\cos5\pi\frac{bt}{L} \\ -\text{etc.} \end{array}\right\},$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{dt} = -8f\pi^2(L^2-4k^2)\left\{\begin{array}{l} \cos\pi\frac{k}{L}\sin\pi\frac{x}{L}\sin\pi\frac{bt}{L} \\ -\frac{1}{2}\sin2\pi\frac{k}{L}\sin2\pi\frac{x}{L}\sin2\pi\frac{bt}{L} \\ -\frac{1}{3}\cos3\pi\frac{k}{L}\sin3\pi\frac{x}{L}\sin3\pi\frac{bt}{L} \\ +\frac{1}{4}\sin4\pi\frac{k}{L}\sin4\pi\frac{x}{L}\sin4\pi\frac{bt}{L} \\ +\frac{1}{5}\cos5\pi\frac{k}{L}\sin5\pi\frac{x}{L}\sin5\pi\frac{bt}{L} \\ -\text{etc.} \end{array}\right\},$$

und zeigen, daß die Saite in diesem Falle alle auf einanderfolgenden harmonischen Töne gibt, daß sich aber die Intensitäten dieser Töne wie

$$\cos^2\pi\frac{k}{L} : \frac{1}{4}\sin^2 2\pi\frac{k}{L} : \frac{1}{9}\cos^2 3\pi\frac{k}{L} : \frac{1}{16}\sin^2 4\pi\frac{k}{L} : \text{etc.}$$

verhalten, z. B. wenn die Saite in der Mitte angezupft wird und $k=0$ ist, wie

$$1 : 0 : \frac{1}{9} : 0 : \frac{1}{25} : 0 : \text{etc.}$$

für $k=\frac{1}{4}L$ dagegen, d. h. wenn die Saite am Ende des ersten oder dritten Viertels ihre größte Ausbiegung erhält, wie

$$\frac{1}{2} \quad : \quad \frac{1}{4} \quad : \quad \frac{1}{18} \quad : \quad 0 \quad : \quad \frac{1}{50} \quad : \quad \text{etc.}$$

In dem ersten dieser Fälle wird man deßhalb nur den Grundton deutlich vernehmen, im zweiten aber wird die erste Octave noch schwach mitklingen. Diese höhern Nebentöne verklingen aber auch sehr schnell wegen der unvollkommenen Biegsamkeit der Saite und diese nimmt deßhalb nie mehr die anfängliche Form an, wie es den obigen Gleichungen zufolge nach den Zeiten $t = 2\frac{L}{b}$, $= 4\frac{L}{b}$, etc. sein sollte.

Man sieht aus diesen Gleichungen ferner, daß die Intensität des Tones, welchen man beim Anzupfen vernimmt, sich mit k ändert, und dem Ausdruck:

$$\frac{L^2 b^2}{(L^2 - 4k^2)^2}\left(cos^2 \pi \frac{k}{L} + \frac{1}{4} sin^2 2\pi \frac{k}{L} + \frac{1}{9} cos^2 3\pi \frac{k}{L} + \text{etc.}\right)$$

proportional ist. Für die beiden vorhergehenden Fälle hat man z. B. das Verhältniß:

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \text{etc.} \quad : \quad \tfrac{16}{9}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{50} + \text{etc.}\right)$$

oder nahe wie

$$1,2 : 1,5 = 4 : 5 .$$

Es geht daraus übereinstimmend mit der Erfahrung hervor, daß der Ton um so stärker wird, je weiter von der Mitte man die Saite anzupft, vorausgesetzt, daß dabei die größte Ausbiegung f immer gleich groß bleibt.

Man darf aber dabei nicht übersehen, daß nur für $k = 0$ die Bedingung $\frac{d\xi}{dx} = 0$, welche der vorhergehenden Untersuchung über die Querschwingungen zu Grunde liegt, erfüllt wird, während für andere Werthe von k zugleich Längenschwingungen auftreten, und daher die zweite der Gleichungen (120) in ihrer vollständigen Form zur Anwendung kommen müßte. Diese Längenschwingungen sind wahrscheinlich die Ursache der viel größern Härte des Tones in dem Fall, wo die Saite näher an den Befestigungspunkten angezupft wird; es würde indessen hier zu weit führen, auf eine tiefere Untersuchung dieses Falles einzugehen.

Aus gleichem Grunde muß ich mich auch begnügen, darauf hinzudeuten, daß die Functionen (ɯ) nicht mehr genügen, um die Bewegung

einer Seite darzustellen, welche durch Anschlagen einen Ton gibt, wie dieß bei den Klavieren geschieht. Denn in diesem Falle entsteht durch den Schlag in der Nähe des einen Endpunktes A eine theilweise Ausbiegung der Saite wie in Fig. 25, a, welche an derselben bis zum andern Endpunkte B fortläuft, dort auf die entgegengesetzte Seite sich wendet, wie Fig. 25, b zeigt, und nach A zurückkehrt, hier wieder auf die anfängliche Seite zurücktritt und wieder nach B eilt, u. s. f. und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, daß die doppelte Saitenlänge in der Zeit

$$t = \frac{2L}{b}$$

zurückgelegt wird, d. h. in derselben Zeit, in welcher die ganze Saite eine Schwingung macht, so daß also die Saite in diesem Falle wie bei den vorhergehenden Bewegungen nach dieser Zeit t sich wieder in ihrem ursprünglichen Zustande befindet und daher auch ihren Grundton gibt, wie bei der durch die Gleichungen (k) oder (m) dargestellten Bewegung. Man kann diese Bewegung sehr leicht an einem langen schwach gespannten Seile, auf welches man nahe an dem einen befestigten Ende einen raschen Schlag führt, wahrnehmen und sich durch den Augenschein überzeugen, daß im jetzigen Falle ein Punkt der Saite nicht in ununterbrochener Bewegung eine ganze Schwingung vollendet, sondern nach einer halben positiven Schwingung einige Zeit in Ruhe bleibt, und dann erst eine halbe Schwingung im Sinne der negativen y macht, daß also diese Bewegung nicht durch Functionen von der Form der Gleichungen (m) ausgedrückt werden kann, abgesehen davon, daß es schon dem Gefühle widerstrebt, auch eine solche Bewegung unter Anwendung der Gleichungen (n), (o) und (p) aus einer unendlichen Anzahl Oscillationen zusammenzusetzen.

Bevor ich jedoch diesen Gegenstand verlasse, muß ich noch einen Augenblick bei der Untersuchung der Spannung der Saite und insbesondere ihrer Endpunkte verweilen für den Fall, wo die ganze Saite schwingt, und $\frac{d\mathfrak{x}}{dx} = 0$ ist. Aus den Werthen (b) in §. 72 ergibt sich für diesen Fall

$$T\frac{dx}{ds} = P \quad , \quad T\frac{dy}{ds} = P\frac{d\mathfrak{y}}{dx};$$

die im Sinne der Länge der Saite gerichtete Componente der Spannung ist demnach constant gleich dem spannenden Gewicht; die dazu senkrechte Componente dagegen wird nach der ersten der Gleichungen (m)

$$T\frac{dy}{ds} = P.i\pi\frac{B}{L}\cos i\pi\frac{x}{L}\cos i\pi\frac{bt}{L},$$

und damit folgt für die ganze Spannung der Ausdruck:

$$T = P\sqrt{1 + i^2\pi^2\frac{B^2}{L^2}\cos^2 i\pi\frac{x}{L}\cos^2 i\pi\frac{bt}{L}},$$

oder mit hinreichender Annäherung, da iB gegen L immer sehr klein ist,

$$T = P\left(1 + \frac{1}{2}\pi^2\frac{i^2B^2}{L^2}\cos^2 i\pi\frac{x}{L}\cos^2 i\pi\frac{bt}{L}\right).$$

Der größte Unterschied in der Spannung eines beliegen Punktes ist daher

$$\varDelta T = \frac{1}{2}P\pi^2\frac{i^2B^2}{L^2}\cos^2 i\pi\frac{x}{L},$$

und wird für die Endpunkte, sowie für die Schwingungsknoten, wo er am größten ist,

$$\frac{1}{2}P\pi^2\frac{i^2B^2}{L^2},$$

also sehr klein im Vergleich zu dem bei Längenschwingungen stattfindenden Spannungs-Unterschied.

§. 76.

An die Untersuchung der innern Zustände einer elastischen Linie schließt sich zunächst die Betrachtung der Gesetze für das innere Gleichgewicht und die innere Bewegung einer elastischen Fläche, d. i. eines stetigen Systems von materiellen Punkten, welche sich ohne Einwirkung äußerer Kräfte in irgend einer ebenen oder krummen Fläche durch die zwischen ihnen thätigen gegenseitigen innern Kräfte im Gleichgewichte befinden, jeder Veränderung in ihrer gegenseitigen Lage einen Widerstand entgegensetzen und das Bestreben besitzen, in ihre frühere Lage wieder zurückzukehren, wenn die äußern Wirkungen aufhören. Wie bei der elastischen Linie setze ich voraus, daß die innern Kräfte nur zwischen den zunächst gelegenen Punkten eine wahrnehmbare Intensität haben, daß also jener Widerstand gegen eine Aenderung der gegenseitigen Lage sowie das Bestreben, diese wieder herzustellen, nur

längs der Fläche selbst oder nach einer tangentialen Richtung stattfinden, daß es folglich nur nach tangentialen Richtungen Spannungen in der Fläche geben kann.

Bei der elastischen Linie war die Spannung eine mit Gewicht homogene physische Kraft, weil jeder Schnitt derselben nur einen Punkt gibt. Bei einer Fläche dagegen ist jeder Schnitt eine Linie und die Spannung in einem beliebigen Punkte eines solchen Schnittes wird nun eine auf die Aenderung der Länge sich beziehende geometrische Kraft, während sich die äußern geometrischen Kräfte qX, qY, qZ auf die Aenderung des Flächeninhaltes beziehen.

Denken wir uns demnach einen Theil der zu untersuchenden elastischen Fläche in einem Punkte M, dessen Coordinaten x und y sind, durch zwei ebene Schnitte begrenzt, welche den Ebenen der yz und xz parallel sind und welche zusammen für das Folgende kurz Parallelschnitte genannt werden sollen, und bezeichnen wie früher die zu den Achsen parallelen physischen Wirkungen, welche von den äußern Kräften auf das begrenzte Flächenstück von dem Flächeninhalte O ausgeübt werden, mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so haben wir nun die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{X} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \, . \, qX \frac{d^2 O}{dx dy} \quad , \quad \mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \, . \, qY \frac{d^2 O}{dx dy} \, , \\ \mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \, . \, qZ \frac{d^2 O}{dx dy} \, , \end{array}\right\}$$

oder nach §. 54 des zweiten Buches, wenn ν den Winkel der Normalen im Punkte M mit der Achse der z bezeichnet,

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{X} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \, . \, qX \sec \nu \quad , \quad \mathfrak{Y} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{x} \partial y \, . \, qY \sec \nu \, , \\ \mathfrak{Z} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \, . \, qZ \sec \nu \, . \end{array}\right\} \text{(a.}$$

und der Werth von $\sec \nu$ folgt aus der Gleichung der elastischen Fläche in der Form:

$$z = f(x, y)$$

mittels des Ausdruckes:

$$sec\,\nu = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.$$

Bezeichnet man ferner wie in §. 37 die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der geometrischen Spannung $T^{(x)}$, welche in einem Punkte des zur Ebene der yz parallelen Schnittes hervorgerufen wird, mit $T_x^{(x)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(z)}$, die entsprechenden physischen Spannungen für diesen ganzen Schnitt mit $\mathfrak{T}_x^{(x)}$, $\mathfrak{T}_y^{(y)}$, $\mathfrak{T}_z^{(z)}$, ferner die Länge dieser Schnittcurve mit s_x, so hat man

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_x^{(x)}}{\partial s_x} = T_x^{(x)}\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{T}_y^{(x)}}{\partial s_x} = T_y^{(x)}\,, \quad \frac{\partial \mathfrak{T}_z^{(x)}}{\partial s_x} = T_z^{(x)}\,.$$

Man hat aber auch

$$\frac{\partial s_x}{\partial y} = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = sec\,m_x\,,$$

weil für diese Schnittcurve x als constant zu betrachten ist, und m_x den Winkel vorstellt, welchen die zur Ebene der yz parallele oder zur Achse der x senkrechte Tangente an dem Punkte M mit der Achse der y bildet. Es wird daher auch

$$\text{b.)}\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{T}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} \partial y\,.\,T_x^{(x)}\,sec\,m_x\,, \quad \mathfrak{T}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} \partial y\,.\,T_y^{(x)}\,sec\,m_x\,, \\ \mathfrak{T}_z^{(x)} = \int_{y_0}^{y} \partial y\,.\,T_z^{(x)}\,sec\,m_x\,. \end{array}\right.$$

In gleicher Weise findet man zwischen den physischen Spannungen $\mathfrak{T}_x^{(y)}$, $\mathfrak{T}_y^{(y)}$, $\mathfrak{T}_z^{(y)}$ längs des zur Ebene der xz parallelen Schnittes und den geometrischen Componenten $T_x^{(y)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(y)}$ in einem Punkte desselben die Beziehungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_x^{(y)}}{\partial s_y} = \frac{\partial \mathfrak{X}_x^{(y)}}{\partial x} \frac{dx}{ds_y} = \frac{\partial \mathfrak{X}_x^{(y)}}{\partial x} \cos l_y = T_x^{(y)} ,$$

u. s. f.

oder

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{X}_x^{(y)} = \int_{x_0}^{x} \partial x . T_x^{(y)} \sec l_y \quad , \quad \mathfrak{X}_y^{(y)} = \int_{x_0}^{x} \partial x . T_y^{(y)} \sec l_y \, , \\ \mathfrak{X}_z^{(y)} = \int_{x_0}^{x} \partial x . T_z^{(y)} \sec l_y \, , \end{array}\right\} \quad (c.$$

worin nun l_y den Winkel zwischen der zur Achse der y senkrechten Tangente und der x=Achse bedeutet und $\sec l_y$ durch den Ausdruck:

$$\sec l_y = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

gegeben ist.

Für das Gleichgewicht der an dem begrenzten Flächenstück thätigen fördernden Wirkungen hat man aber die Bedingungen:

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{X}_x^{(x)} + \mathfrak{X}_x^{(y)} = 0 \quad , \quad \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}_y^{(x)} + \mathfrak{X}_y^{(y)} = 0 \, ,$$

$$\mathfrak{Z} + \mathfrak{X}_z^{(x)} + \mathfrak{X}_z^{(x)} = 0 \, ,$$

wenn die Coordinaten x_0, y_0, z_0 einem Punkte angehörig vorausgesetzt werden, wo sämmtliche Spannungen Null sind; man zieht daraus mittels der Werthe (a), (b) und (c) für die gleichzeitige Aenderung von x und y die Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{array}{l} q X \sec \nu + \dfrac{\partial . T_x^{(x)} \sec m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial . T_x^{(y)} \sec l_y}{\partial y} = 0 \\ q Y \sec \nu + \dfrac{\partial . T_y^{(x)} \sec m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial . T_y^{(y)} \sec l_y}{\partial y} = 0 \\ q Z \sec \nu + \dfrac{\partial . T_z^{(x)} \sec m_x}{\partial x} + \dfrac{\partial . T_z^{(y)} \sec l_y}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} , \quad (121.$$

worin alle Größen als Functionen von x und y zu betrachten sind, indem sie, wenn nicht als solche unmittelbar gegeben, durch Elimination von z mittels der Gleichung der elastischen Fläche auf solche Functionen zurückgeführt werden können.

Zwischen den sechs Spannungen, welche die Gleichungen (121) enthalten, bestehen wie bei den neun Spannungscomponenten der allgemeinen Gleichungen (75) mehrere Bedingungsgleichungen, welche sich wie dort durch die Bedingungen für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen ergeben. Behalten wir die in §. 38 angewendete Bezeichnung bei, so haben wir für die ebengenannten Bedingungen die Gleichungen:

$$\begin{cases} 0=(\mathfrak{Y}x_2-\mathfrak{X}y_1)+\left(\mathfrak{X}_y^{(x)}\mathfrak{x}_y^{(x)}-\mathfrak{X}_x^{(x)}\mathfrak{y}_x^{(x)}\right)+\left(\mathfrak{X}_y^{(y)}\mathfrak{x}_y^{(y)}-\mathfrak{X}_x^{(y)}\mathfrak{y}_x^{(y)}\right), \\ 0=(\mathfrak{X}z_1-\mathfrak{Z}x_3)+\left(\mathfrak{X}_x^{(x)}\mathfrak{z}_x^{(x)}-\mathfrak{X}_z^{(x)}\mathfrak{x}_z^{(x)}\right)+\left(\mathfrak{X}_x^{(y)}\mathfrak{z}_x^{(y)}-\mathfrak{X}_z^{(y)}\mathfrak{x}_z^{(y)}\right), \\ 0=(\mathfrak{Z}y_3-\mathfrak{Y}z_2)+\left(\mathfrak{X}_z^{(x)}\mathfrak{y}_z^{(x)}-\mathfrak{X}_y^{(x)}\mathfrak{z}_y^{(x)}\right)+\left(\mathfrak{X}_z^{(y)}\mathfrak{y}_z^{(y)}-\mathfrak{X}_y^{(y)}\mathfrak{z}_y^{(y)}\right), \end{cases}$$

worin nun die einzelnen Glieder folgende Werthe ersetzen:

$$\mathfrak{Y}x_2=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.\,qYx\,sec\,\nu\,,\quad \mathfrak{X}y_1=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.\,qXy\,sec\,\nu\,,$$

$$\mathfrak{X}z_1=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.\,qXz\,sec\,\nu\,,\quad \mathfrak{Z}x_3=\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.\,qZx\,sec\,\nu\,,$$

u. s. f.

$$\mathfrak{X}_y^{(x)}\mathfrak{x}_y^{(x)}=\int_{y_0}^{y}\partial y.\,T_y^{(x)}x\,sec\,m_x\,,\quad \mathfrak{X}_x^{(x)}\mathfrak{y}_x^{(x)}=\int_{y_0}^{y}\partial y.\,T_x^{(x)}y\,sec\,m_x\,,$$

$$\mathfrak{X}_y^{(y)}\mathfrak{x}_y^{(y)}=\int_{x_0}^{x}\partial x.\,T_y^{(y)}x\,sec\,l_y\,,\quad \mathfrak{X}_x^{(y)}\mathfrak{y}_x^{(y)}=\int_{x_0}^{x}\partial x.\,T_x^{(y)}y\,sec\,l_y\,,$$

u. s. f.

und aus welchen man demnach die Uebergangsgesetze ableitet:

$$\left.\begin{aligned}
0&=(xY-yX)\,q\,sec\,\nu+\frac{\delta.\left(xT_y^{(x)}-yT_x^{(x)}\right)sec\,m_x}{\delta x}+\frac{\delta.\left(xT_y^{(y)}-yT_x^{(y)}\right)sec\,l_y}{\delta y}\\
0&=(zX-xZ)\,q\,sec\,\nu+\frac{\delta.\left(zT_x^{(x)}-xT_z^{(x)}\right)sec\,m_x}{\delta x}+\frac{\delta.\left(zT_x^{(y)}-xT_z^{(y)}\right)sec\,l_y}{\delta y}\\
0&=(yZ-zY)\,q\,sec\,\nu+\frac{\delta.\left(yT_z^{(x)}-zT_y^{(x)}\right)sec\,m_x}{\delta x}+\frac{\delta.\left(yT_z^{(y)}-zT_y^{(y)}\right)sec\,l_y}{\delta y}
\end{aligned}\right\}.$$

Diese nehmen aber auch mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der z die Form an:

$$0=(xY-yX)\,q\,sec\,\nu+\left(x\frac{\delta.T_y^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}-y\frac{\delta.T_x^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}\right)$$

$$+\left(x\frac{\delta.T_y^{(y)}\,sec\,l_y}{\delta y}-y\frac{\delta.T_x^{(y)}\,sec\,l_y}{\delta y}\right)+\left(T_y^{(x)}\,sec\,m_x-T_x^{(y)}\,sec\,l_y\right)$$

$$0=(zX-xZ)\,q\,sec\,\nu+\left(z\frac{\delta.T_x^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}-x\frac{\delta.T_z^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}\right)$$

$$+\left(z\frac{\delta.T_x^{(y)}sec\,l}{\delta y}-x\frac{\delta.T_z^{(y)}sec\,l}{\delta y}\right)+\left(T_x^{(x)}sec\,m\frac{\delta z}{\delta x}+T_x^{(y)}sec\,l\frac{\delta z}{\delta y}-T_z^{(x)}sec\,m\right)$$

$$0=(yZ-zY)\,q\,sec\,\nu+\left(y\frac{\delta.T_z^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}-z\frac{\delta.T_y^{(x)}\,sec\,m_x}{\delta x}\right)$$

$$+\left(y\frac{\delta.T_z^{(y)}sec\,l}{\delta y}-z\frac{\delta.T_y^{(y)}sec\,l}{\delta y}\right)+\left(T_z^{(y)}sec\,l-T_y^{(x)}sec\,m\frac{\delta z}{\delta x}-T_y^{(y)}sec\,l\frac{\delta z}{\delta y}\right),$$

und führen so auf die gesuchten Bedingungsgleichungen, wenn man sie mit den aus den Gleichungen (121) folgenden Ergebnissen verbindet, d. h. wenn man die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x multiplizirt und die Differenz dieser Producte zu der ersten der vorausgehenden Gleichungen addirt, und mit den übrigen Gleichungen in entsprechender Weise verfährt. Man findet damit durch die erste der vorhergehenden Gleichungen die Bedingung:

$$T_y^{(x)}\,sec\,m_x=T_x^{(y)}\,sec\,l_y\,, \qquad (d.$$

und mit dieser folgen aus den beiden letzten die weitern Beziehungen:

$$\text{e.)}\quad \begin{cases} T_z^{(x)} = T_x^{(x)} \dfrac{dz}{dx} + T_y^{(x)} \dfrac{dz}{dy}\,, \\ T_z^{(y)} = T_x^{(y)} \dfrac{dz}{dx} + T_y^{(y)} \dfrac{dz}{dy}\,. \end{cases}$$

Die erste dieser Bedingungsgleichungen, nämlich die (d) entspricht den allgemeinen Gleichungen (76) in §. 38, und spricht aus, daß im jetzigen Falle nicht die Componenten $T_x^{(x)}$ und $T_y^{(x)}$ selbst gleich sind, sondern die nach den Tangenten der Schnittcurven gerichteten verschiebenden Spannungen $T_x^{(y)} \sec l_y$ und $T_y^{(x)} \sec m_x$.

Zerlegt man nämlich die Spannung $T_x^{(x)}$ nach den Tangenten an den beiden Parallelschnitten und bezeichnet die entsprechenden Componenten mit $T_t^{(x)}$ und S_x, so hat man offenbar

$$T_x^{(x)} = T_t^{(x)} \cos l_y\,, \quad T_y^{(x)} = S_x \cos m_x\,, \quad T_z^{(x)} = T_t^{(x)} \sin l_y + S_x \sin m_x\,;$$

ebenso hat man für die nach denselben Tangenten gerichteten Componenten $T_t^{(y)}$ und S_y der Spannung $T^{(y)}$ die Beziehungen:

$$T_x^{(y)} = S_y \cos l_y\,, \quad T_y^{(y)} = T_t^{(y)} \cos m_x\,, \quad T_z^{(y)} = T_t^{(y)} \sin m_x + S_y \sin l_y\,,$$

und zieht daraus

$$S_x = T_y^{(x)} \sec m_x = T_x^{(y)} \sec l_y = S_y\,.$$

Die Bedeutung der beiden Gleichungen (e), von denen man sich leicht überzeugt, daß sie mit den soeben abgeleiteten Werthen von $T_z^{(x)}$ und $T_z^{(y)}$ identisch sind, erkennt man, wenn man sie mit $\cos\nu$ multiplizirt und beachtet, daß nach §. 34 der Einleitung

$$-\frac{dz}{dx}\cos\nu = \cos\lambda \qquad \text{und} \qquad -\frac{dz}{dy}\cos\nu = \cos\mu$$

die Cosinus der Winkel λ und μ sind, welche die Normale im Punkte M mit den Achsen der x und y einschließt; jene Gleichungen nehmen damit die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} T_x^{(x)} \cos\lambda + T_y^{(x)} \cos\mu + T_z^{(x)} \cos\nu = 0\,, \\ T_x^{(y)} \cos\lambda + T_y^{(y)} \cos\mu + T_z^{(y)} \cos\nu = 0\,, \end{array}\right\}$$

und sprechen aus, daß die Richtungen der beiden Spannungen $T^{(x)}$ und $T^{(y)}$ senkrecht zur Normalen sind oder in der Tangential-Ebene liegen, wie es oben schon vorausgesetzt wurde, und es geht daraus hervor, daß diese Voraussetzung keine willkürliche, sondern eine nothwendige Folge der bei einer materiellen Fläche stattfindenden Verhältnisse ist.

Nach diesen Bedingungen bleiben nur drei der sechs Spannungscomponenten $T_x^{(x)}$, $T_y^{(x)}$, u. s. f. durch die Gleichungen (121) zu bestimmen, und man kann diesen eine einfachere Form geben, wenn man die drei Größen

$$T_x^{(x)} \sec m_x \quad , \quad T_y^{(x)} \sec m_x = T_x^{(y)} \sec l_y \quad \text{und} \quad T_y^{(y)} \sec l_y$$

einfach durch

$$S_1 \qquad S_3 \qquad \text{und} \qquad S_2$$

bezeichnet; sie werden dadurch zuerst

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial S_1}{\partial x} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y} + q X \sec\nu = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial S_3}{\partial x} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y} + q Y \sec\nu = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial . S_1 \frac{dz}{dx}}{\partial x} + \dfrac{\partial . S_3 \frac{dz}{dy}}{\partial x} + \dfrac{\partial . S_3 \frac{dz}{dx}}{\partial y} + \dfrac{\partial . S_2 \frac{dz}{dy}}{\partial y} + q Z \sec\nu = 0 \end{array}\right\} (122.$$

Entwickelt man dann die vier ersten Glieder der letzten dieser Gleichungen, und addirt zu derselben die beiden ersten, nachdem man diese mit $-\frac{dz}{dx}$ und $-\frac{dz}{dy}$ multiplizirt hat, so findet man noch die neue Gleichung:

$$S_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 S_3 \frac{d^2 z}{dx\,dy} + S_2 \frac{d^2 z}{dy^2} + q\left(Z - X\frac{dz}{dx} - Y\frac{dz}{dy}\right) \sec\nu = 0, \quad (123.$$

und diese kann mit der Beachtung, daß

$$N = q\left(Z - X\frac{dz}{dx} - Y\frac{dz}{dy}\right)\cos\nu = q(Z\cos\nu + X\cos\lambda + Y\cos\mu)$$

die normale Componente der äußern geometrischen Kraft im Punkte M ausdrückt, die Form:

$$124.)\quad S_1\frac{d^2z}{dx^2} + 2S_3\frac{d^2z}{dx\,dy} + S_2\frac{d^2z}{dy^2} + N\sec^2\nu = 0$$

erhalten, unter welcher sie der Gleichung (107) für die elastischen Linien entspricht.

Man findet darnach z. B. für eine cylindrische Fläche, deren Erzeugende zur Achse der y parallel ist, deren Gleichung also die Form hat:

$$z = f(x)$$

die einfache Beziehung:

$$S_1\frac{d^2z}{dx^2} + N\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] = 0\,,$$

und diese geht mit der Beachtung, daß man hat

$$S_1 = T_x^{(x)}\sec m_x = T_t^{(x)}\sec m_x \cos l_y\,,$$

also

$$S_1 = T_t^{(x)}\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}\,,$$

und daß

$$\varkappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^3}}\,,$$

die Krümmung in dem zur Erzeugenden senkrechten Normalschnitte ausdrückt, in die Gleichung:

$$T_t^x = -N\varrho$$

über, welche übereinstimmend mit der Gleichung (107) ausspricht, daß die zur Erzeugenden senkrechte tangentiale Spannung einer elastischen Cylinderfläche proportional ist dem normalen geometrischen Drucke und

dem Krümmungshalbmesser des zur Erzeugenden senkrechten Normalschnittes. *)

Endlich kann man noch aus den beiden ersten der Gleichungen (122) die Function q $sec\,\nu$ eliminiren und dadurch die Gleichung:

$$Y\left(\frac{\delta S_1}{\delta x}+\frac{\delta S_3}{\delta y}\right)-X\left(\frac{\delta S_3}{\delta x}+\frac{\delta S_2}{\delta y}\right)=0 \qquad (125.$$

herstellen, welche von der Dichte und der Gestalt der Fläche unabhängig ist, und nur eine Beziehung zwischen den Spannungen S_1, S_2, S_3 und den beiden geometrischen Componenten X und Y ausdrückt.

§. 77.

Die Bedingungen, welche wir im Vorhergehenden für das Gleichgewicht einer Fläche abgeleitet haben, sollen im Allgemeinen dazu dienen, eine dreifache Aufgabe aufzulösen, nämlich

1) entweder die Größe und Richtung der geometrischen Kraft qR

*) Die Gleichungen (121), (122) und (123), welche wir oben für das Gleichgewicht einer elastischen Fläche abgeleitet haben, sind der Form nach wesentlich verschieden von denen, welche Lamé in seinen Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, Seite 110, für diesen Fall aufstellt, und die er dadurch findet, daß er die elastische Fläche als einen von zwei sehr nahe liegenden und nahe parallelen Flächen begrenzten Körper betrachtet, aus diesem durch vier ebene Schnitte, von denen zwei zur x-Achse und zwei zur y-Achse senkrecht sind, ein sogenanntes unendlich kleines Parallelipeb ausschneidet und die Gleichgewichtsbedingungen für dieses Parallelipeb aufstellt, dabei aber auch voraussetzt, daß alle Spannungen nur tangential zu der mittleren Fläche gerichtet sein können. Er findet so die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d.\varepsilon hN_1}{dx}+\dfrac{d.\varepsilon hT_3}{dy}+q\varepsilon hX=0\,,\quad \dfrac{d.\varepsilon hT_3}{dx}+\dfrac{d.\varepsilon hN_2}{dy}+q\varepsilon hY=0\,,\\ \qquad\qquad \dfrac{d.\varepsilon hT_2}{dx}+\dfrac{d.\varepsilon hT_1}{dy}+q\varepsilon hZ=0\,,\end{array}\right\}\ (\alpha.$$

in welchen h für $sec\,\nu$ steht, ε die normale Dicke der Fläche bezeichnet und die Spannungen

N_1 , N_2 , T_1 , T_2 und T_3

$T_x^{(x)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(y)}$, $T_z^{(x)}$ und $T_x^{(y)}$

zu bestimmen, unter deren Einfluß eine materielle Fläche von gegebener Gestalt im Gleichgewicht bleibt und gegebene Spannungen besitzt,

2) oder diese Spannungen in Function von x und y auszudrücken, wenn die Gleichung der Fläche gegeben ist und die Componenten X, Y, Z, unter deren Einwirkung sie im Gleichgewichte bleiben soll,

3) oder die Gestalt der Fläche abzuleiten, welche unter dem Einflusse einer gegebenen geometrischen Kraft sich im Zustande des Gleichgewichtes befinden kann, und damit wie vorher die Spannungen derselben zu berechnen.

Von diesen drei Aufgaben ist indessen nur die erste immer lösbar und bestimmt. Soll z. B. die Fläche eine ebene sein, so wird ihre Gleichung die allgemeine Form:

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu = p$$

haben, und die Gleichung (124) sich auf

$$N = 0 \quad \text{oder} \quad Z = X\frac{dz}{dx} + Y\frac{dz}{dy}$$

---

in §§. 87, u. ff. gleiche Bedeutung haben, also auf die Aenderung der Fläche bezogen sind, während in unserer obigen Untersuchung die Spannungen $T_x^{(x)}$, u. s. f. sich auf die Aenderung der Länge beziehen.

Um daher aus den Spannungen N_1, N_2 u. s. f. die wirklichen, tangentialen Spannungen $T^{(x)}$, $T^{(y)}$ zu erhalten, muß man sich immer die Fläche des betreffenden Parallelschnittes hinzudenken, oder doch das auch für eine constante normale Dicke ε veränderliche, Verhältniß dieser normalen Dicke zu der normalen Breite des betreffenden Parallelschnittes, während man bei allen Untersuchungen, welche das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Flächen oder Linien betreffen, von einer Dicke ganz Umgang nimmt, und diese auch für die Anwendung auf dünne elastische Membranen nur insoferne Einfluß hat, als sich darnach die Dichte q der idealen elastischen Fläche oder Linie ändert. Die obigen Gleichungen (α), welche übrigens schon von Poisson durch eine ähnliche Betrachtung abgeleitet wurden, stehen demnach nicht im Einklang mit den strengen geometrischen Verhältnissen, für welche sie allein streng gültig sind. Bei der elastischen Linie hat Lamé selbst jene auf die Schnittfläche sich beziehenden Spannungen N_1, N_2 u. s. f. durch die wirklichen Spannungscomponenten $T\frac{dx}{ds}$, u. s. f. einer idealen oder geometrischen elastischen Linie ersetzt, und wenn man in gleicher Weise für die elastische Fläche verfährt, so gehen die Gleichungen (α) in unsere Gleichungen (121) über.

reduziren; man schließt daraus, daß eine materielle Ebene nur im Gleichgewicht bleiben kann, wenn die Richtung der geometrischen Kraft R in der Ebene selbst liegt. Die beiden ersten der Gleichungen (122) bestimmen dann die Componenten q X und q Y, wenn die Spannungen S_1, S_2 und S_3 in Function von x und y gegeben sind. Es geht daraus unmittelbar hervor, was indessen auch so einleuchtet, daß diese Componenten Null sein müssen, daß also überhaupt keine geometrische Kraft an der Ebene angreifen darf, wenn die Spannungen durchaus unveränderlich sein sollen.

Was ferner die Auflösung der zweiten Aufgabe betrifft, so wird man beachten, daß die beiden ersten der Gleichungen (121) oder die daraus gefolgerte Gleichung (125) nur partielle Aenderungsgesetze der Spannungen S_1, S_2 und S_3 enthalten, und daher im Allgemeinen durch mehrere verschiedene Werthe dieser Veränderlichen befriedigt werden können; diese Werthe sind dann aber noch der Beschränkung unterworfen, daß sie auch der Gleichung (123) oder (124) Genüge leisten müssen, wodurch die Auflösung der Aufgabe nicht wenig erschwert wird.

Nehmen wir z. B. eine Kugelfläche in einer solchen Lage gegen das Coordinatensystem, daß ihre Gleichung die Form hat

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ,$$

und setzen wir voraus, daß die äußere geometrische Kraft qR constant und in allen Punkten normal zur Kugelfläche gerichtet sei, so haben wir

$$qX \sec\nu = N \cos\lambda \sec\nu = - N\frac{dz}{dx} = N\frac{x}{z} ,$$

$$qY \sec\nu = N \cos\mu \sec\nu = - N\frac{dz}{dy} = N\frac{y}{z} ;$$

ferner wird

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{r^2 - y^2}{z^3} , \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = -\frac{xy}{z^3} , \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{r^2 - x^2}{z^3}$$

$$\sec^2\nu = 1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2} = \frac{r^2}{z^2}$$

und unsere drei Gleichungen zur Bestimmung der Spannungen nehmen die Form an:

$$a.)\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial S_1}{\partial x}+\frac{\partial S_3}{\partial y}+N\frac{x}{z}=0\ ,\quad \frac{\partial S_3}{\partial x}+\frac{\partial S_2}{\partial y}+N\frac{y}{z}=0,\\ S_1(r^2-y^2)+2S_3xy+S_2(r^2-x^2)=Nr^2z\ .\end{array}\right.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen können durch sehr verschiedene Werthe von S_1, S_2 und S_3 befriedigt werden, z. B. durch die einfachen Werthe:

$$S_1=S_2=Nz\quad ,\quad S_3=0$$

$$S_1=N(x+z)\quad ,\quad S_3=N(x-y)\quad ,\quad S_2=N(z-y)\ ;$$

allein es ist leicht zu sehen, daß diese Werthe nicht auch der dritten Gleichung (a) genügen, also unbrauchbar sind, und es dürfte ziemlich viel Zeit kosten, à priori solche Werthe für die drei Spannungen aufzusuchen, welche den drei Gleichungen (a) zugleich entsprechen; denn die Auflösung dieser Gleichungen kann direct nur durch ein förmliches Probiren von Functionen gefunden werden.

Beachtet man aber, daß im gegenwärtigen Falle nach der Natur der gegebenen Fläche und der Richtung der Kraft die irgend einem Parallel-Schnitte entsprechende geometrische Spannung senkrecht zu diesem Schnitte gerichtet und constant sein wird, so kann man

$$T^{(x)}=k_1\quad ,\quad T^{(y)}=k_2\ ,$$

setzen und diese Spannungen nach derjenigen Tangente gerichtet annehmen, welche zu dem entsprechenden Schnitte senkrecht ist. Die Winkel l, m, n zwischen dieser Tangente und den drei Achsen bestimmen sich durch die Bedingungen, daß sie sowohl auf dem Halbmesser im Punkte xyz, als auch auf der Tangente des Parallel-Schnittes senkrecht steht, oder daß sie Tangente ist an dem größten Kreise, welcher durch den Punkt xyz geht und zu dem betreffenden Parallelschnitte senkrecht ist. Man findet daher für die Winkel der Spannung T_x die Beziehungen:

$$\cos l'=\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}\ ,\quad \cos m'=-\frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2}}\ ,\quad \cos n'=-\frac{xz}{r\sqrt{r^2-x^2}}$$

und schließt daraus die Componenten:

$$T_x^{(x)}=k_1\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r}\ ,\quad T_y^{(x)}=-k_1\frac{xy}{r\sqrt{r^2-x^2}}\ ,\quad T_z^{(x)}=-k_1\frac{xz}{r\sqrt{r^2-x^2}}\ .$$

Man hat ferner

$$sec\, m_x = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{rz} = \frac{\sqrt{r^2-x^2}}{z},$$

und damit folgt

$$S_1 = T_x^{(x)} sec\, m_x = k_1 \frac{r^2-x^2}{rz}, \quad S_3 = T_y^{(x)} sec\, m_x = -k_1 \frac{xy}{rz}.$$

Ebenso findet man für die Componenten von $T^{(y)}$ oder k_2 die Werthe:

$$T_x^{(y)} = -k_2 \frac{xy}{r\sqrt{r^2-y^2}}, \quad T_y^{(y)} = k_2 \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{r}, \quad T_z^{(y)} = -k_2 \frac{yz}{r\sqrt{r^2-y^2}}$$

und damit

$$S_3 = -k_2 \frac{xy}{rz}, \qquad S_2 = k_2 \frac{r^2-y^2}{rz},$$

da man auch hat

$$sec\, l_y = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{z} = \frac{\sqrt{r^2-y^2}}{z}.$$

Es müssen aber die Werthe von S_3 gleich sein, also $k_2 = k_1$ werden, und wenn man die vorstehenden Ausdrücke für S_1, S_2 und S_3 in die Gleichungen (a) einführt, so findet man, daß sie alle drei befriedigt werden, wenn man $k_1 = \frac{1}{2} Nr$ nimmt. Es wird also dadurch unsere obige Annahme über die Richtung der Spannungen $T^{(x)}$ und $T^{(y)}$ bestätigt und zugleich festgestellt, daß

$$T^{(x)} = T^{(y)} = \tfrac{1}{2} Nr.$$

Diese geometrischen Spannungen sind demnach sowohl für alle Parallel-Schnitte, als für die ganze Länge eines solchen constant; es können jedoch damit die physischen Spannungen $\mathfrak{T}^{(x)}$ und $\mathfrak{T}^{(y)}$ unmittelbar nur für solche Schnitte berechnet werden, bei welchen die Richtung der entsprechenden geometrischen Spannungen immer parallel zu derselben Geraden bleibt.

Nehmen wir z. B. den Hauptschnitt, für welchen $y = 0$ ist, so wird

$$T_x^{(y)} = 0, \quad T_y^{(y)} = T^{(y)} = \tfrac{1}{2} Nr, \quad T_z^{(y)} = 0,$$

und daher, wenn L die Länge dieses Schnittes bedeutet

$$\mathfrak{T}_{y}^{(y)} = \mathfrak{T}^{(y)} = \tfrac{1}{2} N r L .$$

Für einen ganzen Umfang $L = 2\pi r$ folgt daraus das Ergebniß $\mathfrak{T}^{(y)} = N\pi r^2$, dessen Richtigkeit einleuchten wird, wenn man erwägt, daß diese physische Spannung der zur y=Achse parallelen physischen Componenten des Druckes gleich sein muß, welcher von der normalen geometrischen Kraft N auf die von jenem Schnitte begrenzte Halbkugel ausgeübt wird, daß die zu der genannten Achse parallele Componente dieses geometrischen Druckes

$$N \cos\mu = N \frac{y}{r}$$

ist, und daher die entsprechende physische Wirkung durch

$$\mathfrak{Y} = \frac{2N}{r} \int_{-r}^{+r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy . y \sec\nu = 2N \int_{-r}^{+r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \frac{y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$$
$$= N\pi r^2$$

gemessen wird.

Im Allgemeinen können immer nur die physischen Componenten $\mathfrak{T}_{x}^{(x)}$, $\mathfrak{T}_{y}^{(y)}$, $\mathfrak{T}_{y}^{(x)}$, u. s. f. berechnet und wie Kräfte an einem festen System je nach Umständen zu einer allgemeinen Resultirenden $\mathfrak{T}^{(x)}$ oder $\mathfrak{T}^{(y)}$ vereinigt, oder nur auf eine fördernde Resultirende und auf eine drehende Wirkung zurückgeführt werden, wie es in §. 22 für den Druck und die Reibung angedeutet wurde und insbesondere im folgenden Buche bei der Untersuchung des Druckes, welchen eine Flüssigkeit auf irgend eine begrenzte Fläche ausübt, weiter ausgeführt werden soll.

§. 78.

Was endlich die Auflösung der dritten Aufgabe betrifft, nämlich der Aufgabe, die Gestalt und Spannung derjenigen Fläche zu bestimmen, welche unter dem Einflusse einer gegebenen geometrischen Kraft im Gleichgewichte bleiben kann, so ist nach dem Vorhergehenden ersichtlich, daß diese um so viel schwieriger sein wird, als hier für die vier Veränderlichen S_1, S_2, S_3 und z Functionen von x und y zu wählen sind, welche zugleich den beiden ersten der Gleichungen (122) und der

Gleichung (123) oder (124) Genüge leisten, und es ist dabei offenbar, daß es in diesem Falle mehrere verschiedene Auflösungen geben kann, d. h. mehrere verschiedene Flächen, welche, natürlich auch mit verschiedenen Spannungen, unter dem Einflusse einer und derselben Kraft im Gleichgewicht bleiben können, wobei aber wohl zu bemerken ist, daß hier nur durchaus gespannte Flächen verstanden werden, bei welchen sich die Spannungen von Punkt zu Punkt stetig ändern, und welche daher eben sowohl eine nicht stabile als eine stabile Gleichgewichtslage annehmen.

Soll z. B. eine homogene materielle Fläche nur dem Einflusse der Schwere unterworfen sein, so hat man für die gewöhnliche Lage der Coordinaten-Achsen, eine Verticale als z-Achse genommen

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad Z = -g \, ,$$

und unsere Gleichungen nehmen die Form an:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_3}{\partial y} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial S_3}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0 \\ &S_1 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2 S_3 \frac{d^2 z}{dx\,dy} + S_2 \frac{d^2 z}{dy^2} = p\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \end{aligned}\right\} \text{(b.}$$

worin das geometrische Gewicht $p = gq$ auch das Gewicht der Flächeneinheit vorstellt.

Diese Gleichungen müssen offenbar befriedigt werden, wenn man

$$z = \tfrac{1}{2} h \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}} \right)$$

setzt, d. h. eine Cylinderfläche annimmt, deren normaler Schnitt eine einfache Ketten- oder Gewölblinie ist und welche daher als ideale Tonnengewölb-Fläche bezeichnet werden kann; man findet damit aus der dritten der Gleichungen (b)

$$S_1 = ph \, ,$$

und dieser Werth in die erste eingeführt, gibt $S_3 = k_1$, womit aus der zweiten auch $S_2 = k_2$ folgt. Diese beiden Spannungen sind demnach constant und werden daher Null in dem einfachen Falle, wo die Fläche von zwei zur Erzeugenden normalen Schnitten begrenzt und längs zweier Erzeugenden aufgehängt oder gestützt ist.

Denkt man sich ferner eine Umdrehungsfläche, welche durch ihr Gewicht im gespannten Gleichgewichtszustande gehalten wird, durch zwei Meridian-Ebenen, die einen sehr kleinen Winkel einschließen, geschnitten, und die Masse des ausgeschnittenen Streifens in dem mittleren Meridian zu einer Linie verdichtet, so wird man für die veränderliche Dichte q dieser Linie den Werth: $q = D\frac{x}{a}$ erhalten, wobei die mittlere Meridian-Ebene als Ebene der xz gedacht ist und D die Dichte für $x = a$ bedeutet. Um die Gleichung für die Gleichgewichtsgestalt einer solchen Linie abzuleiten, hat man daher nach §. 66 die Beziehungen:

$$\frac{d.T\frac{dx}{ds}}{ds} = 0 \;, \qquad \frac{d.T\frac{dz}{ds}}{ds} = gD\frac{x}{a} = p_1\frac{x}{a} \;,$$

und zieht daraus unter der Voraussetzung, daß in einem Punkte, für welchen man $x = 0$ und $\frac{dx}{ds} = 1$ hat, die Spannung gleich T_0 sei, die Gleichungen:

$$T = T_0\frac{ds}{dx} \quad , \qquad T_0\frac{d.\frac{dz}{dx}}{ds} = p_1\frac{x}{a} \;,$$

von denen die zweite auch die Form:

$$T_0\frac{d.\frac{dz}{dx}}{dx} = p_1\frac{x}{a}\frac{ds}{dx} = p_1\frac{x}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

annimmt und durch die Integration auf die neue Gleichung:

$$T_0\, logn\left[\frac{dz}{dx} + \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}p_1\frac{x^2}{a}$$

führt. Aus dieser zieht man das Aenderungsgesetz der Coordinaten der gesuchten Curve auf ähnlichem Wege, wie wir in §. 67 die Gleichung der Kettenlinie abgeleitet haben, indem man $\frac{2T_0 a}{p_1} = h^2$ setzt und beachtet, daß aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{ds}{dx} = e^{\frac{x^2}{h^2}} \quad , \quad \frac{ds}{dx} - \frac{dz}{dx} = e^{-\frac{x^2}{h^2}} \quad ,$$

folgt; man findet damit

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x^2}{h^2}} - e^{-\frac{x^2}{h^2}}\right) \quad , \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x^2}{h^2}} + e^{-\frac{x^2}{h^2}}\right) \qquad (c.$$

und schließt daraus, daß weder die Ordinate z, noch der Bogen s dieser Curve in einer geschlossenen Function von x dargestellt werden können.

Lassen wir nun diese Curve sich um die Achse der z drehen, so erzeugt sie eine Umdrehungsfläche, deren Gleichung sich aus der jener Curve ergibt, wenn man für x den horizontalen Abstand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ eines Punktes von der Drehungsachse einführt; man erhält daher für diese Fläche mit der Beachtung, daß

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \quad , \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} \, ,$$

aus der ersten der Gleichungen (c) die Aenderungsgesetze:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{x}{r}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} - e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right), \; \frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{y}{r}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} - e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right)$$

und schließt aus diesen weiter

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{y^2}{r^3}v + \frac{2x^2}{rh^2}u \quad , \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{x^2}{r^3}v + \frac{2y^2}{rh^2}u \, ,$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = xy\left(\frac{2u}{rh^2} - \frac{v}{r^3}\right),$$

worin zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} + e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right) = u \quad , \quad \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} - e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right) = v$$

gesetzt worden ist. Endlich hat man noch

$$\sec\nu = \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = u\,,$$

und damit kann für die betreffende Fläche die dritte der Gleichungen (b) unter die Form gebracht werden:

$$(S_1 y^2 - 2S_3 xy + S_2 x^2)\frac{v}{r^3} + (S_1 x^2 + 2S_3 xy + S_2 y^2)\frac{2u}{rh^2} = pu\,.$$

Um dieser Gleichung allgemein zu genügen, kann man

$$S_1 y^2 - 2S_3 xy + S_2 x^2 = 0$$

$$S_1 x^2 + 2S_3 xy + S_2 y^2 = \tfrac{1}{2} prh^2$$

setzen, und daraus die Beziehung ableiten

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2} ph\frac{h}{r} = \frac{1}{2} ph\frac{h}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Macht man dann dieser entsprechend

$$S_1 = \frac{1}{2} ph\frac{hx^2}{r^3}\,, \qquad S_2 = \frac{1}{2} ph\frac{hy^2}{r^3}\,,$$

so gibt die erste der vorhergehenden Gleichungen

$$S_3 = \frac{1}{2} ph\frac{hxy}{r^3}\,,$$

womit natürlich auch die zweite befriedigt werden muß. Diese Werthe von S_1, S_2 und S_3 müssen aber auch noch den beiden ersten Gleichungen (b) genügen, und dieß ist in der That der Fall; denn man hat

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{1}{2} p\frac{h^2 x(2y^2 - x^2)}{r^5} = -\frac{\partial S_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial y} = \frac{1}{2} p\frac{h^2 y(2x^2 - y^2)}{r^5} = -\frac{\partial S_3}{\partial x}$$

wie es die genannten Gleichungen fordern.

Unsere Fläche, deren Differential-Gleichung nach den Gleichungen (d) die Form hat:

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x^2+y^2}{h^2}} - e^{-\frac{x^2+y^2}{h^2}}\right)\left(x\frac{dx}{ds} + y\frac{dy}{ds}\right),$$

ist also diejenige oder vielleicht eine von denjenigen schweren Umdrehungsflächen, welche sich sowohl stehend als hängend im Gleichgewichtszustande befinden; sie kann daher als Kuppelgewölb-Fläche bezeichnet werden, indem sie die ideale Form eines freistehenden Kuppelgewölbes darstellt; ein Meridianschnitt derselben hat etwa die in Fig. 26 dargestellte Gestalt, und das Besondere, daß nicht die Zweige BA und AC derselben Curve angehören, sondern DAB oder EAC die erzeugende Curve ist. Man hat nämlich als Werth der Ordinate z das Integral:

$$z = \frac{1}{2}\int_0^r dr\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} - e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right),$$

welches durch Entwickelung der Exponentialgrößen die Reihe

$$z = h\left(\frac{1}{3}\frac{r^3}{h^3} + \frac{1}{2.3.7}\frac{r^7}{h^7} + \frac{1}{2.3.4.5.11}\frac{r^{11}}{h^{11}} + \text{etc.}\right)$$

gibt und zeigt, daß z mit r das Zeichen wechselt, daß aber für gleich große positive oder negative r auch z einen gleichen absoluten Werth behält, oder daß die Zweige AD und AB der erzeugenden Curve congruent sind. Diese Reihe convergirt zwar für alle Werthe von r, schnell indessen nur für nicht sehr viel größere Werthe von r als h, und gibt auch für jedes r nur einen Werth für z. Bringt man aber das vorhergehende Integral unter die Form

$$z = \frac{1}{2}h\int_0^u du\,\frac{1}{\sqrt{u}}\left(e^u - e^{-u}\right)$$

und integrirt theilweise fort in Bezug auf die Potenzen von $\sqrt{u}$, so erhält man die Reihe:

$$z = \frac{1}{4}r\left[\left(e^u - e^{-u}\right)\left(1 + \frac{1}{3.5}\left(\frac{2r^2}{h^2}\right)^2 + \frac{1}{3.5.7.9}\left(\frac{2r^2}{h^2}\right)^4 + \text{etc.}\right)\right.$$
$$\left. - \left(e^u + e^{-u}\right)\left(\frac{1}{3}\frac{2r^2}{h^2} + \frac{1}{3.5.7}\left(\frac{2r^2}{h^2}\right)^3 + \text{etc.}\right)\right],$$

in welcher die Factoren $e^u \pm e^{-u}$ nach dem, was in §. 67 über die Gleichung (m) bemerkt wurde, für jeden Werth von u doppelte Werthe von entgegengesetzten Zeichen annehmen, welche also für jeden Werth von r zwei entgegengesetzte Werthe von z gibt und die beiden Curven DAB und EAC in sich begreift. Diese Curven schneiden und berühren sich in A, sie haben also eine Berührung zweiter Ordnung daselbst unter sich und mit der Tangente; denn man hat auch

$$\frac{d^2 z}{dr^2} = \frac{r}{h^2}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} + e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right) \quad . \quad \text{also} \quad \frac{d^2 z}{dr^2} = 0 \quad \text{für} \quad r = 0$$

und schließt daraus, daß die Krümmung in A Null, oder der Krümmungshalbmesser unendlich ist. Die erzeugte Umdrehungsfläche geht demnach in A auch mit einer horizontalen Ebene eine Berührung zweiter Ordnung ein, ist also um den Punkt A herum selbst sehr nahe eben oder flach gedrückt.

Schneiden wir ferner unser Fläche durch eine Ebene, welche zur yz-Ebene parallel ist, so haben wir für die beiden tangentialen Spannungen in einem Punkte dieses Schnittes die Werthe:

$$T_t^{(x)} = S_1 \sec l_y \cos m_x = S_1 \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}} = \frac{1}{2} ph \frac{hx^2}{r^3} \sqrt{\frac{y^2+x^2u^2}{x^2+y^2u^2}},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} ph \frac{hxy}{r^3},$$

folglich für den Punkt $y = 0$, $x = r$ des Hauptschnittes

$$T_t^{(x)} = \frac{1}{2} ph \frac{h}{r} u \quad , \quad S_3 = 0 \; .$$

Die erste dieser Spannungen gibt dann parallel zu den Achsen der x und z die Componenten:

$$T_x^{(x)} = \frac{1}{2} ph \frac{h}{r} \quad , \quad T_z^{(x)} = \frac{1}{2} ph \frac{h}{r} v = \frac{1}{4} ph \frac{h}{r}\left(e^{\frac{r^2}{h^2}} - e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right),$$

und aus dem letztern Ausdruck schließt man, daß der verticale physische

Druck $\mathfrak{T}_z$ der Fläche auf einen horizontalen Kreisschnitt vom Halbmesser R den Werth hat

$$\mathfrak{T}_z = 2\pi R . T_z^{(x)} = \tfrac{1}{2}\pi p h^2 \left(e^{\frac{R^2}{h^2}} - e^{-\frac{R^2}{h^2}}\right) .$$

Man hat aber auch für den Flächeninhalt O der über demselben Kreisschnitte stehenden Haube nach §. 46 des zweiten Buches den Ausdruck:

$$O = 2\pi \int_0^S ds . r = 2\pi \int_0^R dr . r \frac{ds}{dr} = \pi \int_0^R dr . r \left(e^{\frac{r^2}{h^2}} + e^{-\frac{r^2}{h^2}}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi h^2 \left(e^{\frac{R^2}{h^2}} - e^{-\frac{R^2}{h^2}}\right)$$

und daher für das Gewicht P derselben den Werth:

$$P = \tfrac{1}{2}\pi p h^2 \left(e^{\frac{R^2}{h^2}} - e^{-\frac{R^2}{h^2}}\right) ,$$

folglich wie es sein muß

$$P = \mathfrak{T}_z .$$

§. 79.

Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurde auf die Dehnung oder Stauung der Fläche keine Rücksicht genommen, oder es ist dabei stillschweigend vorausgesetzt, daß die Dichte q diejenige sei, welche die Fläche im Gleichgewichtszustande angenommen hat oder besitzt, und nach der Erörterung des §. 44 kann man wie bei der elastischen Linie für solche Stoffe, für welche jene Dehnungen und Stauungen immer sehr klein bleiben, die ursprüngliche Dichte q_0 der Fläche für einen Zustand, worin sie keiner äußern Kraft unterworfen ist, auch für ihren Gleichgewichtszustand unter Einwirkung einer gegebenen geometrischen Kraft gelten lassen.

Es kann jedoch auch Fälle geben, wo die Dehnungen oder Stauungen einer Fläche durch äußere physische Kräfte, welche längs bestimmter Schnitte derselben angreifen, sehr bedeutend werden, und jene Aenderungen in dem innern Zustande müssen jedenfalls berücksichtigt werden, wenn es sich um die Untersuchung der innern Bewegung einer Fläche

handelt; es liegt uns also zunächst die Aufgabe ob, die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen einer Fläche festzustellen.

Dazu wollen wir zuerst ein elastisches Band von der Länge L und einer durchaus gleichen Breite B betrachten, das an beiden Enden senkrecht zur Länge begrenzt ist und durch zwei gleiche physische Kräfte P gespannt wird, deren Wirkung sich auf die Breite des Bandes gleichmäßig vertheilt. Die Erfahrung lehrt, daß unter diesen Verhältnissen ein elastisches Band nicht nur der Länge nach gedehnt, sondern auch der Breite nach gestaut wird, oder daß seine Breite mit wachsender Zugkraft immer mehr abnimmt; es ist daher der geometrische Zug p für einen Punkt des Querschnittes nicht $= \frac{P}{B}$, sondern $= \frac{P}{B'}$ oder $\frac{P}{B - b}$, wenn wir die Breite, welche das Band durch die Zugkraft P annimmt, mit B′, und die Verminderung der ursprünglichen Breite B mit b bezeichnen.

Denken wir uns ferner ein solches Band in seiner wirklichen physischen Beschaffenheit aus einzelnen materiellen Punkten bestehend, welche nach einer gewissen Ordnung vertheilt sind, und wählen wir dazu die in Fig. 27 dargestellte Anordnung, nach welcher je vier zunächst liegenden Punkte die Ecken eines Rechteckes bilden, dessen Seiten m m′ und m n parallel zur Länge und Breite des Bandes liegen und mit a und b bezeichnet seien. Diese Punkte befinden sich im natürlichen Zustande des Bandes vermöge der zwischen ihnen thätigen Kräfte im Gleichgewicht, und suchen diese ihre gegenseitige Lage wieder einzunehmen, wenn das Gleichgewicht gestört worden war und die störende Ursache zu wirken aufhört. Es müssen daher nicht nur zwischen den Punkten m und m′, und n und n′, m und n, m′ und n′ innere Gegenwirkungen thätig sein, sondern auch solche nach den Diagonalen oder zwischen den Punkten m und n′, m′ und n stattfinden, weil sonst auch Gleichgewicht bestehen müßte, wenn die vier Punkte die Ecken irgend eines der Parallelogramme einnähmen, die mit den Seiten a und b construirt werden können. Wir müssen demnach annehmen, daß jede Aenderung in der relativen Lage des Punktes m′ in Bezug auf die Punkte m, n und n′ drei Kräfte hervorruft, welche ihn in die frühere Entfernung von jenen Punkten zurückzuführen streben, und können für nicht sehr bedeutende Aenderungen zugeben, daß diese Kräfte wie bei der elastischen Linie den Aenderungen der Entfernung proportional sind.

Bezeichnen wir also die Aenderung in der Entfernung der Punkte m und m′, oder n und n′ mit r, die der Entfernung b von m und n

oder von m' und n' mit $\mathfrak{y}$, dann die der Entfernung $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ von m und n' oder von m' und n mit $\mathfrak{w}$, die entsprechenden Kräfte mit p', p'' und p''', so werden wir die Beziehungen haben:

$$p' = \varepsilon' \frac{\mathfrak{x}}{a} \quad , \quad p'' = \varepsilon'' \frac{\mathfrak{y}}{b} \quad , \quad p''' = \varepsilon''' \frac{\mathfrak{w}}{d} \; .$$

Wird nun ein solches System, wie oben vorausgesetzt wurde, durch eine zu $m m'$ parallele Zugkraft gestreckt, welche sich auf alle zur Richtung $m n$ parallele Linien gleichmäßig vertheilt, so daß auf jede Linie die geometrische Kraft p wirkt, so werden sich die Punkte m' und n' parallel von m und n entfernen, bis die an einem dieser Punkte in der Richtung $m m'$ oder $n n'$ wirkenden innern Kräfte dem Zug p gleich geworden sind; zu gleicher Zeit werden sich diese Punkte aber auch einander nähern müssen, weil die von m' nach n und von n' nach m gerichteten Kräfte Componenten von n' nach m' und von m' nach n' geben, welche eine Verminderung der Entfernung b bewirken; die vier Punkte $m n m' n'$ werden daher nach eingetretenem Gleichgewichte die gegenseitige Lage $\mu \nu \mu' \nu'$, Fig. 28, einnehmen, nämlich die Eckpunkte eines Rechteckes bilden, dessen Seiten $a + \mathfrak{x}$ und $b - \mathfrak{y}$ sind.

Die Diagonale $\nu\mu' = d'$ dieses Rechteckes ist gleich $\sqrt{(a+\mathfrak{x})^2 + (b-\mathfrak{y})^2}$ oder mit Vernachlässigung der Quadrate und Producte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ annähernd

$$d' \doteq \sqrt{a^2 + b^2}\left(1 + \frac{a\mathfrak{x} - b\mathfrak{y}}{a^2 + b^2}\right) = d\left(1 + \frac{a\mathfrak{x}}{d^2} - \frac{b\mathfrak{y}}{d^2}\right) ,$$

und man hat damit einmal die Verlängerung der Diagonale d

$$\mathfrak{w} = d' - d = \frac{a}{d}\mathfrak{x} - \frac{b}{d}\mathfrak{y} ,$$

und dann die entsprechende innere Wirkung

$$d''' = \varepsilon''' \frac{\mathfrak{w}}{d} = \varepsilon''' \left(\frac{a^2}{d^2}\frac{\mathfrak{x}}{a} - \frac{b^2}{d^2}\frac{\mathfrak{y}}{b}\right) .$$

Diese nach den Richtungen $\mu\mu'$ und $\mu'\nu$ zerlegt, gibt die Componenten

$$p''' \frac{a+\mathfrak{x}}{d'} \qquad \text{und} \qquad p''' \frac{b-\mathfrak{y}}{d'} ,$$

welche mit gleicher Annäherung wie vorher die einfachen Werthe:

$$\varepsilon''' \left(\frac{a^3}{d^3}\frac{x}{a} - \frac{ab^2}{d^3}\frac{y}{b}\right) \quad \text{und} \quad \varepsilon''' \left(\frac{a^2b}{d^3}\frac{x}{a} - \frac{b^3}{d^3}\frac{y}{b}\right)$$

annehmen, und mit den Kräften p' und p'', von denen die erste von μ' nach μ, die zweite in der Verlängerung von $\nu'\mu'$ wirkt, für den Punkt μ' die Gleichgewichtsbedingungen geben:

$$\text{a.)} \quad \begin{cases} p = \varepsilon' \dfrac{x}{a} + \varepsilon''' \left(\dfrac{a^3}{d^3}\dfrac{x}{a} - \dfrac{ab^2}{d^3}\dfrac{y}{b}\right), \\[2ex] 0 = \varepsilon'' \dfrac{y}{b} + \varepsilon''' \left(\dfrac{a^2b}{d^3}\dfrac{x}{a} - \dfrac{b^3}{d^3}\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

Würde dagegen dasselbe elastische Band durch denselben geometrischen Zug p nach der Breite oder nach der Richtung mn gestreckt, so hätte man offenbar die Bedingungen:

$$\text{b.)} \quad \begin{cases} p = \varepsilon'' \dfrac{y}{b} + \varepsilon''' \left(\dfrac{b^3}{d^3}\dfrac{y}{b} - \dfrac{a^2b}{d^3}\dfrac{x}{a}\right), \\[2ex] 0 = \varepsilon' \dfrac{x}{a} - \varepsilon''' \left(\dfrac{ab^2}{d^3}\dfrac{y}{b} - \dfrac{a^3}{d^3}\dfrac{x}{a}\right). \end{cases}$$

Bestimmen wir ferner, daß das Band oder der Stoff, aus welchem es geschnitten wurde, homogen und der Länge und Breite nach von constanter Elasticität sein soll, so müssen alle a und alle b gleich sein und die Verhältnisse $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ so wie die Coeffizienten ε', ε'' und ε''' in der ganzen Ausdehnung des Bandes constante Werthe behalten; es wird daher

$$\frac{x}{a} = \frac{l}{L} \quad , \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{B}$$

werden, und zwar für die beiden vorhergehenden Fälle, wenn man nun unter L und B die ursprünglichen Ausdehnungen des Bandes nach den Richtungen mm′ und mn begreift und unter l und b die Verlängerungen oder Verkürzungen derselben. Sind diese Verhältnisse durch zwei nach der obigen Angabe angestellte Versuche bekannt, so werden die vier Gleichungen (a) und (b) dazu dienen, die drei Coeffizienten ε', ε''

und ε''' und das Verhältniß $\frac{a}{b}$ für den betreffenden Stoff zu bestimmen. Beschränken wir uns aber auf die Annahme, daß das Band nach jeder Richtung dieselbe Elasticität besitzen soll, so muß der Werth der Verlängerung $\frac{l}{L}$ beim ersten Versuch dem von $\frac{b}{B}$ beim zweiten, und die Stauung $\frac{b}{B}$ beim ersten der Stauung $\frac{l}{L}$ beim zweiten gleich werden, und man zieht mit dieser Voraussetzung aus den Gleichungen (a) und (b) die neuen Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon' - \varepsilon'')\,d^3 = \varepsilon'''\,(b^3 - a^3)\\ (\varepsilon' a - \varepsilon'' b)\,d^3 = \varepsilon'''\,(b^4 - a^4)\end{array}\right\}, \qquad (c.$$

aus welchen auf den ersten Blick hervorgeht, daß wenn $\varepsilon' = \varepsilon''$ ist, auch $a = b$ sein muß. Man schließt aber auch daraus

$$\varepsilon' = -\frac{a^3}{d^3}\varepsilon''' \quad , \qquad \varepsilon'' = -\frac{b^3}{d^3}\varepsilon''' \;;$$

wenn also ε' und ε'' nicht gleich wären, so müßte ε''' ihnen dem Zeichen nach entgegengesetzt sein, d. h. es müßte zwischen den Punkten m und n' bei größerer Entfernung eine abstoßende, bei größerer Annäherung eine anziehende Wirkung eintreten. Dieses widerspricht aber unserer ursprünglichen Annahme; die Gleichungen (c) müssen also unabhängig von einer bestimmten Beziehung zwischen ε' und ε''' oder ε'' und ε''' befriedigt, folglich $\varepsilon'' = \varepsilon'$, $b = a$ werden. Man erhält dann die Werthe von ε' und ε''' durch einen einzigen Versuch; denn die Gleichungen (a) geben ebenso wie die Gleichungen (b) die Beziehungen:

$$p = \varepsilon'\frac{l}{L}\,\frac{\varepsilon'\sqrt{8} + 2\varepsilon'''}{\varepsilon'\sqrt{8} + \varepsilon'''} \quad , \qquad \left(\varepsilon'\sqrt{8} + \varepsilon'''\right)\frac{b}{B} = \varepsilon'''\,\frac{l}{L} \,,$$

worin b insbesondere die bei der Verlängerung l sich ergebende Verminderung der Breite bedeutet, und woraus sich für beobachtete Werthe von p, l und b die Coeffizienten ε' und ε''' mittels der einfachen Ausdrücke:

$$\varepsilon' = \frac{p}{\lambda + \beta} \quad , \qquad \varepsilon''' = \varepsilon'\frac{\beta\sqrt{8}}{\lambda - \beta} \,,$$

worin zur Abkürzung λ für $\frac{\mathfrak{l}}{L}$ und β für $\frac{\mathfrak{b}}{B}$ steht, berechnen lassen. Es ist dann aber vortheilhafter für den Coeffizienten $\frac{\varepsilon'''}{\sqrt{8}}$ die Bezeichnung ε_2 einzuführen, und ε_1 statt ε' zu setzen, indem dadurch die Gleichungen (a) die einfachere Form:

$$p = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{x}}{a} - \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{y}}{b} \quad , \qquad 0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{y}}{b} - \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{x}}{a} \ ,$$

$$p = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{\mathfrak{x}}{a}$$

annehmen.

Betrachten wir ferner noch den Fall, wo das Band nach der Länge und Breite zugleich gestreckt wird, und zwar der Länge nach durch einen geometrischen Zug p_1, der Breite nach durch die geometrische Spannung p_2, und bezeichnen wir wieder mit $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die positiven Dehnungen nach diesen Richtungen, so erhalten wir für unsere vier Punkte $m\,n\,m'\,n'$ offenbar die Beziehungen:

$$\text{d.)} \quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \varepsilon' \frac{\mathfrak{x}}{a} + \varepsilon''' \left(\frac{a^3}{d^3} \frac{\mathfrak{x}}{a} + \frac{a b^2}{d^3} \frac{\mathfrak{y}}{b} \right) , \\ p_2 &= \varepsilon'' \frac{\mathfrak{y}}{a} + \varepsilon''' \left(\frac{a^2 b}{d^3} \frac{\mathfrak{x}}{a} + \frac{b^3}{d^3} \frac{\mathfrak{y}}{b} \right) , \end{aligned} \right.$$

welche für eine nach jeder Richtung constante Elasticität in

$$p_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{x}}{a} + \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{y}}{b} \quad , \qquad p_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{y}}{b} + \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{x}}{a}$$

oder auch in

$$p_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{l}}{L} + \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{b}}{B} \quad , \qquad p_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\mathfrak{b}}{B} + \varepsilon_2 \frac{\mathfrak{l}}{L}$$

übergehen. Wenn $p_2 = p_1$ wird, folgt daraus

$$\frac{\mathfrak{x}}{a} = \frac{\mathfrak{y}}{b} \quad , \qquad p_1 = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)\frac{\mathfrak{x}}{a} \ ;$$

wird demnach das Band nach zwei Richtungen durch dieselbe geome-

die Gleichungen der elastischen Fläche vor und nach der Dehnung vorstellen, so hat man

$$\mathfrak{z} = z - z^{(0)} = f(x,y) - f_0(x - \mathfrak{x}\,,\; y - \mathfrak{y})$$

und zieht daraus

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta x} &= \frac{dz}{dx} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\delta x^{(0)}}{\delta x} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\delta y^{(0)}}{\delta x} \\
&= \frac{dz}{dx} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}} + \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} + \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x} \\
\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta y} &= \frac{dz}{dy} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\delta y^{(0)}}{\delta y} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\delta x^{(0)}}{\delta y} \\
&= \frac{dz}{dy} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}} + \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} + \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y}
\end{aligned}\right\} \quad (a.$$

Es gibt demnach für jede Uebergangsrichtung nur drei unabhängige Dehnungen, nämlich

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} = \mathfrak{a} \;,\quad \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} = \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y} + \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x} = 2\mathfrak{f}\,;$$

es können also auch die Spannungen in einem beliebigen Punkte als Functionen dieser Dehnungen betrachtet, und nach den vorhergehenden Erörterungen durch die einfachen Summen:

$$A_1\mathfrak{a} + B_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{f} \;,\quad A_2\mathfrak{a} + B_2\mathfrak{b} + C_2\mathfrak{f} \;,\quad \text{u. s. f.}$$

ausgedrückt werden, worin A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , etc. , noch näher zu bestimmende Coeffizienten vorstellen.

Diese Coeffizienten werden im Allgemeinen sowohl von der Gestalt der Fläche als von ihrer Elasticität in dem betreffenden Punkte abhängen, da sie ihrer Bedeutung nach Kräfte sind, welche, in der Richtung der Fläche wirkend, Dehnungen von bestimmter Größe zu erzeugen vermögen; beschränken wir uns aber auf den einfacheren Fall, wo die Elasticität in irgend einem Punkte nach jeder Richtung hin dieselbe ist, und wählen wir für die Spannungen, welche den vorher-

ersetzen und daraus im Allgemeinen den Schluß ziehen, daß die Spannungen in einem Punkte eines beliebigen Schnittes einer elastischen Fläche, als Functionen der in diesem Punkte stattfindenden geometrischen Dehnungen genommen, in Reihen entwickelt gedacht werden können, welche nach aufsteigenden Potenzen dieser Dehnungen fortschreiten und die, insofern nur sehr kleine Dehnungen berücksichtigt werden, für die erste Annäherung auf diejenigen Glieder beschränkt werden dürfen, worin jene Dehnungen nur in der ersten Potenz vorkommen.

Was nun zunächst diese Dehnungen selbst betrifft, so hat man im jetzigen Falle, wo alle Dehnungen und Spannungen nur Functionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sind, für die geometrische Dehnung $\mathfrak{d}$, welche einer bestimmten Uebergangsrichtung auf der Fläche entspricht nach §. 42, (a) die Componenten:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}_x &= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\cos\beta\,, \\ \mathfrak{d}_y &= \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta\,, \\ \mathfrak{d}_z &= \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta\,, \end{aligned}\right.$$

und erhält damit für die in der Richtung des Ueberganges stattfindende Dehnung

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \mathfrak{d}_x\cos\alpha + \mathfrak{d}_y\cos\beta + \mathfrak{d}_z\cos\gamma$$

den Ausdruck:

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\cos^2\beta$$
$$+ \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\cos\alpha\cos\gamma + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Es ist aber leicht zu sehen, daß die Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$ und $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}$ von den Gestalten der elastischen Fläche vor und nach der Dehnung und von den Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}$ abhängen, denn wenn

$$z^{(0)} = f_0\left(x^{(0)}\,,\; y^{(0)}\right) \qquad \text{und} \qquad z = f(x\,,\; y)$$

die Gleichungen der elastischen Fläche vor und nach der Dehnung vorstellen, so hat man

$$\mathfrak{z} = z - z^{(0)} = f(x, y) - f_0(x - \mathfrak{x}, \quad y - \mathfrak{y})$$

und zieht daraus

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} &= \frac{dz}{dx} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\partial x^{(0)}}{\partial x} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} \\
&= \frac{dz}{dx} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}} + \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \\
\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} &= \frac{dz}{dy} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\partial y^{(0)}}{\partial y} - \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\partial x^{(0)}}{\partial y} \\
&= \frac{dz}{dy} - \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}} + \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}
\end{aligned}\right\} . \qquad (a.$$

Es gibt demnach für jede Uebergangsrichtung nur drei unabhängige Dehnungen, nämlich

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \mathfrak{a} \quad , \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = 2\mathfrak{f} ;$$

es können also auch die Spannungen in einem beliebigen Punkte als Functionen dieser Dehnungen betrachtet, und nach den vorhergehenden Erörterungen durch die einfachen Summen:

$$A_1\mathfrak{a} + B_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{f} \quad , \quad A_2\mathfrak{a} + B_2\mathfrak{b} + C_2\mathfrak{f} \quad , \quad \text{u. s. f.}$$

ausgedrückt werden, worin A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , etc. , noch näher zu bestimmende Coeffizienten vorstellen.

Diese Coeffizienten werden im Allgemeinen sowohl von der Gestalt der Fläche als von ihrer Elasticität in dem betreffenden Punkte abhängen, da sie ihrer Bedeutung nach Kräfte sind, welche, in der Richtung der Fläche wirkend, Dehnungen von bestimmter Größe zu erzeugen vermögen; beschränken wir uns aber auf den einfacheren Fall, wo die Elasticität in irgend einem Punkte nach jeder Richtung hin dieselbe ist, und wählen wir für die Spannungen, welche den vorher-

gehenden Summen gleichgesetzt werden sollen, diejenigen, von denen die Spannung für irgend eine Uebergangsrichtung oder für irgend eine andere Lage der x=Achse in der xy=Ebene abhängt, so werden jene Coeffizienten von dieser Lage der Achsen unabhängig werden und nur noch mit einer Function des Winkels ν behaftet sein, da nur dieser für alle Uebergangsrichtungen unveränderlich ist.

Um nun zunächst die betreffenden Spannungen zu erhalten, beziehen wir, wie in §. 39, die Lage eines Punktes der beliebigen elastischen Fläche auf ein neues Coordinatensystem der ξ, η, ζ, welches mit dem ursprünglichen die z=Achse gemein hat und dessen ξ=Achse den Winkel ω mit der Achse der x einschließt. Durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ oder xyz führen wir dann zwei Schnitte parallel zu den Ebenen der ξz und ηz, und bezeichnen die den Spannungen S_1, S_2 und S_3 entsprechenden neuen Spannungen mit

$$S_1^{(\xi)} = T_\xi^{(\xi)} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2} = T_\xi^{(\xi)} \sec m_\xi ,$$

$$S_2^{(\xi)} = T_\eta^{(\eta)} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2} = T_\eta^{(\eta)} \sec l_\eta ,$$

$$S_3^{(\xi)} = T_\eta^{(\xi)} \sec m_\xi = T_\xi^{(\eta)} \sec l_\eta ,$$

indem wir der frühern Bezeichnung entsprechend die zu den neuen Achsen parallelen Componenten der Spannungen $T^{(\xi)}$ und $T^{(\eta)}$, welche den gemachten Parallelschnitten zukommen, durch $T_\xi^{(\xi)}$, $T_\eta^{(\xi)}$, $T_\zeta^{(\xi)}$, $T_\xi^{(\eta)}$, $T_\eta^{(\eta)}$, $T_\zeta^{(\eta)}$ vorstellen. Sind dann noch $q\Xi$, qH, qZ die zu denselben Achsen parallelen Componenten der in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ wirkenden geometrischen Kraft, so erhalten wir statt der beiden ersten der Gleichungen (121) in §. 76 die entsprechenden neuen Gleichungen:

$$\text{b.)} \begin{cases} \dfrac{\delta . T_\xi^{(\xi)} \sec m_\xi}{\delta \xi} + \dfrac{\delta . T_\xi^{(\eta)} \sec l_\eta}{\delta \eta} + q\Xi \sec \nu = 0 , \\[2ex] \dfrac{\delta . T_\eta^{(\xi)} \sec m_\xi}{\delta \xi} + \dfrac{\delta . T_\eta^{(\eta)} \sec l_\eta}{\delta \eta} + qH \sec \nu = 0 . \end{cases}$$

$$T^{(\xi)} \sec m_\xi \cos \vartheta = \left(T^{(\xi)}_x \cos \alpha + T^{(\xi)}_y \cos \beta + T^{(\xi)}_z \cos \gamma\right) \sec m_\xi ,$$

welcher mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichungen (d), (e) und (f) und mit der Beachtung, daß man im jetzigen Falle hat

$$\cos \alpha = \cos \omega \sin \gamma , \quad \cos \beta = \sin \omega \sin \gamma , \quad \sin \gamma = \cos l_\eta \ ^{*)}$$

die Form:

$$T^{(\xi)} \sec m_\xi \sec l_\eta \cos \vartheta = \left[S_1\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) + S_3 \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right] \cos^2 \omega$$

$$+ \left[S_3 \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + S_2\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\right] \sin^2 \omega$$

$$+ \left[S_3\left(2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)+(S_1+S_2)\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right] \sin \omega \cos \omega$$

annimmt, und zeigt, daß die Spannungen für alle Uebergangsrichtungen um den Punkt xyz herum von den drei zusammengesetzten Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}_1 = S_1\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right] + S_3 \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}, \quad \mathfrak{S}_2 = S_2\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] + S_3 \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}, \\ \mathfrak{S}_3 = S_3\left[2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right] + (S_1+S_2)\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (g.$$

abhängen und als Functionen derselben betrachtet werden können, und daß daher diese Spannungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ es sind, welche für jede Uebergangsrichtung constant bleiben.

---

*) Es ist nämlich noch (f)

$$\cos \gamma = \left(\frac{dz}{dx}\cos \omega + \frac{dz}{dy}\sin \omega\right) \sin \gamma , \quad \sin^2 \gamma \left[1+\left(\frac{dz}{dx}\cos \omega + \frac{dz}{dx}\sin \omega\right)^2\right] = 1$$

$$\sec^2 l_\eta = 1 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

u. s. f.

$$\xi = x \cos\omega + y \sin\omega \quad , \quad \eta = y \cos\omega - x \sin\omega$$

zu Hülfe und behandelt die Gleichungen (c) in gleicher Weise, wie die Gleichungen (e) in §. 39, so findet man die den Gleichungen (79) entsprechenden:

$$\text{d.)} \begin{cases} T_x^{(\xi)} \sec m_\xi = S_1 \cos\omega + S_3 \sin\omega \ , & T_x^{(\eta)} = S_3 \cos\omega - S_1 \sin\omega \ , \\ T_y^{(\xi)} \sec m_\xi = S_3 \cos\omega + S_2 \sin\omega \ , & T_y^{(\eta)} = S_2 \cos\omega - S_3 \sin\omega \ . \end{cases}$$

Endlich wird man sich mit Hülfe der Gleichungen:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi} \quad , \quad \frac{dz}{d\eta} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\eta}$$

leicht überzeugen, daß man auch hat [§. 78), (e)]

$$\text{e.)} \begin{cases} T_z^{(\xi)} = T_\xi^{(\xi)} \frac{dz}{d\xi} + T_\eta^{(\xi)} \frac{dz}{d\eta} = T_x^{(\xi)} \frac{dz}{dx} + T_y^{(\xi)} \frac{dz}{dy} \ , \\ T_z^{(\eta)} = T_\xi^{(\eta)} \frac{dz}{d\xi} + T_\eta^{(\eta)} \frac{dz}{d\eta} = T_x^{(\eta)} \frac{dz}{dx} + T_y^{(\eta)} \frac{dz}{dy} \ . \end{cases}$$

Wählt man nun auf der elastischen Fläche von dem Punkte xyz aus eine beliebige Uebergangsrichtung, welche mit den drei Coordinatenachsen der x, y und z die Winkel

$$\alpha = arc \cos \frac{\delta x}{\delta s} \quad , \quad \beta = arc \cos \frac{\delta y}{\delta s} \quad , \quad \gamma = arc \cos \frac{\delta z}{\delta s}$$

bildet, so daß man hat

$$\text{f.)} \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{dx} \cos\alpha + \frac{dz}{dy} \cos\beta \ .$$

und schneidet diese Fläche in demselben Punkte durch eine Ebene, welche senkrecht ist zur Projection jener Uebergangsrichtung in der xy-Ebene, so findet man für die entsprechende im Sinne des Ueberganges gerichtete Spannung zuerst den Ausdruck:

$$T^{(\xi)}\, sec\, m_\xi\, cos\,\vartheta = \left(T^{(\xi)}_x\, cos\,\alpha + T^{(\xi)}_y\, cos\,\beta + T^{(\xi)}_z\, cos\,\gamma\right) sec\, m_\xi\ ,$$

welcher mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichungen (d), (e) und (f) und mit der Beachtung, daß man im jetzigen Falle hat

$$cos\,\alpha = cos\,\omega\, sin\,\gamma\ ,\quad cos\,\beta = sin\,\omega\, sin\,\gamma\ ,\quad sin\,\gamma = cos\, l_\eta \ *)$$

die Form:

$$T^{(\xi)} sec\, m_\xi\, sec\, l_\eta\, cos\,\vartheta = \left[S_1\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)+S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right] cos^2\omega$$

$$+\left[S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}+S_2\left(1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\right] sin^2\omega$$

$$+\left[S_3\left(2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)+(S_1+S_2)\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right] sin\,\omega\, cos\,\omega$$

annimmt, und zeigt, daß die Spannungen für alle Uebergangsrichtungen um den Punkt xyz herum von den drei zusammengesetzten Spannungen:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{S}_1 = S_1\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]+S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy},\quad \mathfrak{S}_2 = S_2\left[1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]+S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}, \\ &\mathfrak{S}_3 = S_3\left[2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]+(S_1+S_2)\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} \end{aligned}\right\}\ (g.$$

abhängen und als Functionen derselben betrachtet werden können, und daß daher diese Spannungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ es sind, welche für jede Uebergangsrichtung constant bleiben.

---

*) Es ist nämlich noch (f)

$$cos\,\gamma = \left(\frac{dz}{dx}cos\,\omega+\frac{dz}{dy}sin\,\omega\right) sin\,\gamma\ ,\quad sin^2\gamma\left[1+\left(\frac{dz}{dx}cos\,\omega+\frac{dz}{dx}sin\,\omega\right)^2\right]=1$$

$$sec^2 l_\eta = 1+\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = 1+\left(\frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi}\right)^2$$

u. s. f.

Setzen wir demnach

$$\text{h.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 = A_1'\,\mathfrak{a} + B_1'\,\mathfrak{b} + C_1'\,\mathfrak{f}\,, \\ \mathfrak{S}_2 = A_2'\,\mathfrak{a} + B_2'\,\mathfrak{b} + C_2'\,\mathfrak{f}\,, \\ \mathfrak{S}_3 = A_3'\,\mathfrak{a} + B_3'\,\mathfrak{b} + C_3'\,\mathfrak{f}\,, \end{cases}$$

so werden die Coeffizienten A_1', B_1', etc. nach den obigen Bemerkungen nur insofern von der Gestalt und Richtung der Fläche in dem Punkte xyz abhängen, als sie noch Functionen des Winkels ν enthalten. Die Beziehungen (h) müssen aber für alle Punkte der elastischen Fläche auf gleiche Weise bestehen; jene Coeffizienten dürfen sich also auch mit dem Winkel ν nur in derselben Weise ändern, d. h. sie müssen alle eine und dieselbe Function von ν als Factor enthalten, welcher ausgeschieden, auf die linke Seite gebracht und einstweilen mit $\hat{\nu}$ bezeichnet werden kann, so daß die Beziehungen (h) nun die Form annehmen:

$$\text{i.)} \quad \begin{cases} \hat{\nu}\,\mathfrak{S}_1 = A_1\,\mathfrak{a} + B_1\,\mathfrak{b} + C_1\,\mathfrak{f}\,, \\ \hat{\nu}\,\mathfrak{S}_2 = A_2\,\mathfrak{a} + B_2\,\mathfrak{b} + C_2\,\mathfrak{f}\,, \\ \hat{\nu}\,\mathfrak{S}_3 = A_3\,\mathfrak{a} + B_3\,\mathfrak{b} + C_3\,\mathfrak{f}\,, \end{cases}$$

worin dann die Coeffizienten A_1, B_1, etc. nur noch Elastizitätscoeffizienten sind und, bei gleichem Gesetze für die Aenderung der Elastizität von einem Punkt zum andern, für Flächen von jeder beliebigen Form gelten, welche also namentlich für den Fall einer Fläche von durchaus constanter Elastizität auch durchaus constant sein werden. Ebenso bleibt die Function $\hat{\nu}$ für jede Form der elastischen Fläche dieselbe und kann daher durch die Betrachtung einfacher Fälle, in welchen die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen unmittelbar zu erkennen sind, bestimmt werden.

§. 81.

Die Gleichungen (i) enthalten neun verschiedene Coeffizienten, und es wären daher zu ihrer Bestimmung drei Versuche nothwendig; es wird aber einleuchten, daß wenn die Elastizität einer Fläche um einen Punkt herum sich für die verschiedenen Uebergangsrichtungen stetig ändert, also eine Function des Winkels ω ist, zwei Versuche hinreichen müssen, um jene Coeffizienten zu bestimmen, und daß für unsere oben gemachte

Voraussetzung einer nach jeder Richtung gleichen Elastizität ein einziger Versuch dazu genügen muß; im ersten Falle können daher jene Coeffizienten höchstens von sechs, im letzteren höchstens von drei verschiedenen Constanten abhängen und die folgende Betrachtung wird dazu dienen, diese Abhängigkeit im zweiten Falle zu ermitteln.

Wenn die Elastizität einer materiellen Fläche von einem Punkte x y z aus nach jeder Richtung hin die gleiche ist, so müssen, wie schon bemerkt wurde, die Coeffizienten der Gleichungen (i) von der Lage der Achsen unabhängig sei, also namentlich dieselben bleiben, wenn man die Fläche auf ein neues Coordinatensystem der ξ, η, ζ bezieht, dessen ξ=Achse mit der früheren x=Achse einen beliebigen Winkel ω bildet, während die z=Achse beiden gemeinschaftlich bleibt. Bezeichnet man also die den neuen Achsen entsprechenden Größen mit einem Accent, so muß man haben

$$\left.\begin{aligned}\hat{\nu}\,\mathfrak{S}_1' &= A_1\,\mathfrak{a}' + B_1\,\mathfrak{b}' + C_1\,\mathfrak{f}\ ,\\ \hat{\nu}\,\mathfrak{S}_2' &= A_2\,\mathfrak{a}' + B_2\,\mathfrak{b}' + C_2\,\mathfrak{f}\ ,\\ \hat{\nu}\,\mathfrak{S}_3' &= A_3\,\mathfrak{a}' + B_3\,\mathfrak{b}' + C_3\,\mathfrak{f}\ ,\end{aligned}\right\}\qquad (k.$$

und es ist in diesen Gleichungen

$$\mathfrak{S}_1' = S_1'\left[1 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2\right] + S_3'\,\frac{dz}{d\xi}\,\frac{dz}{d\eta}\ ,$$

u. s. f.

$$\mathfrak{a}' = \frac{\delta\mathfrak{x}'}{\delta\xi}\ ,\qquad \mathfrak{b}' = \frac{\delta\mathfrak{y}'}{\delta\eta}\ ,\qquad 2\mathfrak{f} = \frac{\delta\mathfrak{x}'}{\delta\eta} + \frac{\delta\mathfrak{y}'}{\delta\xi}\ .$$

Man wird ferner wie im vorhergehenden §. haben

$$S_1' = T^{(\xi)}_{\xi}\,sec\,m_{\xi}\,,\ S_2' = T^{(\eta)}_{\eta}\,sec\,l_{\eta}\,,\ S_3' = T^{(\xi)}_{\eta}\,sec\,m_{\xi} = T^{(\eta)}_{\xi}\,sec\,l_{\eta}\ ,$$

und da auch aus den daselbst aufgestellten Beziehungen

$$T^{(\xi)}_{\xi} = T^{(\xi)}_{x}\,cos\,\omega + T^{(\xi)}_{y}\,sin\,\omega\ ,\qquad T^{(\eta)}_{\xi} = T^{(\eta)}_{x}\,cos\,\omega + T^{(\eta)}_{y}\,sin\,\omega$$

$$T^{(\xi)}_{\eta} = T^{(\xi)}_{y}\,cos\,\omega - T^{(\xi)}_{x}\,sin\,\omega\ ,\qquad T^{(\eta)}_{\eta} = T^{(\eta)}_{y}\,cos\,\omega - T^{(\eta)}_{x}\,sin\,\omega$$

folgt, mittelst der Gleichungen (d) weiter ableiten

$$\left\{\begin{aligned} S_1' &= S_1 \cos^2\omega + S_2 \sin^2\omega + 2S_3 \sin\omega\cos\omega\ , \\ S_2' &= S_2 \cos^2\omega + S_1 \sin^2\omega - 2S_3 \sin\omega\cos\omega\ , \\ S_3' &= (S_2 - S_1)\sin\omega\cos\omega + S_3(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\ . \end{aligned}\right.$$

Beachtet man ferner die Beziehungen:

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\xi} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\xi} = \frac{dz}{dx}\cos\omega + \frac{dz}{dy}\sin\omega$$

$$\frac{dz}{d\eta} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{d\eta} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{d\eta} = \frac{dz}{dy}\cos\omega - \frac{dz}{dx}\sin\omega$$

so findet man

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1' = {} & (S_1\cos^2\omega + S_2\sin^2\omega + 2S_3\sin\omega\cos\omega)\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\cos\omega + \frac{dz}{dy}\sin\omega\right)^2\right] \\ & + \left(\frac{dz}{dx}\cos\omega + \frac{dz}{dy}\sin\omega\right)\left(\frac{dz}{dy}\cos\omega - \frac{dz}{dx}\sin\omega\right) \times \\ & \times [(S_2 - S_1)\sin\omega\cos\omega + S_3(\cos^2\omega - \sin^2\omega)]\ , \end{aligned}$$

und nach der Entwickelung und den sich ergebenden Reductionen wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1' = {} & \left[S_1\left(1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) + S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right]\cos^2\omega \\ & + \left[S_2\left(1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right) + S_3\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\right]\sin^2\omega \\ & + \left[(S_1 + S_2)\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} + S_3\left(2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)\right]\sin\omega\cos\omega\ . \end{aligned}$$

Verfährt man ebenso mit den Werthen von $\mathfrak{S}_2'$ und $\mathfrak{S}_3'$, so ergeben sich die Beziehungen:

$$1.)\ \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_1' &= \mathfrak{S}_1 \cos^2\omega + \mathfrak{S}_2 \sin^2\omega + \mathfrak{S}_3 \sin\omega\cos\omega\ , \\ \mathfrak{S}_2' &= \mathfrak{S}_2 \cos^2\omega + \mathfrak{S}_1 \sin^2\omega - \mathfrak{S}_3 \sin\omega\cos\omega\ , \\ \mathfrak{S}_3' &= \mathfrak{S}_3(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + 2(\mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1)\sin\omega\cos\omega\ . \end{aligned}\right.$$

Auf der andern Seite hat man auch

$$\xi = x \cos\omega + y \sin\omega \;,\quad \xi^{(0)} = x^{(0)} \cos\omega + y^{(0)} \sin\omega$$

$$\eta = y \cos\omega - x \sin\omega \;,\quad \eta^{(0)} = y^{(0)} \cos\omega - x^{(0)} \sin\omega$$

$$\mathfrak{x}' = \xi - \xi^{(0)} \;,\quad \mathfrak{y}' = \eta - \eta^{(0)} \;,\quad \mathfrak{x} = x - x^{(0)} \;,\quad \mathfrak{y} = y - y^{(0)}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial y}\sin\omega$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\cos^2\omega + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\sin^2\omega + \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right)\sin\omega\cos\omega$$

u. s. f.

oder

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}' &= \mathfrak{a}\cos^2\omega + \mathfrak{b}\sin^2\omega + 2\mathfrak{f}\sin\omega\cos\omega \\ \mathfrak{b}' &= \mathfrak{b}\cos^2\omega + \mathfrak{a}\sin^2\omega - 2\mathfrak{f}\sin\omega\cos\omega \\ \mathfrak{f}' &= \mathfrak{f}(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\sin\omega\cos\omega \;. \end{aligned}\right\} \text{(m.}$$

Machen wir nun zuerst $\omega = \frac{1}{2}\pi$, so folgen die Werthe:

$$\mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2 \;,\quad \mathfrak{S}_2' = \mathfrak{S}_1 \;,\quad \mathfrak{S}_3' = -\mathfrak{S}_3 \;,$$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b} \;,\quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} \;,\quad \mathfrak{f}' = -\mathfrak{f} \;,$$

und die Gleichungen (k) gehen in die folgenden über:

$$\nu\mathfrak{S}_2 = A_1\mathfrak{b} + B_1\mathfrak{a} - C_1\mathfrak{f} \;,$$

$$\nu\mathfrak{S}_1 = A_2\mathfrak{b} + B_2\mathfrak{a} - C_2\mathfrak{f} \;,$$

$$-\nu\mathfrak{S}_3 = A_3\mathfrak{b} + B_3\mathfrak{a} - C_3\mathfrak{f} \;,$$

welche, je eine mit der entsprechenden der Gleichungen (i) verglichen, folgende Beziehungen liefern:

$$(A_1 - B_2)\,\mathfrak{a} + (B_1 - A_2)\,\mathfrak{b} + (C_1 + C_2)\,\mathfrak{f} = 0$$

$$(A_2 - B_1)\,\mathfrak{a} + (B_2 - A_1)\,\mathfrak{b} + (C_2 + C_1)\,\mathfrak{f} = 0 \;,$$

$$(A_3 + B_3)(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = 0 \;.$$

Diese müssen aber unabhängig von den besondern Werthen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{f}$ bestehen, und führen daher auf die Bedingungen:

$$A_2 = B_1 \quad , \quad B_2 = A_1 \quad , \quad C_2 = -C_1 \quad , \quad B_3 = -A_3 \, ,$$

durch welche die Coeffizienten der Gleichungen (i) und (k) auf fünf zurückgeführt werden. Führt man dann in die letztern auf der linken Seite für $\mathfrak{S}_1'$, $\mathfrak{S}_2'$ und $\mathfrak{S}_3'$ die Werthe (l) und in diese selbst wieder die aus den Gleichungen (i) für $\widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_1$, $\widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_2$, $\widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_3$ sich ergebenden Werthe ein, und setzt auf der rechten Seite für $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{f}$ die vorhergehenden Werthe (m), so wird die erste der Gleichungen (k)

$$\begin{aligned}(A_1\mathfrak{a} + B_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{f})\cos^2\omega &+ (B_1\mathfrak{a} + A_1\mathfrak{b} - C_1\mathfrak{f})\sin^2\omega \\ &+ [A_3(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + C_3\mathfrak{f}]\sin\omega\cos\omega \\ = A_1(\mathfrak{a}\cos^2\omega &+ \mathfrak{b}\sin^2\omega + 2\mathfrak{f}\sin\omega\cos\omega) \\ + B_1(\mathfrak{a}\sin^2\omega &+ \mathfrak{b}\cos^2\omega - 2\mathfrak{f}\sin\omega\cos\omega) \\ + C_1[\mathfrak{f}(\cos^2\omega &- \sin^2\omega) + (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\sin\omega\cos\omega]\end{aligned}$$

und reduzirt sich ebenso wie die zweite auf die Beziehung:

$$(A_3 + C_1)(\mathfrak{a} - \mathfrak{b}) + [C_3 - 2(A_1 - B_1)]\mathfrak{f} = 0 \, ,$$

welche sich in die Bedingungen:

$$A_3 + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad C_3 = 2(A_1 - B_1)$$

auflöst. Die dritte jener Gleichungen dagegen gibt nach den entsprechenden Reductionen die Beziehung:

$$[2(A_1 - B_1) - C_3](\mathfrak{b} - \mathfrak{a}) - 4C_1\mathfrak{f} = 0$$

und daher die Bedingungen:

$$C_3 = 2(A_1 - B_1) \quad , \quad C_1 = 0 \, ,$$

von denen die letzte mittels der vorhergehenden auch auf

$$A_3 = 0$$

führt, so daß die Gleichungen (i) auf die einfachen Gleichungen:

$$\text{n.)} \quad \begin{cases} \widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_1 = A_1\mathfrak{a} + B_1\mathfrak{b} \, , \\ \widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_2 = B_1\mathfrak{a} + A_1\mathfrak{b} \, , \\ \widehat{\nu}\,\mathfrak{S}_3 = 2(A_1 - B_1)\mathfrak{f} \end{cases}$$

zurückkommen, welche zwar drei verschiedene Coeffizienten, aber nur zwei unabhängige Constanten enthalten und zeigen, daß unser einfacher Versuch mit einem ebenen Bande (§. 79) genügt, um die verschiedenen Elastizitäts- oder Dehnungscoeffizienten für alle elastischen Flächen, deren Elastizität nach jeder Richtung hin constant ist, zu bestimmen.

Von diesem einfachen Versuche gehen wir nun auch aus, um die Function $\widehat{\nu}$ zu bestimmen. Zuerst nehmen wir die Ebene des rechtwinklig begrenzten Bandes als Ebene der xy, zwei anliegende Seiten desselben als Achsen der x und y und setzen voraus, daß in der Richtung der x-Achse der geometrische Zug p_1, in der Richtung der y-Achse die geometrische Kraft p_2 wirke; wir haben dann die besondern Werthe:

$$\frac{dz}{dx}=0\,,\quad \frac{dz}{dy}=0\,,\quad \mathfrak{S}_1=S_1=T^{(x)}=p_1\,,\quad \mathfrak{S}_2=S_2=T^{(y)}=p_2\,,\quad \mathfrak{S}_3=0\,;$$

ferner ist auch $\nu=0$, und da man offenbar haben muß

$$p_1 = A_1\,\mathfrak{a} + B_1\,\mathfrak{b}\quad,\qquad p_2 = A_1\,\mathfrak{b} + B_1\,\mathfrak{a}\,,\qquad (o.$$

so folgt daraus zunächst $\widehat{0} = 1$.

Drehen wir dann das Coordinatensystem um die y-Achse, so daß die Ebene des Bandes irgend einen Winkel ν mit der Ebene der xy bildet, alles übrige aber unverändert bleibt, so werden folgende besondere Werthe statthaben:

$$\frac{dz'}{dx'} = \tang \nu\quad,\qquad \frac{dz'}{dx'} = 0\quad,\qquad 1 + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 = \sec^2\nu\,,$$

$$S_1'=T^{(x)}_x\,\sec m_x=p_1\cos\nu\,,\quad \mathfrak{S}_1'=p_1\cos\nu\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]=p_1\sec\nu,$$

$$\mathfrak{S}_2'=S_2'=T^{(y)}\sec l_y=p_2\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=p_2\sec\nu\,,\quad \mathfrak{S}_3'=0,$$

und es nehmen daher die Gleichungen (n) für den jetzigen Fall die Form an:

$$\widehat{\nu}\,p_1\sec\nu = A_1\,\mathfrak{a}' + B_1\,\mathfrak{b}'\,,\qquad \widehat{\nu}\,p_2\sec\nu = A_1\,\mathfrak{b}' + B_1\,\mathfrak{a}'\,.\ (p.$$

Ferner hat man zur Vergleichung der neuen Dehnungen $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{b}'$ mit den frühern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Beziehungen:

$$x' = x \cos\nu\,, \quad y' = y\,, \quad \mathfrak{x}' = \mathfrak{x}\cos\nu\,, \quad \mathfrak{y}' = \mathfrak{y}\,,$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{\partial\mathfrak{x}'}{\partial x'} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \mathfrak{a}\,, \quad \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\,,$$

welche mit den Gleichungen (p) verbunden durch deren Vergleichung mit den vorhergehenden (o) die Bedingung liefern: $\hat{\nu} \sec\nu = 1$ oder $\hat{\nu} = \cos\nu$.

Ersetzen wir demnach in den allgemeinen Gleichungen (n) nach unserer frühern Bezeichnung gemäß A_1 durch $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, B_1 durch ε_2 und daher auch $A_1 - B_1$ durch ε_1, so haben wir nun für jede elastische Fläche die einfachen allgemeinen Beziehungen:

$$126.)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 \cos\nu = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} = \varepsilon_1\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2\left(\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{S}_2 \cos\nu = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \varepsilon_1\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2\left(\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{S}_3 \cos\nu = \varepsilon_1\left(\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\right) \end{cases}$$

aus welchen durch Umkehrung die Werthe:

$$127.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\mathfrak{S}_1 \cos\nu - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\mathfrak{S}_2 \cos\nu\,, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} = \dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\mathfrak{S}_2 \cos\nu - \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}\mathfrak{S}_1 \cos\nu\,, \\ \dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} + \dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} = \dfrac{1}{\varepsilon_1}\mathfrak{S}_3 \end{cases}$$

für die Dehnungen hervorgehen, welche bei einer Fläche von constanter Elastizität bei dem Uebergange aus ihrem natürlichen, nicht gespannten Zustande in eine andere, durch die Gleichung:

$$z = f(x\,,\,y)$$

dargestellte Form, für die sie den Spannungen S_1, S_2 und S_3 unterworfen ist, hervorgerufen werden.

Diese Gleichungen sind aber noch mit den Gleichungen:

$$128.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x} = \dfrac{dz}{dx} - \dfrac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}} + \dfrac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} + \dfrac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\dfrac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{dy} - \dfrac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}} + \dfrac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}}\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} + \dfrac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}\dfrac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} \end{cases}$$

zu verbinden, um auch die Dehnungen in der Richtung der z-Achse bestimmen zu können.

§. 82.

Bevor ich indessen aus den vorhergehenden Gleichungen weitere Folgerungen ziehe, will ich dieselben auf einige einfache, zum Theil im Früheren schon betrachtete Fälle anwenden.

Für eine ursprünglich ebene Fläche, deren Ebene als die der xy genommen wird, und welche auch im gespannten Zustande eben bleibt, kommen, wie wir gesehen haben, die Spannungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ auf S_1, S_2 und $2S_3$ oder $T^{(x)}_x$, $T^{(y)}_y$ und $2T^{(x)}_y$ oder $2T^{(y)}_x$ zurück. Diese Spannungen können auch in dem Falle, daß an der Fläche keine geometrische Kraft angreift, sehr verschiedene und für die verschiedenen Punkte der Fläche veränderliche Werthe haben; wenn sie constant sind, lassen sich aus den Gleichungen (127) die entsprechenden Verschiebungen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ leicht ableiten, und man wird für den Fall, daß S_3 Null ist, die in §. 79 abgeleiteten Beziehungen erhalten. Ich will daher nur noch bemerken, daß wenn $S_2 = S_1$ und $S_3 = 0$ ist, man nach den Beziehungen des vorhergehenden §. auch $S_1' = S_2' = S_1$ und $S_3' = 0$ hat, daß also in diesem Falle die Fläche nach jeder Richtung hin dieselbe geometrische Spannung $S_1 = p$ besitzt; es ist dann

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\,p\ ,\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} = 0$$

und daher auch zufolge der Gleichungen (m)

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}' = \mathfrak{a} = \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\,p\ ,$$

d. h. es sind dann die Dehnungen für jede Richtung gleich.

Denken wir uns ferner ein elastisches Band zu einer Cylinderfläche zusammengerollt und in Bezug auf die Coordinaten-Achsen so gelegt, daß die Gleichung derselben die Form:

$$z^{(0)2} + y^{(0)2} = r^{(0)2}$$

hat, und nehmen wir an, daß keine geometrische Kraft an den Punkten derselben thätig ist, sondern nur zwei gleiche und entgegengesetzte Zugkräfte P, welche parallel zur Achse wirken und sich auf die beiden begrenzenden Umfänge gleichmäßig vertheilen, an ihr angreifen, so werden die Gleichungen (122) befriedigt, wenn wir für die neue Gestalt dieser Fläche die Gleichung:

$$z^2 + y^2 = r^2$$

aufstellen und, da offenbar $T^{(x)} = p = \frac{P}{2\pi r}$ ist,

$$S_1 = T^{(x)} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = p\frac{r}{z} \quad , \quad S_2 = 0 \quad , \quad S_3 = 0$$

setzen. Wir haben dann $\mathfrak{S}_1 = S_1$, $\mathfrak{S}_2 = 0$, $\mathfrak{S}_3 = 0$, $\cos\nu = \frac{z}{r}$, und die Gleichungen (127) geben

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}p, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}p, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = 0.$$

Die Verlängerung und die relative Verminderung des Durchmessers ist also für diese Cylinderfläche dieselbe, wie bei dem ebenen Bande die Dehnung nach der Länge und die relative Verminderung der Breite, wenn dasselbe blos in der Richtung der Länge gezogen wird, übereinstimmend mit der Erfahrung. Setzt man zur Abkürzung $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}p = \lambda$, so folgt

$$\mathfrak{y} = y - y^{(0)} = -\lambda y \;, \quad y^{(0)} = y(1+\lambda) \;, \quad r^{(0)} = r(1+\lambda) \;,$$

und daraus schließt man

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} = -\frac{y^{(0)}}{\sqrt{r^{(0)2} - y^{(0)2}}} = -\frac{y^{(0)}}{z^{(0)}} = \frac{dz^{(0)}}{dy^{(0)}} \;;$$

die zweite der Gleichungen (128) gibt demnach mit der Beachtung, daß $\mathfrak{z} = 0$ wird für $y = r$,

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \lambda \frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}} \quad , \quad \mathfrak{z} = -\lambda\sqrt{r^2 - y^2} = -\lambda z \,.$$

Zieht man dagegen die vorhergehende Cylinderfläche über einen festen cylindrischen Kern vom Halbmesser $r^{(0)} = r$, so daß sich der Durchmesser jener Fläche nicht ändern kann, so wird dieselbe in allen Punkten einen normalen geometrischen Druck N auf den Kern ausüben, und umgekehrt dieser auf die Fläche; bei gleicher Lage der Coordinaten-Achsen wird daher die Gleichung (124) in

$$S_2 \frac{d^2 z}{d y^2} + N \sec^2 \nu = 0$$

übergehen und gibt wie in §. 76

$$S_2 = T_t^{(r)} \sec l_y \cos m_x = N r \frac{z}{r} = N z .$$

Es ist ferner wie vorher

$$\mathfrak{S}_1 = S_1 = p \frac{r}{z} \; , \quad \mathfrak{S}_2 = S_2 \left[1 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right] = N \frac{r^2}{z} \; , \quad \mathfrak{S}_3 = 0 \; ;$$

die erste der Gleichungen (127) wird demnach

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2)} p - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2)} N r \; ;$$

die Bedingung, daß $y^{(0)}$ unveränderlich oder $\mathfrak{y} = 0$ ist, in die zweite eingeführt, gibt

$$0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2)} N r - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2)} p \; , \quad N r = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} p \, ,$$

und damit folgt aus der vorhergehenden Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} p \, .$$

Die Verhältnisse sind demnach auch hier sehr ähnlich den bei einem ebenen Bande stattfindenden, welches durch einen geometrischen Zug p_1 nach der Länge gestreckt und durch einen andern p_2, der senkrecht zur Länge gerichtet ist, bei constanter Breite erhalten wird. Es geht daraus hervor, daß sich die Verlängerungen im letztern Falle zu denen im vorhergehenden, wo nur ein Zug nach der Länge wirkt, verhalten wie

$$\frac{1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} : \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)} = \varepsilon_1(\varepsilon_1+2\varepsilon_2):(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2 .$$

Auf gleiche Weise läßt sich leicht die Vergrößerung des Durchmessers der Cylinderfläche und die Verminderung ihrer Länge unter der Voraussetzung bestimmen, daß sie nur durch einen constanten normalen Druck gedehnt werde und keine Spannung der Länge nach wirke.

Ich will daher nur noch die in §. 77 untersuchte elastische Kugelfläche betrachten, welche durch einen constanten normalen Druck N gespannt wird, welche ursprünglich die Gestalt einer Kugelfläche vom Halbmesser $r^{(0)}$ hatte und durch jenen Druck zu einer neuen Kugelfläche vom Halbmesser r ausgedehnt wurde. Für diesen Fall haben wir dort gefunden

$$S_1 = \frac{1}{2} N \frac{r^2 - x^2}{z} , \quad S_2 = \frac{1}{2} N \frac{r^2 - y^2}{z} , \quad S_3 = - \frac{1}{2} N \frac{xy}{z}$$

und schließen daraus

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \frac{1}{2} N \left[\frac{r^2 - x^2}{z} \cdot \frac{r^2 - y^2}{z^2} - \frac{xy}{z} \cdot \frac{xy}{z^2} \right] = \frac{1}{2} N \frac{r^2}{z} ,$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{1}{2} N \left[- \frac{xy}{z} \cdot \frac{r^2 + z^2}{z^2} + \left(\frac{r^2 - x^2}{z} + \frac{r^2 - y^2}{z} \right) \frac{xy}{z^2} \right] = 0 .$$

Die Gleichungen (127) geben daher

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} = \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} = \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{2} N r , \quad \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta \mathfrak{y}} = \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta \mathfrak{x}} = 0 ,$$

und aus den Gleichungen (128) folgen damit unter der Voraussetzung, daß man $\mathfrak{z} = 0$ hat für $x = y = r$, und mit der Beachtung, daß wie im vorhergehenden Falle

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}} , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz^{(0)}}{dx^{(0)}}$$

ist, die Werthe:

$$\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta x} = \frac{dz}{dx} \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} = \frac{1}{2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)} N r \frac{dz}{dx} ,$$

$$\frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta y} = \frac{dz}{dy} \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} = \frac{1}{2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)} N r \frac{dz}{dy} ,$$

oder

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \frac{1}{2} N r .$$

Ersetzt man also die rechte Seite dieser Gleichungen durch λ, so hat man

$$\mathfrak{x} = \lambda x \;, \quad \mathfrak{y} = \lambda y \;, \quad \mathfrak{z} = \lambda z \;, \quad r - r^{(0)} = \lambda r$$

und schließt daraus in Uebereinstimmung mit der Natur der Sache, daß jeder Punkt der Kugelfläche in der Richtung des Halbmessers verschoben und daß der Halbmesser $r^{(0)}$ derselben durch die Dehnung um

$$r - r^{(0)} = \frac{\lambda}{1 - \lambda} r^{(0)}$$

vergrößert worden ist, wobei aber zu beachten bleibt, daß der Dehnungscoeffizient λ sich strenggenommen auf die bei der gedehnten Fläche stattfindenden Verhältnisse bezieht.

§. 83.

Wenn man die Ableitung der Gleichungen (74ª) in §. 37 und der Gleichungen (75) in §. 38 mit derjenigen der Gleichungen (121) in §. 76 vergleicht und beachtet, daß für eine materielle Fläche die Masse M eines durch Parallelschnitte begrenzten Theiles durch

$$M = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, q \frac{d^2 O}{dx\, dy} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, q \sec \nu$$

ausgedrückt wird, so wird man sich leicht überzeugen, daß die Gleichungen für die innere Bewegung einer solchen Fläche, welche sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, aus den Gleichungen (121) oder (122), (123) und (124) hervorgehen, wenn darin für X, Y, Z die Differenzen:

$$X - \frac{d.u_x}{dt} \;, \quad Y - \frac{d.u_y}{dt} \;, \quad Z - \frac{d.u_z}{dt}$$

gesetzt werden. Diese Gleichungen haben demnach im Allgemeinen die Form:

$$129.)\quad \begin{cases} q\dfrac{d.u_x}{dt}\sec\nu = qX\sec\nu + \dfrac{\partial S_1}{\partial x} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y}\,, \\[2ex] q\dfrac{d.u_y}{dt}\sec\nu = qY\sec\nu + \dfrac{\partial S_3}{\partial x} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y}\,, \\[2ex] q\left(\dfrac{d.u_z}{dt} - \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d.u_x}{dt} - \dfrac{dz}{dy}\dfrac{d.u_y}{dt}\right)\sec\nu \\[2ex] = qN\sec^2\nu + S_1\dfrac{d^2z}{dx^2} + 2S_3\dfrac{d^2z}{dx\,dy} + S_2\dfrac{d^2z}{dy^2} \end{cases}$$

und gehen unter der Voraussetzung, daß die inneren Aenderungen sehr klein bleiben, zufolge der in §. 44 angestellten Betrachtungen in die folgenden über, welche den dortigen Gleichungen (98) entsprechen:

$$130.)\quad \begin{cases} q\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\sec\nu = qX\sec\nu + \dfrac{\partial S_1}{\partial x} + \dfrac{\partial S_3}{\partial y}\,, \\[2ex] q\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\sec\nu = qY\sec\nu + \dfrac{\partial S_3}{\partial x} + \dfrac{\partial S_2}{\partial y}\,, \\[2ex] q\left(\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} - \dfrac{dz}{dx}\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} - \dfrac{dz}{dy}\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right)\sec\nu \\[2ex] = qN\sec^2\nu + S_1\dfrac{d^2z}{dx^2} + 2S_3\dfrac{d^2z}{dx\,dy} + S_2\dfrac{d^2z}{dy^2}\,. \end{cases}$$

Um aber diese Gleichungen anwenden zu können, müssen wir noch die Spannungen S_1, S_2, S_3 in Function der Dehnungen ausdrücken, also die Werthe derselben aus den Gleichungen (126) herleiten, um diese und ihre partiellen Aenderungsgesetze in die vorstehenden Gleichungen einzuführen. Jene Gleichungen geben indessen ziemlich zusammengesetzte Werthe für die betreffenden Spannungen; setzt man zur Abkürzung

$$\sec^2 l_y = 1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = m\,,\quad \sec^2 m_x = 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = n,\quad \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = p,$$

so findet man auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination

$$\left.\begin{aligned}
S_1 \sec\nu &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,n\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}+\varepsilon_2\,n\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}\\
&\quad-\varepsilon_1\frac{p^2}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}-\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}\right)-\varepsilon_1\frac{np}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta y}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta x}\right),\\
S_2 \sec\nu &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,m\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}+\varepsilon_2\,m\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}\\
&\quad-\varepsilon_1\frac{p^2}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}-\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}\right)+\varepsilon_1\frac{mp}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta y}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta x}\right),\\
S_3 \sec\nu &= \varepsilon_1\frac{mn}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta y}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta x}\right)\\
&\quad-\varepsilon_1\frac{p}{m+n}\left(n\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}+m\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}\right)-\varepsilon_2\,p\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(131.$$

und es ist leicht einzusehen, daß die theilweisen Aenderungsgesetze dieser Werthe nach x und y noch viel verwickelter werden müssen, daß also bei dem jetzigen Zustande der Analysis die vorhergehenden Gleichungen für die innere Bewegung einer Fläche nur für die Untersuchung sehr einfacher Fälle und auch dann nur angewendet werden können, wenn man sich mit einer ersten, sehr geringen Annäherung begnügt.

Die vorstehenden Werthe von S_1, S_2 und S_3 beziehen sich ferner auf den Fall, daß die Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ von dem natürlichen ungespannten Zustande der Fläche an gerechnet werden. Geht man dagegen von einem bereits gespannten Zustande derselben aus, so werden die neuen Dehnungen, die wir immer wieder sehr klein voraussetzen, ähnliche Functionen von dem Unterschiede der Spannungen S_1 und $S_1^{(0)}$, S_2 und $S_2^{(0)}$, S_3 und $S_3^{(0)}$ sein, wie die vollständigen Dehnungen von den Spannungen S_1, S_2 und S_3 selbst; man wird daher in diesem Falle die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
S_1 \sec\nu &= S_1^{(0)}\sec\nu+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,n\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}+\varepsilon_2\,n\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}-\text{etc.}\\
S_2 \sec\nu &= S_2^{(0)}\sec\nu+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\,m\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}+\varepsilon_2\,m\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}-\text{etc.}\\
S_3 \sec\nu &= S_3^{(0)}\sec\nu+\varepsilon_1\frac{mn}{m+n}\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta y}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta x}\right)-\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\quad(132.$$

erhalten, in welchen man noch die geometrische Flächenausdehnung $\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y} + \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}$ durch ϱ' ersetzen kann, um die daraus folgenden Werthe von S_1 u. s. f. und ihre partiellen Aenderungsgesetze in die Gleichungen (130) einzuführen.

Mit diesen Gleichungen sind endlich noch die Bedingungen für einen bestimmten Zustand bestimmter Punkte der Fläche, z. B. ihrer äußern Begrenzung, welcher während der Bewegung derselben statthaben soll, zu verbinden, um aus denselben die Gleichungen für diese Bewegung abzuleiten. Man wird indessen aus der Form der vorhergehenden Beziehungen leicht schließen, daß die daraus sich ergebenden Gleichungen der Bewegung noch weniger bestimmt sind, als bei der elastischen Linie, indem sie noch mehr willkürliche Functionen enthalten werden, deren Form den oben genannten Bedingungen gemäß zu bestimmen ist.

§. 84.

Den einfachsten Fall für die Anwendung der vorhergehenden Gleichungen bietet die Untersuchung der Schwingungsgesetze einer elastischen Membrane, welche in einen ebenen festen Rahmen eingespannt ist, und bei welcher man von der Schwere Umgang nimmt, welche also im Gleichgewichtszustande die Gestalt einer Ebene annehmen wird, und deren einzelnen Punkte sich bei der Bewegung derselben nur sehr wenig von ihrer Gleichgewichtslage entfernen.

Diesen Gleichgewichtszustand wird man dann auch als denjenigen wählen, von welchem aus die Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gerechnet werden, und wird die entsprechende Ebene als die der $x^{(0)} y^{(0)}$ nehmen, so daß man hat

$$z^{(0)} = 0 \;,\quad z = \mathfrak{z} \;,\quad \frac{dz}{dx} = \frac{d\mathfrak{z}}{dx} \;,\quad \text{u. s. f.}$$

Die Spannungen $S_1^{(0)}$, $S_2^{(0)}$, $S_3^{(0)}$ werden constant, und wir wollen daher einfach

$$S_1^{(0)} = P_1 \;,\quad S_2^{(0)} = P_2 \;,\quad S_3^{(0)} = 0$$

setzen; ferner können wir für die erste Annäherung die kleinen Glieder $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)^2$ und $\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}$ neben der Einheit vernachlässigen, also in den Gleichungen (132) $m = n = 1$, $p = 0$ und $sec\,\nu = 1$ nehmen, so daß wir haben

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= P_1 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = P_1 + \varepsilon_2 \varrho' + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x},\\
S_2 &= P_2 + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = P_2 + \varepsilon_2 \varrho' + \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y},\\
S_3 &= \frac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (A.$$

Wir haben ferner

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x^{(0)}}\frac{\partial x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial y^{(0)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x^{(0)}}\frac{\partial x^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y^{(0)}}\frac{\partial y^{(0)}}{\partial y},$$

$$x^{(0)} = x - \mathfrak{x} \qquad y^{(0)} = y - \mathfrak{y},$$

$$\frac{\partial x^{(0)}}{\partial x} = 1 - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}, \quad \frac{\partial y^{(0)}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}, \quad \frac{\partial x^{(0)}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}, \quad \frac{\partial y^{(0)}}{\partial y} = 1 - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y},$$

u. s. f.

Wir können daher mit gleicher Annäherung, indem wir die sehr kleinen Glieder $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$ u. s. f. neben der Einheit oder die Producte $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x^{(0)}}$ etc. neben den einfachen Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x^{(0)}}$ etc. vernachlässigen, die x und y mit $x^{(0)}$ und $y^{(0)}$ vertauschen oder der einfacheren Bezeichnung wegen die x und y als die ursprünglichen Coordinaten eines Punktes der Membrane betrachten; wir haben dann

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d x^2} + \varepsilon_2 \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx\,dy} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{d\varrho'}{dx} - \varepsilon_1 \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx\,dy},$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial y} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dy^2} + \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx\,dy}\right) = \varepsilon_1 \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx\,dy} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{d\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dy} - \frac{d\mathfrak{y}}{dx}\right)}{dy},$$

u. s. f.

Ersetzen wir dann noch die Quotienten $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}$ und $\frac{\varepsilon_2}{q}$ durch a^2 und b^2, so nehmen die beiden ersten der Gleichungen (130) die Form an:

$$133^a.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= a^2\frac{d\varrho'}{dx} + \frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{d\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dy}-\frac{d\mathfrak{y}}{dx}\right)}{dy}, \\ \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} &= a^2\frac{d\varrho'}{dy} - \frac{1}{2}(a^2-b^2)\frac{d\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dy}-\frac{d\mathfrak{y}}{dx}\right)}{dx}. \end{aligned}\right.$$

Beide zusammen drücken offenbar die Gesetze der horizontalen Schwingungen (die Ebene der xy als wagrecht gedacht) eines Punktes der Membrane aus und zeigen, daß diese auf die Ebene der xy projicirten Bewegungen für die erste Annäherung sowohl von den ursprünglichen Spannungen P_1 und P_2, als von den verticalen oder transversalen Bewegungen unabhängig sind. Die Gesetze dieser letztern dagegen sind im Allgemeinen viel verwickelter; denn die dritte der Gleichungen (130) geht unter den vorhergehenden Voraussetzungen und, wenn man noch $\frac{P_1}{q} = c_1^2$, $\frac{P_2}{q} = c_2^2$ setzt, in die folgende über:

$$133^b.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{z}}{dx}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{z}}{dy}\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} = \left(c_1^2 + a^2\frac{d\mathfrak{x}}{dx} + b^2\frac{d\mathfrak{y}}{dy}\right)\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} \\ &+ (a^2-b^2)\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dy}+\frac{d\mathfrak{y}}{dx}\right)\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx\,dy} + \left(c_2^2 + a^2\frac{d\mathfrak{y}}{dy} + b^2\frac{d\mathfrak{x}}{dx}\right)\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2} \end{aligned}\right.$$

und kommt nur unter der Voraussetzung, daß keine horizontalen Bewegungen statthaben, daß also immer $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ bleibt, auf die einfachere Form:

$$134^a.)\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = c_1^2\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} + c_2^2\frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2},$$

und wenn noch angenommen wird, daß $P_1 = P_2$, daß also die ursprüngliche Spannung nach allen Richtungen gleich sei, auf

$$134^b.)\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{z}}{dy^2}\right),$$

in ähnlicher Weise, wie es bei der elastischen Linie der Fall war. *)

---

*) Es dürfte nicht ganz nutzlos sein, zu bemerken, daß die beiden letzten der Gleichungen (120) für die Transversal-Bewegungen einer gespannten elastischen

In allen diesen Gleichungen stellen die Functionen $\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}$, u. s. f. nur partielle Aenderungsgesetze in Bezug auf t allein vor; die Gleichungen (133ª) und (134) enthalten also nur partielle Aenderungsgesetze der zweiten Ordnung und können daher durch sehr verschiedene Functionen befriedigt werden. Der Gleichung (134ª) z. B. genügen alle Functionen von der Form:

$$\mathfrak{z} = f\left(k_1 x + k_2 y \pm t\sqrt{k_1^2 c_1^2 + k_2^2 c_2^2}\right)$$

und der Gleichung (134ᵇ) solche von der Form:

$$\mathfrak{z} = f\left(k_1 x + k_2 y \pm ct\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\right)$$

wie man sich leicht durch Differenziren überzeugen wird, und man kann daher den Ausdruck:

$$\mathfrak{z} = \Sigma . f\left(k_1 x + k_2 y \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2} . ct\right) \qquad (B.$$

als ein vollständiges Integral der letzten Gleichung betrachten. Man kann der Gleichung (134ᵇ) aber auch dadurch entsprechen, daß man

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{z} = \Sigma . \varphi_1 (k_1 x + k_2 y) \varphi_2 \left(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} . ct\right) \text{ oder} \\ \mathfrak{z} = \Sigma . \varphi_1 (k_1 x) \varphi_2 (k_2 y) \varphi_3 \left(\sqrt{k_1^2 + k_2^2} . ct\right), \text{ u. s. f.} \end{array}\right\} (C.$$

setzt und die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 so wählt, daß man hat

$$\varphi(kx) = nk^2 \varphi''(kx)$$

worin n ein beliebiger, aber für alle Functionen φ in demselben Pro-

---

Linie eine der Gleichung (133ᵇ) entsprechende Form annehmen, wenn man darin, zufolge der ersten jener Gleichungen, $a^2 \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dx^2}$ durch $\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}$ ersetzt; sie werden nämlich dadurch

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{y}}{dx}\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \left(b^2 + a^2 \frac{d\mathfrak{x}}{dx}\right)\frac{d^2 \mathfrak{y}}{dx^2}, \\ \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} - \frac{d\mathfrak{z}}{dx}\frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = \left(b^2 + a^2 \frac{d\mathfrak{x}}{dx}\right)\frac{d^2 \mathfrak{z}}{dx^2}. \end{array}\right.$$

ducte gleichbleibender constanter Factor ist, und diese Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn man für $\varphi(kx)$ eine der Formen:

$$A\left(e^{\pm i}\right)^{kx} \quad \text{oder} \quad B\left[\left(e^{+i}\right)^{kx} \pm \left(e^{-i}\right)^{kx}\right]$$

wählt, worin i irgend eine constante Größe bedeuten kann, und von denen die zweite auch die Functionen *sin* kx und *cos* kx einschließt. Es wird sich dann aber wie bei der elastischen Linie noch darum handeln, die Form der Functionen f oder φ so zu bestimmen, daß sie sowohl dem anfänglichen Zustande der ganzen Membrane, als auch dem bedingten Zustande besonderer Punkte derselben während der Bewegung Genüge leisten können.

Soll z. B. der feste Rahmen die Gestalt eines Rechteckes haben, von welchem zwei anliegende Seiten L_1 und L_2 als Achsen der x und der y genommen werden, so muß man während der Bewegung, also unabhängig von der Zeit t, immer $\mathfrak{z} = 0$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0$ haben für $x = 0$ und $x = L_1$ und für $y = 0$ und $y = L_2$. Man kann dann noch einen solchen Zustand als anfänglichen wählen, in welchem die Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte der Membrane Null sind und die Gestalt der letztern durch eine beliebige Function:

$$\mathfrak{z}_0 = F(x, y),$$

die aber auch für die vorhergehenden Werthe von x und y Null werden muß, gegeben ist.

Die zunächst sich darbietende Function dieser Art ist

$$\text{D.)} \qquad \mathfrak{z}_0 = B\, sin\, i_1 \pi \frac{x}{L_1}\, sin\, i_2 \pi \frac{y}{L_2},$$

worin i_1 und i_2 ganze Zahlen bedeuten, und da diese Function der Bedingung der Functionen (C) entspricht, und darnach $k_1 = \pi \frac{i_1}{L_1}$, $k_2 = \pi \frac{i_2}{L_2}$ ist, so werden alle vorhergehenden Bedingungen erfüllt sein, wenn man allgemein für irgend einen Augenblick

$$\text{E.)} \qquad \mathfrak{z} = B\, sin\, i_1 \pi \frac{x}{L_1}\, sin\, i_2 \pi \frac{y}{L_2}\, cos\, \pi \sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2} + \frac{i_2^2}{L_2^2}}\, c\, t$$

nimmt; denn man hat dann auch

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -Bc\pi\sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2}+\frac{i_2^2}{L_2^2}}\sin i_1\pi\frac{x}{L_1}\sin i_2\pi\frac{y}{L_2}\sin\pi\sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2}+\frac{i_2^2}{L_2^2}}ct\,,$$

also $\frac{d\mathfrak{z}}{dt} = 0$ für $t = 0$, und unabhängig von t für $x = 0$, $x = L_1$ und für $y = 0$, $y = L_2$. Unter dieser Voraussetzung oscillirt daher jeder Punkt der Membrane in einer Senkrechten zur Gleichgewichtslage derselben, und die gemeinschaftliche Schwingungsdauer für alle ist

$$t = \frac{2}{c\sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2}+\frac{i_2^2}{L_2^2}}}\,.$$

Ist $i_1 = i_2 = 1$, so bleiben nur die mit dem Rahmen in Verbindung stehenden Punkte in Ruhe, während alle übrigen in gleichem Sinne schwingen; für $i_1 = 2$, $i_2 = 1$ zieht sich durch den Mittelpunkt der Membrane eine zur y-Achse parallele Knotenlinie, deren Punkte fortwährend in Ruhe bleiben; für $i_1 = 2$, $i_2 = 2$ haben wir zwei solcher Knotenlinien, welche sich in der Mitte senkrecht durchschneiden; für $i_1 = 3$, $i_2 = 2$ entstehen drei Knotenlinien, von denen zwei zur y-Achse parallel sind und die Membrane in drei gleiche Rechtecke zerlegen, während die dritte auf ihnen senkrecht steht und sie halbirt, u. s. f. Die akustischen Verhältnisse zu untersuchen, muß dem Leser überlassen werden.

Wenn die anfängliche Gestalt der in den rechteckigen Rahmen eingespannten elastischen Fläche nicht durch die Gleichung (D) dargestellt wird, so kann sie immer aus einer Reihe von Gliedern von dieser Form ausgedrückt werden, so daß man allgemein hat

$$F(x, y) = \sum_{i_1=1}^{i_1=\infty}.\sum_{i_2=1}^{i_2=\infty} B_{i_1,i_2}\sin i_1\pi\frac{x}{L_1}\sin i_2\pi\frac{y}{L_2}\,,$$

wenn man die Coeffizienten B_{i_1,i_2} dieser Glieder durch das Integral:

$$B_{i_1,i_2} = \frac{4}{L_1 L_2}\int_0^{L_1} du\int_0^{L_2} dv\,.\,F(u, v)\sin i_1\pi\frac{u}{L_1}\sin i_2\pi\frac{v}{L_2} \qquad (F.$$

bestimmt; man wird dann allen Bedingungen, die anfängliche Geschwindigkeit gleich Null vorausgesetzt, durch die Reihen:

$$\text{G.)}\left\{\begin{aligned} \mathfrak{z} &= \sum_{i_1=1}^{i_1=\infty} \cdot \sum_{i_2=1}^{i_2=\infty} \cdot B_{i_1,i_2} \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \cos \pi \frac{c t}{\lambda_{i_1,i_2}}, \\ \frac{d\mathfrak{z}}{dt} &= -\sum_{i_1=1}^{i_1=\infty} \cdot \sum_{i_2=1}^{i_2=\infty} \cdot B_{i_1,i_2} \pi \frac{c}{\lambda_{i_1,i_2}} \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \sin \pi \frac{c t}{\lambda_{i_1,i_2}} \end{aligned}\right.$$

Genüge leisten, worin $\frac{1}{\lambda_{i_1,i_2}}$ für $\sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2}+\frac{i_2^2}{L_2^2}}$ steht. Durch dieses Verfahren wird die Bewegung eines Punktes gleichsam aus einer unbegrenzten Menge von Oscillationen zusammengesetzt; dasselbe ist daher nur für solche Fälle anwendbar, für welche die Coeffizienten B_{i_1,i_2} mit wachsenden i rasch abnehmen.

Will man dagegen von der Gleichgewichtslage der Membrane als anfänglichem Zustande ausgehen und ein bestimmtes, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{w}_0 = \left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)_0 = F_1(x, y)$$

ausgedrücktes Gesetz für die anfängliche Geschwindigkeit der einzelnen Punkte aufstellen, so muß dieses zunächst der Bedingung:

$$\mathfrak{w}_0 = 0 \text{ für } x = 0\,,\quad x = L_1 \text{ und für } y = 0\,,\quad y = L_2.$$

genügen. Es muß aber auch für dieselben Werthe von x und y und für jeden Werth von t die Geschwindigkeit $\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ Null werden; die entsprechendste Form der Function F_1 ist daher wieder

$$\mathfrak{w}_0 = G \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2},$$

und man wird allen Bedingungen und der Gleichung (134[b]) genügen, wenn man

$$\text{H.)}\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{z}}{dt} &= G \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \cos \pi \frac{c t}{\lambda_{i_1,i_2}} c t, \quad \text{folglich} \\ \mathfrak{z} &= \frac{G \lambda_{i_1,i_2}}{\pi c} \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \sin \pi \frac{c t}{\lambda_{i_1,i_2}} \end{aligned}\right.$$

nimmt, worin wieder $\sqrt{\frac{i_1^2}{L_1^2}+\frac{i_2^2}{L_2^2}}$ durch $\frac{1}{\lambda_{i_1,i_2}}$ ersetzt ist. Allgemeiner noch kann man für die vorhergehende Annahme die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} z &= \sum_{i_1=1}^{i_1=\infty} . \sum_{i_2=1}^{i_2=\infty} . \frac{\lambda_{i_1,i_2} G_{i_1,i_2}}{\pi c} \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \sin \pi \frac{ct}{\lambda_{i_1,i_2}}, \\ \frac{dz}{dt} &= \sum_{i_1=1}^{i_1=\infty} . \sum_{i_2=1}^{i_2=\infty} . G_{i_1,i_2} \sin i_1 \pi \frac{x}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{y}{L_2} \cos \pi \frac{ct}{\lambda_{i_1,i_2}} \end{aligned}\right\} \text{(J.}$$

aufstellen und für irgend ein Gesetz $w_0 = F_1(x, y)$ der anfänglichen Geschwindigkeit die Coeffizienten G_{i_1,i_2} durch das Integral:

$$G_{i_1,i_2} = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} du \int_0^{L_2} dv \,.\, F_1(u, v) \sin i_1 \pi \frac{u}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{v}{L_2} \quad \text{(K.}$$

bestimmen, wenn jenes Gesetz der Art ist, daß diese Coeffizienten mit wachsenden i gegen die der ersten Glieder der Reihe (J) verschwindend klein werden.

Um ein Beispiel für die Anwendung des Integrals (F) oder (K) zu geben, wollen wir annehmen, die anfängliche Gestalt der Membrane sei durch die Gleichung:

$$z_0 = \frac{16 f}{L_1^2 L_1^2} x y (L_1 - x)(L_2 - y)$$

gegeben, so daß f, die Ordinate im Kreuzungspunkt der beiden Diagonalen des Rahmens, den jedenfalls sehr kleinen größten Werth von z_0 vorstellt, und w_0 sei Null. Wir haben dann

$$B_{i_1,i_2} = \frac{4.16 f}{L_1^3 L_2^3} \int_0^{L_1} du \int_0^{L_2} dv \,.\, u v (L_1 - u)(L_2 - v) \sin i_1 \pi \frac{u}{L_1} \sin i_2 \pi \frac{v}{L_2},$$

und durch theilweises Integriren in Bezug auf die Winkelfunctionen wird man leicht finden

$$B_{i_1,i_2} = \frac{16 . 16 f}{i_1^3 i_2^3 \pi^6} (1 - \cos i_1 \pi)(1 - \cos i_2 \pi);$$

es sind daher alle B_{i_1,i_2} für gerade i_1 und i_2 Null, und es genügt

$$B_{i_1,i_2} = \frac{16f}{(2i_1+1)^3(2i_2+1)^3}\cdot\left(\frac{2}{\pi}\right)^6$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞ für i_1 und i_2 zu nehmen, so daß man die Reihe:

$$\mathfrak{z}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^6 16f\Big[\sin\pi\frac{x}{L_1}\sin\pi\frac{y}{L_2}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{1,1}}+\frac{1}{3^3}\sin 3\pi\frac{x}{L_1}\sin\pi\frac{y}{L_2}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{3,1}}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{3^3}\sin\pi\frac{x}{L_1}\sin 3\pi\frac{y}{L_2}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{1,3}}+\frac{1}{9^3}\sin 3\pi\frac{x}{L_1}\sin 3\pi\frac{y}{L_2}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{3,3}}+\text{etc.}$$

$$+\frac{1}{5^3}\sin\pi\frac{x}{L_1}\sin 5\pi\frac{y}{L_2}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{1,5}}+\text{etc.}$$

$$+\text{etc.}\Big]$$

oder

$$\mathfrak{z}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^6 16f\sum_{i_1=0}^{i_1=\infty}.\sum_{i_2=0}^{i_2=\infty}.\frac{\sin(2i_1+1)\pi\frac{x}{L_1}}{(2i_1+1)^3}\frac{\sin(2i_2+1)\pi\frac{y}{L_2}}{(2i_2+1)^3}\cos\pi\frac{ct}{\lambda_{i_1,i_2}}$$

erhält, deren Convergenz unmittelbar in die Augen fällt.

Nach dem Vorhergehenden wird es nicht schwer sein, für einen rechteckigen Rahmen den allgemeinsten Fall, nämlich den, wenn sowohl die anfängliche Form der Fläche, als das Gesetz der anfänglichen Geschwindigkeit ihrer Punkte bestimmt ist, zu behandeln. Ich will daher den weitern Fall betrachten, wo der Rahmen, in welchen die Membrane nach jeder Richtung hin mit einer gleichen Spannung P befestigt ist, die Gestalt eines Kreises vom Halbmesser R hat, dessen Mittelpunkt der Anfang der x und y sei. Man muß dann zu jeder Zeit $\mathfrak{z}=0$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}=0$ haben, wenn $x^2+y^2=R^2$ ist, und wird daher in diesem Falle besser thun, wenn man Cylindercoordinaten statt der rechtwinkligen Coordinaten einführt, also x und y durch r und ω ausdrückt und die $\mathfrak{z}$ beibehält. Die Beziehungen:

$$x^2+y^2=r^2,\quad x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega,\quad \tang\omega=\frac{y}{x},$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dx} = \frac{d\mathfrak{z}}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{d\mathfrak{z}}{d\omega}\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\mathfrak{z}}{dr}\cos\omega - \frac{d\mathfrak{z}}{d\omega}\frac{\sin\omega}{r},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dx^2} = \frac{d.\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\cos\omega}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{d.\frac{d\mathfrak{z}}{dr}\cos\omega}{d\omega}\frac{d\omega}{dx}$$

$$- \frac{d.\frac{d\mathfrak{z}}{d\omega}\frac{\sin\omega}{r}}{dr}\frac{dr}{dx} - \frac{d.\frac{d\mathfrak{z}}{d\omega}\frac{\sin\omega}{r}}{d\omega}\frac{d\omega}{dx}$$

$$= \frac{d^2\mathfrak{z}}{dr^2}\cos^2\omega - 2\frac{d^2\mathfrak{z}}{dr\,d\omega}\frac{\sin\omega\cos\omega}{r} + \frac{d^2\mathfrak{z}}{d\omega^2}\frac{\sin^2\omega}{r^2}$$

$$+ \frac{d\mathfrak{z}}{dr}\frac{\sin^2\omega}{r} + 2\frac{d\mathfrak{z}}{d\omega}\frac{\sin\omega\cos\omega}{r^2},$$

u. s. f.

verwandeln dann die Gleichung (134ᵇ) in die folgende:

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} = c^2\left(\frac{d^2\mathfrak{z}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{z}}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\omega^2}\right), \qquad (135.$$

welcher man jedenfalls durch eine solche Function von r, ω und t Genüge leisten muß, daß $\mathfrak{z}$ unabhängig von t und ω Null wird für $r = R$. Es scheint indessen, daß es keine geschlossene Function der Art gibt, und die obengestellte Forderung nur durch eine unbegrenzte Reihe zu befriedigen ist.

Für die besondere Voraussetzung z. B., daß $\mathfrak{z}$ von ω unabhängig bleiben soll, daß also die gleichschwingenden Punkte der Membrane concentrische Kreise bilden, genügt man der vorhergehenden Gleichung (135), worin nun das letzte Glied wegfällt, und der Bedingung: $\mathfrak{w}_0 = 0$ durch die für alle Werthe von r convergirende unbegrenzte Reihe:

$$\mathfrak{z} = C\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{r^2}{k^2} + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{r^4}{k^4} - \left(\frac{1}{2.4.6}\right)^2\frac{r^6}{k^6} + \text{etc.}\right]\cos\frac{ct}{k};$$

wenn man die Constante k so bestimmt, daß man hat

$$0 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{R^2}{k^2} + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2\frac{R^4}{k^4} - \left(\frac{1}{2.4.6}\right)^2\frac{R^6}{k^6} + \text{etc.}, \qquad (L.$$

Solcher Werthe von k gibt es aber nicht nur einen, sondern wahrscheinlich eine unbegrenzte Menge; denn bringt man die vorstehende Reihe unter die Form:

$$\text{M.)}\quad \gamma = 1 - x + \left(\frac{1}{1.2}\right)^2 x^2 - \left(\frac{1}{1.2.3}\right)^2 x^3 + \left(\frac{1}{1.2.3.4}\right)^2 x^4 - \text{etc.},$$

indem man $\left(\frac{R}{2k}\right)^2$ durch x ersetzt und ihren Werth für ein beliebiges x mit γ bezeichnet, und löst die Gleichungen:

$$0 = 1 - x_1 \;,\quad 0 = 1 - x_2 + \tfrac{1}{4} x_2^2 \;,\quad 0 = 1 - x_3 + \tfrac{1}{4} x_3^2 - \tfrac{1}{36} x_3^3$$

auf oder bestimmt wenigstens die Grenzen, zwischen denen die entsprechenden positiven Werthe von x liegen, und führt diese in die Gleichung (M) ein, so findet man

$$x_1 = 1 \;,\quad \gamma = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2.3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.3.4}\right)^2 - \text{etc.} > 0 \;,$$

$$x_2 = 2 \;,\quad \gamma = -\left(\frac{1}{2.3}\right)^2 2^3 + \left(\frac{1}{2.3.4}\right)^2 2^4 - \text{etc.} < 0 \;,$$

$$x_3 = 1{,}43.. ,\quad \gamma = \left(\frac{1}{2.3.4}\right)^2 (1{,}43)^4 - \left(\frac{1}{2.3.4.5}\right)^2 (1{,}43.)^5 + \text{etc.} > 0 \,.$$

Es liegt also der erste Werth von x, welcher $\gamma = 0$ macht, zwischen 1,43... und 2, und die weiter geführte Annäherung gibt $x = 1{,}4458\ldots$; man hat demnach $\frac{1}{(2k_1)^2} = \frac{1{,}4458}{R^2}$, $k_1 = 0{,}4158\,..\,R$ und wird sich leicht überzeugen, daß der entsprechende Werth von $\mathfrak{z}$, nämlich

$$\text{N.)}\quad \mathfrak{z} = \mathfrak{C}\left(1 - 1{,}44..\frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1{,}44..)^2 \frac{r^4}{R^4} - \text{etc.}\right) \cos\frac{ct}{k_1},$$

nur durch den Werth $r = R$ unabhängig von t Null werden kann, daß also in diesem Falle alle Punkte der Membrane gleichzeitig schwingen, und zwar alle in der Zeit $t_1 = 2\pi\frac{k_1}{c}$ eine Schwingung vollenden.

Geht man dann bei den Substitutionen für x in der Gleichung (M) in der Reihe der ganzen Zahlen weiter, so findet man bald

zwischen 7 und 8 einen zweiten Werth für x, durch welchen $\gamma = 0$ wird, und die weiter fortgesetzte Annäherung gibt $x = 7{,}6179..$; also hat man auch $\frac{1}{2k_2^2} = \frac{7{,}6179..}{R^2}$, $k_2 = 0{,}2561..R$, und die damit sich ergebende Function:

$$z = C\left(1 - 7{,}6..\frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (7{,}6..)^2 \frac{r^4}{R^4} - \text{etc.}\right) \cos\frac{ct}{k_2}$$

entspricht nun dem Falle, wo sich zwischen dem Mittelpunkte der Membrane und dem festen Rahmen eine kreisförmige Knotenlinie bildet; denn man hat nun nicht nur $z = 0$ für $r = R$, sondern auch nach der Gleichung (N)

$$z = 0\,, \quad \text{wenn} \quad 7{,}618\,r^2 = 1{,}4458\,R^2 \quad \text{oder} \quad r = 0{,}4357..R\,.$$

Der Kreis vom Halbmesser $r = 0{,}4357..R$ bleibt also in Ruhe und theilt die Membrane in zwei concentrische Theile, deren Punkte in jedem Augenblicke in entgegengesetztem Sinne schwingen und dieselbe Schwingungsdauer $t_2 = 2\pi\frac{k_2}{c} = \frac{k_2}{k_1}t_1 = 0{,}6161..t_1$ besitzen. Es findet demnach im jetzigen Falle kein rationales Verhältniß zwischen t_1 und t_2 statt.

Zuletzt sei noch bemerkt, daß man die Gleichung (135) wieder allgemeiner befriedigen kann, wenn man

$$z = \Sigma.\left[1 - \left(\frac{r}{2k_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^4 - \left(\frac{1}{2.3}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^6 + \text{etc.}\right]\left(C_i \cos\frac{ct}{k_i} + E_i \sin\frac{ct}{k_i}\right)$$

setzt, darin für die k_i die verschiedenen Werthe von k, welche der Gleichung (L) genügen, einführt und die Coeffizienten C_i und E_i so bestimmt, daß die Functionen:

$$z_0 = \Sigma.C_i\left[1 - \left(\frac{r}{2k_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^4 - \left(\frac{1}{2.3}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^6 + \text{etc.}\right]$$

und

$$\frac{dz_0}{dt} = \Sigma.\frac{c}{k_i}E_i\left[1 - \left(\frac{r}{2k_i}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^4 - \left(\frac{1}{2.3}\right)^2\left(\frac{r}{2k_i}\right)^6 + \text{etc.}\right]$$

die anfängliche Gestalt der Membrane und die anfängliche Geschwindigkeit ihrer Punkte ausdrücken.

§. 85.

Für die Untersuchung der Zustände **elastischer Körper** finden die in den §.§. 35 bis 45 abgeleiteten Beziehungen ihre unmittelbare Anwendung; wir werden uns jedoch auch hier wieder auf die Betrachtung homogener Körper von constanter Elasticität beschränken und die in §. 44 gemachten Voraussetzungen zu Grunde legen, so daß die einfachen Beziehungen:

$$136.)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\varrho}{dt} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} + \dfrac{\partial u_z}{\partial z} = 0\,, \\[2ex] \dfrac{d.q}{dt} = 0\;, \qquad q = q_0\,, \\[2ex] \qquad \varrho = \dfrac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \varrho_0 \end{cases}$$

stattfinden. Fügen wir dann noch die weitere Bestimmung hinzu, daß sich der Körper im Zustande des äußern ruhenden Gleichgewichtes befinden soll, so werden aus den Gleichungen (98) daselbst für das innere Gleichgewicht die Bedingungen:

$$137.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial S_z}{\partial y} + \dfrac{\partial S_y}{\partial z} + qX = 0\;, \\[2ex] \dfrac{\partial S_z}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} + \dfrac{\partial S_x}{\partial z} + qY = 0\;, \\[2ex] \dfrac{\partial S_y}{\partial x} + \dfrac{\partial S_x}{\partial y} + \dfrac{\partial T_z}{\partial z} + qZ = 0 \end{cases}$$

hervorgehen, und für die innere Bewegung die Gleichungen:

$$138.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial T_x}{\partial x} + \dfrac{\partial S_z}{\partial y} + \dfrac{\partial S_y}{\partial z} + qX = q\dfrac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}\;, \\[2ex] \dfrac{\partial S_z}{\partial x} + \dfrac{\partial T_y}{\partial y} + \dfrac{\partial S_x}{\partial z} + qY = q\dfrac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}\;, \\[2ex] \dfrac{\partial S_y}{\partial x} + \dfrac{\partial S_x}{\partial y} + \dfrac{\partial T_z}{\partial z} + qZ = q\dfrac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2}\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen und jene Bedingungen enthalten nur partielle Aenderungsgesetze der Spannungen T_x, S_x, S_y, u. s. f. und der Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und können daher für gegebene Werthe von X, Y und Z durch sehr viele Functionen für die Spannungen und Verschiebungen befriedigt werden; die Wahl derselben wird nur durch die an den Begrenzungsflächen stattfindenden Verhältnisse, insofern es sich um den Gleichgewichtszustand handelt, und für den Bewegungszustand durch diese, die anfängliche gegenseitige Lage und die anfängliche Geschwindigkeit der einzelnen Punkte des Systems beschränkt. Ferner ist die Anzahl der Veränderlichen T_x, T_y, S_x, u. s. f. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ weit größer als die Zahl der Gleichungen, welche zu ihrer Bestimmung dienen sollen, und da es sich nicht nur bei der Untersuchung der Bewegung, sondern auch bei der Betrachtung des Gleichgewichtszustandes eines veränderlichen Systems mit vorherrschender Cohäsion nicht sowohl um die Kenntniß der innern Spannungen, als vielmehr um die der Dehnungen und Formänderungen desselben handelt, so ist es vor Allem nothwendig, die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen eines solchen Systems festzustellen. Dabei werden wir aber wie früher einerseits die Voraussetzung sehr kleiner Dehnungen zu Grunde legen und demgemäß die zweite und die höhern Potenzen dieser Dehnungen in der Entwickelung der Spannungen vernachlässigen und uns auf der andern Seite wieder auf solche Systeme beschränken, deren Elasticität um einen Punkt herum nach jeder Richtung hin dieselbe ist, so daß die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen unabhängig sind von der Lage der Coordinaten-Achsen.

Aus den Betrachtungen über die Spannungs- und Dehnungsverhältnisse, welche um einen Punkt herum stattfinden, folgt, daß die Spannung für irgend eine Richtung von den sechs Spannungen:

$$T_x\ ,\quad T_y\ ,\quad T_z\ ,\qquad S_x\ ,\quad S_y\ ,\quad S_z$$

und jede Dehnung von den sechs Dehnungen:

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta x} = \mathfrak{a}\ ,\quad \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta y} = \mathfrak{b}\ ,\quad \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta z} = \mathfrak{c}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y} + \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}\right) = \mathfrak{f}\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta z} + \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta x}\right) = \mathfrak{g}\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta z} + \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta y}\right) = \mathfrak{h}$$

abhängt, daß man also jede der genannten sechs Spannungen als eine

Function dieser sechs Dehnungen betrachten und daher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung sehr kleiner Dehnungen die allgemeinen Beziehungen:

$$a.) \left\{ \begin{aligned} T_x &= A_1 \mathfrak{a} + B_1 \mathfrak{b} + C_1 \mathfrak{c} + D_1 \mathfrak{f} + E_1 \mathfrak{g} + F_1 \mathfrak{h} , \\ T_y &= A_2 \mathfrak{a} + B_2 \mathfrak{b} + \text{etc.} , \\ T_z &= A_3 \mathfrak{a} + B_3 \mathfrak{b} + \text{etc.} , \\ S_z &= \mathcal{A}_1 \mathfrak{a} + \mathcal{B}_1 \mathfrak{b} + \mathcal{C}_1 \mathfrak{c} + \mathcal{D}_1 \mathfrak{f} + \mathcal{E}_1 \mathfrak{g} + \mathcal{F}_1 \mathfrak{h} , \\ S_y &= \mathcal{A}_2 \mathfrak{a} + \mathcal{B}_2 \mathfrak{b} + \text{etc.} , \\ S_x &= \mathcal{A}_3 \mathfrak{a} + \mathcal{B}_3 \mathfrak{b} + \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

aufstellen kann, welche ferner voraussetzen, daß die Dehnungen von dem natürlichen Gleichgewichtszustand des Systems an gerechnet und demnach die Spannungen mit den Dehnungen Null werden. Diese Beziehungen enthalten 36 verschiedene Coeffizienten, und es wären daher im Allgemeinen sechs Versuche nothwendig, um sie zu bestimmen. Es leuchtet aber ein, daß auch für eine nicht nach jeder Richtung hin constante, aber um einen Punkt herum sich stetig ändernde Elasticität drei Versuche genügen müssen, um alle Coeffizienten zu bestimmen, daß also zwischen den obigen Coeffizienten selbst wieder gewisse Beziehungen bestehen müssen, durch welche die Zahl der zu bestimmenden Constanten im Allgemeinen wenigstens auf 18, für eine nach jeder Richtung hin gleiche Elasticität aber auf höchstens sechs herabgebracht wird, da für diese ein einziger Versuch zur Bestimmung aller Coeffizienten genügen muß. Im letztern Falle werden sich die betreffenden Beziehungen offenbar dadurch ergeben, daß man das Coordinatensystem nach andern Richtungen annimmt, für diese dieselben Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen aufstellt und mit den aus den ursprünglichen Beziehungen (a) abgeleiteten vergleicht, wie es oben bei der elastischen Fläche geschehen ist.

Legen wir demnach durch den betreffenden Punkt drei neue unter sich rechtwinklige Ebenen, deren Normalen wir die Achsen der ξ, η und ζ nennen wollen, und bezeichnen wie in §. 39 die Cosinus der Winkel $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, u. s. f., welche jede dieser Normalen mit den drei ursprünglichen Achsen der x, y und z bildet, mit a, b, c, a′, b′, c′, und a″, b″, c″, ferner die jenen Schnittebenen entsprechenden Spannungen mit $T^{(\xi)}$, $T^{(\eta)}$, $T^{(\zeta)}$, ihre Componenten nach den ursprünglichen Achsen mit $T_x^{(\xi)}$, $T_y^{(\xi)}$, $T_z^{(\xi)}$,

$T_x^{(\eta)}$, u. s. f., die nach den neuen Achsen einfach mit T_ξ, S_ζ, S_η, T_η, S_ζ, S_ξ, T_ζ, S_η, S_ξ, so erhalten wir zufolge der Gleichungen (79) und mittels der Beziehungen:

$$T_\xi^{(\xi)} = T_\xi = a\,T_x^{(\xi)} + b\,T_y^{(\xi)} + c\,T_z^{(\xi)},$$
$$T_\eta^{(\xi)} = S_\zeta = a'\,T_x^{(\xi)} + b'\,T_y^{(\xi)} + c'\,T_z^{(\xi)},$$
$$T_\zeta^{(\xi)} = S_\eta = a''\,T_x^{(\xi)} + b''\,T_y^{(\xi)} + c''\,T_z^{(\xi)},$$

$$T_\xi^{(\eta)} = S_\zeta = a\,T_x^{(\eta)} + b\,T_y^{(\eta)} + c\,T_z^{(\eta)},$$
$$T_\eta^{(\eta)} = T_\eta = a'\,T_x^{(\eta)} + b'\,T_y^{(\eta)} + c'\,T_z^{(\eta)},$$
$$T_\zeta^{(\eta)} = S_\xi = a''\,T_x^{(\eta)} + b''\,T_y^{(\eta)} + c''\,T_z^{(\eta)},$$

u. s. f.

die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
T_\xi &= a^2T_x + b^2T_y + c^2T_z + 2abS_z + 2acS_y + 2bcS_x,\\
T_\eta &= a'^2T_x + b'^2T_y + c'^2T_z + 2a'b'S_z + 2a'c'S_y + 2b'c'S_x,\\
T_\zeta &= a''^2T_x + b''^2T_y + c''^2T_z + 2a''b''T_z + 2a''c''S_y + 2b''c''S_x,\\
S_\zeta &= aa'T_x + bb'T_y + cc'T_z\\
&\quad + (ab'+a'b)S_z + (ac'+a'c)S_y + (bc'+b'c)S_x,\\
S_\eta &= aa''T_x + bb''T_y + cc''T_z\\
&\quad + (ab''+a''b)S_z + (ac''+a''c)S_y + (bc''+b''c)S_x,\\
S_\xi &= a'a''T_x + b'b''T_y + c'c''T_z\\
&\quad + (a'b''+a''b')S_z + (a'c''+a''c')S_y + (b'c''+b''c')S_x,
\end{aligned}\right\} \text{(b.}$$

deren erste mit der Gleichung (c) in §. 40 gleichbedeutend ist.

Sind ferner

$$\mathfrak{a}' = \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \xi}\ , \quad \mathfrak{b}' = \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \eta}\ , \quad \mathfrak{c}' = \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \zeta}$$

$$\mathfrak{f}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \xi}\right)\ , \quad \mathfrak{g}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \xi}\right)\ , \quad \mathfrak{h}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathfrak{z}'}{\partial \eta}\right)$$

die der neuen Achsen entsprechenden Dehnungen, so hat man auch vermöge der Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}' &= a\mathfrak{x} + b\mathfrak{y} + c\mathfrak{z}\ , & x &= a\xi + a'\eta + a''\zeta\ ,\\
\mathfrak{y}' &= a'\mathfrak{x} + b'\mathfrak{y} + c'\mathfrak{z}\ , & y &= b\xi + b'\eta + b''\zeta\ ,\\
\mathfrak{z}' &= a''\mathfrak{x} + b''\mathfrak{y} + c''\mathfrak{z}\ , & z &= c\xi + c'\eta + c''\zeta\ ,
\end{aligned}$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}' = \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\\
&= \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right)a\\
&+ \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)b\\
&+ \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right)c\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathfrak{f}' = \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial \xi} &= \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathfrak{x}'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta}\\
&+ \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathfrak{y}'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\\
&= \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right)a'\\
&+ \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)b'\\
&+ \left(a\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + b\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + c\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right)c'\\
&+ \left(a'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + b'\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} + c'\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right)a\\
&+ \left(a'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + b'\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + c'\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)b\\
&+ \left(a'\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + b'\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + c'\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right)c\ ,
\end{aligned}$$

u. s. f., oder in anderer Form zusammengefaßt:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{a}' &= a^2\mathfrak{a} + b^2\mathfrak{b} + c^2\mathfrak{c} + 2ab\mathfrak{f} + 2ac\mathfrak{g} + 2bc\mathfrak{h}\,,\\
\mathfrak{b}' &= a'^2\mathfrak{a} + b'^2\mathfrak{b} + c'^2\mathfrak{c} + 2a'b'\mathfrak{f} + 2a'c'\mathfrak{g} + 2b'c'\mathfrak{h}\,,\\
\mathfrak{c}' &= a''^2\mathfrak{a} + b''^2\mathfrak{b} + c''^2\mathfrak{c} + 2a''b''\mathfrak{f} + 2a''c''\mathfrak{g} + 2b''c''\mathfrak{h}\,,\\
\mathfrak{f}' &= aa'\mathfrak{a} + bb'\mathfrak{b} + cc'\mathfrak{c}\\
&\quad + (a'b + ab')\mathfrak{f} + (a'c + ac')\mathfrak{g} + (b'c + bc')\mathfrak{h}\,,\\
\mathfrak{g}' &= aa''\mathfrak{a} + bb''\mathfrak{b} + cc''\mathfrak{c}\\
&\quad + (a''b + ab'')\mathfrak{f} + (a''c + ac'')\mathfrak{g} + (b''c + bc'')\mathfrak{h}\,,\\
\mathfrak{h}' &= a'a''\mathfrak{a} + b'b''\mathfrak{b} + c'c''\mathfrak{c}\\
&\quad + (a''b' + a'b'')\mathfrak{f} + (a''c' + a'c'')\mathfrak{g} + (b''c' + b'c'')\mathfrak{h}\,.
\end{aligned}\right\}\ (c.$$

Für einen Körper, dessen Elasticität nach jeder Richtung hin um einen Punkt herum constant ist, werden die Beziehungen zwischen den Spannungen und Dehnungen für jede dieser Richtungen dieselben Coeffizienten enthalten; man wird also auch haben

$$\left.\begin{aligned}
T_\xi &= A_1\mathfrak{a}' + B_1\mathfrak{b}' + C_1\mathfrak{c}' + D_1\mathfrak{f}' + E_1\mathfrak{g}' + F_1\mathfrak{h}'\,,\\
T_\eta &= A_2\mathfrak{a}' + B_2\mathfrak{b}' + \text{etc.}\,,\quad T_\zeta = A_3\mathfrak{a}' + B_3\mathfrak{b}' + \text{etc.}\,,\\
S_\zeta &= \mathit{A}_1\mathfrak{a}' + \mathit{B}_1\mathfrak{b}' + \mathit{C}_1\mathfrak{c}' + \mathit{D}_1\mathfrak{f}' + \mathit{E}_1\mathfrak{g}' + \mathit{F}_1\mathfrak{h}'\,,\\
S_\eta &= \mathit{A}_2\mathfrak{a}' + \mathit{B}_2\mathfrak{b}' + \text{etc.}\,;\quad S_\xi = \mathit{A}_3\mathfrak{a}' + \mathit{B}_3\mathfrak{b}' + \text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ (d.$$

Legen wir nun das neue Coordinatensystem so, daß die Achse der ξ mit der y-Achse, die Achse der ζ mit der z-Achse zusammenfällt, so haben wir

$$\begin{aligned}
a &= 0\,, & b &= 1\,, & c &= 0\\
a' &= -1\,, & b' &= 0\,, & c' &= 0\\
a'' &= 0\,, & b'' &= 0\,, & c'' &= 1
\end{aligned}$$

zu nehmen und finden damit aus den Gleichungen (b) und (c) die Werthe:

$$T_\xi = T_y\,,\ T_\eta = T_x\,,\ T_\zeta = T_z\,,\ S_\zeta = -S_z\,,\ S_\eta = S_x\,,\ S_\xi = -S_y\,,$$

$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}\,,\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}\,,\ \mathfrak{f}' = -\mathfrak{f}\,,\ \mathfrak{g}' = \mathfrak{h}\,,\ \mathfrak{h}' = -\mathfrak{g}\,;$$

dadurch werden die Gleichungen (d) der Reihe nach:

$$\left\{\begin{aligned}
T_y &= A_1\mathfrak{b} + B_1\mathfrak{a} + C_1\mathfrak{c} - D_1\mathfrak{f} + E_1\mathfrak{h} - F_1\mathfrak{g}\ ,\\
T_x &= A_2\mathfrak{b} + B_2\mathfrak{a} + C_2\mathfrak{c} - D_2\mathfrak{f} + E_2\mathfrak{h} - F_2\mathfrak{g}\ ,\\
T_z &= A_3\mathfrak{b} + B_3\mathfrak{a} + C_3\mathfrak{c} - D_3\mathfrak{f} + E_3\mathfrak{h} - F_3\mathfrak{g}\ ,\\
S_z &= -\mathit{A}_1\mathfrak{b} - \mathit{B}_1\mathfrak{a} - \mathit{C}_1\mathfrak{c} + \mathit{D}_1\mathfrak{f} - \mathit{E}_1\mathfrak{h} + \mathit{F}_1\mathfrak{g}\ ,\\
S_x &= \mathit{A}_2\mathfrak{b} + \mathit{B}_2\mathfrak{a} + \mathit{C}_2\mathfrak{c} - \mathit{D}_2\mathfrak{f} + \mathit{E}_2\mathfrak{h} - \mathit{F}_2\mathfrak{g}\ ,\\
S_y &= -\mathit{A}_3\mathfrak{b} - \mathit{B}_3\mathfrak{a} - \mathit{C}_3\mathfrak{c} + \mathit{D}_3\mathfrak{f} - \mathit{E}_3\mathfrak{h} + \mathit{F}_3\mathfrak{g}\ ,
\end{aligned}\right.$$

und geben, mit den Gleichungen (a) verglichen, folgende Beziehungen:

$$A_2 = B_1\ ,\ B_2 = A_1\ ,\ C_2 = C_1\ ,\ D_2 = -D_1\ ,\ E_2 = \pm F_1\ ,\ F_2 = \pm E_1\ ,$$
$$A_3 = B_3\ ,\ B_3 = A_3\ ,\ C_3 = C_3\ ,\ D_3 = -D_3\ ,\ E_3 = F_3\ ,\ F_3 = -E_3\ ,$$
$$\mathit{A}_1 = -\mathit{B}_1\ ,\ \mathit{B}_1 = -\mathit{A}_1\ ,\ \mathit{C}_1 = -\mathit{C}_1\ ,\ \mathit{D}_1 = \mathit{D}_1\ ,\ \mathit{E}_1 = -\mathit{F}_1\ ,\ \mathit{F}_1 = \mathit{E}_1\ ,$$
$$\mathit{A}_2 = \pm\mathit{B}_2\ ,\ \mathit{B}_2 = \pm\mathit{A}_2\ ,\ \mathit{C}_2 = \pm\mathit{C}_2\ ,\ \mathit{D}_2 = \pm\mathit{D}_2\ ,\ \mathit{E}_2 = -\mathit{F}_2\ ,\ \mathit{F}_2 = \mathit{E}_2\ .$$

Daraus folgt, daß die Coefficienten E_1, F_1, E_2, F_2, D_3, E_3, F_3, C_1, E_1, F_1, A_2, B_2, A_3, B_3, C_2, C_3, D_2, D_3 Null werden müssen, und die Gleichungen (a) und (d) auf folgende zurückkommen:

$$\begin{aligned}
T_x &= A_1\mathfrak{a} + B_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{c} + D_1\mathfrak{f}\ , & T_\xi &= A_1\mathfrak{a}' + B_1\mathfrak{b}' + C_1\mathfrak{c}' + D_1\mathfrak{f}'\ ,\\
T_y &= B_1\mathfrak{a} + A_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{c} - D_1\mathfrak{f}\ , & T_\eta &= B_1\mathfrak{a}' + A_1\mathfrak{b}' + C_1\mathfrak{c}' - D_1\mathfrak{f}'\ ,\\
T_z &= A_3\mathfrak{a} + A_3\mathfrak{b} + C_3\mathfrak{c}\ , & T_\zeta &= A_3\mathfrak{a}' + A_3\mathfrak{b}' + C_3\mathfrak{c}'\ ,\\
S_z &= \mathit{A}_1\mathfrak{a} - \mathit{A}_1\mathfrak{b} + \mathit{D}_1\mathfrak{f}\ , & S_\zeta &= \mathit{A}_1\mathfrak{a}' + \mathit{A}_1\mathfrak{b}' + \mathit{D}_1\mathfrak{f}'\ ,\\
S_y &= \mathit{E}_2\mathfrak{g} + \mathit{F}_2\mathfrak{h}\ , & S_\eta &= \mathit{E}_2\mathfrak{g}' + \mathit{F}_2\mathfrak{h}'\ ,\\
S_x &= -\mathit{F}_2\mathfrak{g} + \mathit{E}_2\mathfrak{h}\ , & S_\xi &= -\mathit{F}_2\mathfrak{g}' + \mathit{E}_2\mathfrak{h}'\ .
\end{aligned}$$

Dreht man sodann das Coordinatensystem um die y-Achse, so daß die ζ-Achse mit der x-Achse, die Achse der η mit der y-Achse zusammenfällt, so hat man

$$a = 0,\ b = 0,\ c = -1,\ a' = 0,\ b' = 1,\ c' = 0,\ a'' = 1,\ b'' = 0,\ c'' = 0,$$

und es wird daher

$$T_\xi = T_z\ ,\ T_\eta = T_y\ ,\ T_\zeta = T_x\ ,\ S_\zeta = -S_x\ ,\ S_\eta = -S_y\ ,\ S_\xi = S_z\ ,$$
$$\mathfrak{a}' = \mathfrak{c}\ ,\ \mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\ ,\ \mathfrak{c}' = \mathfrak{a}\ ,\ \mathfrak{f}' = -\mathfrak{h}\ ,\ \mathfrak{g}' = -\mathfrak{g}\ ,\ \mathfrak{h}' = \mathfrak{f}\ .$$

Die zweite Reihe der vorhergehenden Gleichungen geht dadurch in die folgenden über:

$$T_z = A_1\mathfrak{c} + B_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{a} - D_1\mathfrak{h}\ ,\quad T_y = B_1\mathfrak{c} + A_1\mathfrak{b} + C_1\mathfrak{a} + D_1\mathfrak{h}\ ,$$
$$T_x = A_3\mathfrak{c} + B_3\mathfrak{b} + C_3\mathfrak{a}\ ,$$
$$S_x = -\mathit{A}_1\mathfrak{c} + \mathit{A}_1\mathfrak{b} + \mathit{D}_1\mathfrak{h}\ ,\quad S_y = \mathit{E}_2\mathfrak{g} - \mathit{F}_2\mathfrak{f}\ ,$$
$$S_z = \mathit{F}_2\mathfrak{g} + \mathit{E}_2\mathfrak{f}\ ,$$

welche mit der ersten Reihe verglichen die Beziehungen gibt:

$$C_3 = A_1\ ,\quad A_3 = B_1 = C_1 = B_3\ ,\quad D_1 = 0\ ,$$
$$\mathit{A}_1 = 0\ ,\quad \mathit{E}_2 = \mathit{D}_1\ ,\quad \mathit{F}_2 = 0\ .$$

Wir haben also einfach, indem wir die nun überflüssigen Inder weglassen,

$$\left.\begin{array}{ll} T_x = A\mathfrak{a} + B(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})\ , & S_z = D\mathfrak{f}\ , \\ T_y = A\mathfrak{b} + B(\mathfrak{a} + \mathfrak{c})\ , & S_y = D\mathfrak{g}\ , \\ T_z = A\mathfrak{c} + B(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\ , & S_x = D\mathfrak{h}\ , \end{array}\right\} \quad (e.$$

also nur noch drei zu bestimmende Coeffizienten.

Durch eine dritte Drehung des Coordinatensystems um die x-Achse, wodurch

$$a=1,\ b=0,\ c=0,\ a'=0,\ b'=0,\ c'=1,\ a''=0,\ b''=-1,\ c''=0$$

wird, ergibt sich, wie man sich leicht überzeugen kann, keine neue Bestimmung mehr; drehen wir dagegen das System in eine beliebige Lage, ersetzen in den entsprechenden Beziehungen:

$$T_\xi = A\mathfrak{a}' + B(\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}')\ ,\quad S_\zeta = D\mathfrak{f}'\ ,$$
u. s. f., u. s. f.,

links die Spannungen T_ξ, S_ζ, u. s. f. durch die Spannungen T_x, S_z, u. s. f. und diese selbst wieder durch ihre Werthe (e), ferner auf der rechten Seite die Dehnungen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, u. s. f. durch ihre Werthe (c) und vergleichen die Coeffizienten der Dehnungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, u. s. f. in der auf diese Weise sich ergebenden Gleichung, so finden wir die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} b^2+c^2 = a'^2+a''^2\ ,\quad a^2+c^2 = b'^2+b''^2\ ,\quad a^2+b^2 = c'^2+c''^2\ , \\ \mathit{D}ab = Aab + B(a'b' + a''b'')\ ,\quad \mathit{D}ac = Aac + B(a'c' + a''c'')\ , \\ \mathit{D}bc = Abc + B(b'c' + b''c'')\ , \end{array}\right\} \quad (f.$$

von denen die drei ersten von den Coefficienten A, B, D unabhängig sind und unmittelbar durch die Bedingungsgleichungen (Einl. §. 23):

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad , \quad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$
u. s. f. u. s. f.

zwischen den neun Cosinus a, b, c, a', etc. befriedigt werden. Es bestehen aber zwischen diesen Winkelfunctionen auch die Bedingungen (Einl. §. 23 und Bd. II., Berichtigungen):

$$ab + a'b' + a''b'' = 0 \;,\quad ac + a'c' + a''c'' = 0 \;,\quad bc + b'c' + b''c'' = 0 \;,$$

welche in die drei letzten der Bedingungsgleichungen (f) eingeführt, die Beziehung:

$$D = A - B$$

liefern. Setzen wir demnach $D = \varepsilon_1$, $B = \varepsilon_2$ und beachten, daß nach §. 43 unter den bisherigen Voraussetzungen die Summe

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' + \mathfrak{c}'$$

der geometrischen Raumausdehnung ϱ gleich ist, so finden wir folgende einfache Beziehungen:

$$139.)\left\{\begin{aligned}
T_x &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \varrho \;, \\
T_y &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2 \varrho \;, \\
T_z &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} + \varepsilon_2 \varrho \;, \\
S_z &= \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right) , \quad S_y = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right) , \\
S_x &= \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)
\end{aligned}\right.$$

zwischen den Spannungen und Dehnungen eines elastischen Körpers, dessen Elasticität nach allen Richtungen hin um einen Punkt herum die gleiche und daher auch durchaus constant ist.

Man zieht daraus leicht die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{T_x + T_y + T_z}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2}\,,\\
&\varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\right) = T_x - T_y\,,\quad \varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\right) = T_z - T_x\,,\\
&\varepsilon_1\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right) = T_y - T_z
\end{aligned}\right\} \quad (140.$$

und die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} T_x - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)}(T_y + T_z) = \frac{T_x}{E_1} - \frac{T_y + T_z}{E_2}\,,\\
&\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = \frac{T_y}{E_1} - \frac{T_x + T_z}{E_2}\,,\quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{T_z}{E_1} - \frac{T_x + T_y}{E_2}\,,
\end{aligned}\right\} \quad (141.$$

welche mit den drei letzten der Gleichungen (139) dazu dienen, die Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ aus den in Function von x, y und z ausgedrückten Spannungen abzuleiten.

§. 86.

Die vorhergehenden Beziehungen (139) enthalten zwar drei verschiedene Coeffizienten, aber nur zwei zu bestimmende Constanten, und diese bestimmen sich am einfachsten dadurch, daß man aus dem betreffenden Stoffe einen prismatischen oder cylindrischen Stab bildet, diesen durch einen Zug P von bekannter Größe der Länge nach streckt, und sowohl die Verlängerung als die Verminderung der Dicke oder des Durchmessers mißt. Nimmt man die Achse des Stabes als x-Achse, das eine Ende derselben als Anfangspunkt, und bezeichnet ihre Länge mit L, eine dazu senkrechte Ausdehnung mit B, die Verlängerung mit $\mathfrak{l} = L - L_0$, die Verminderung der Ausdehnung B mit $\mathfrak{b} = B_0 - B$, endlich die Oberfläche des ursprünglichen Querschnittes mit O_0, so wird einmal die Querschnittsfläche O des gestreckten Stabes im Verhältniß $B^2 : B_0^2$ kleiner als O_0, also

$$O = O_0 \frac{B^2}{B_0^2} = O_0 \frac{(B_0 - \mathfrak{b})^2}{B_0^2}$$

sein, und wenn $\frac{\mathfrak{b}}{B_0}$ ein kleiner Bruch ist, annähernd $O = O_0\left(1 - \frac{2\mathfrak{b}}{B_0}\right)$; für den geometrischen Zug T_x nach der x-Achse hat man

$$T_x = \frac{P}{O} = p\,,$$

alle übrigen Spannungen sind Null. Die Gleichungen (139) geben demnach die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} p = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} \\ 0 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} \\ 0 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}+\varepsilon_2\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}=0 \end{array}\right\},$$

und da in unserm Falle keine drehende Verschiebung um die Normale eines Parallel-Schnittes stattfindet, so hat man offenbar

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}=0\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}=0\ , \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}=0\ , \quad \text{u. s. f.}$$

$$\mathfrak{x}=ax=\frac{l}{L}x\ , \quad \mathfrak{y}=by=-\frac{b}{B}y\ , \quad \mathfrak{z}=bz=-\frac{b}{B}z\ ,$$

weil $\mathfrak{x}=$ wird für $x=L$, $\mathfrak{y}=-\frac{1}{2}b$ für $y=\frac{1}{2}B$, u. s. f. Die zweite und dritte der vorhergehenden Gleichungen werden identisch, und es genügen die beiden Gleichungen:

$$\text{g.)} \quad p=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{l}{L}-2\varepsilon_2\frac{b}{B}\ , \qquad 0=\varepsilon_2\frac{l}{L}-(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)\frac{b}{B}$$

zur Bestimmung von ε_1 und ε_2; man zieht aus ihnen unter der Form:

$$p=\varepsilon_1\lambda+\varepsilon_2(\lambda-2\beta)\ , \qquad 0=\varepsilon_2(\lambda-2\beta)-\varepsilon_1\beta$$

die Werthe:

$$142.) \qquad \varepsilon_1=\frac{p}{\lambda+\beta}\ , \qquad \varepsilon_2=\frac{p}{\lambda+\beta}\cdot\frac{\beta}{\lambda-2\beta}\ ,$$

worin λ und β für $\frac{l}{L}$ und $\frac{b}{B}$ gesetzt worden ist.

Umgekehrt hat man, wenn die Coefficienten ε_1 und ε_2 bestimmt sind, für die relative Verlängerung λ_1 und die relative Verminderung der Breite β_1 eines prismatischen Stabes, welcher nur in der Richtung seiner Länge gestreckt wird, die Ausdrücke:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1=p\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+3\varepsilon_2)}=\frac{p}{E_1}\ , \quad \beta_1=p\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+3\varepsilon_2)}=\frac{p}{E_2}\ , \\ \qquad\qquad \frac{\beta_1}{\lambda_1}=\frac{E_1}{E_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\ . \end{array}\right.$$

Bezeichnet man dann $\frac{l}{L_0}$ und $\frac{b}{B_0}$ mit λ_0 und β_0 so hat man

$$\frac{l}{L_0} = \frac{l}{L-l}, \quad \lambda_0 = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}, \quad \frac{b}{B_0} = \frac{b}{B+b}, \quad \beta_0 = \frac{\beta_1}{1+\beta_1},$$

also mit Vernachlässigung der Quadrate und höhern Potenzen von λ_1 und β_1

$$\lambda_0 = \lambda_1 \quad , \quad \beta_0 = \beta_1 .$$

Damit ergibt sich $O = O_0\,(1-2\beta_1) = O_0\left(1-\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\lambda_1\right)$,
und mit derselben Annäherung wie vorher

$$p = \frac{P}{O} = \frac{P}{O_0}(1+2\beta_1) = \frac{P}{O_0}\left(1+\frac{2E_1}{E_2}\lambda_1\right);$$

wird dann noch $\frac{P}{O_0}$ durch p_0 ersetzt, so folgt

$$\lambda_1 = \frac{p_0}{E_1}\left(1+\frac{2E_1}{E_2}\lambda_1\right), \quad \lambda_1 = \frac{p_0}{E_1}\left(1+\frac{2p_0}{E_2}\right).$$

Nehmen wir ferner an, daß der Stab die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds habe und nach der Länge und Breite durch die geometrischen Spannungen p_1 und p_2 gedehnt werde, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\lambda_2 + \varepsilon_2\beta_2 - \varepsilon_2\gamma_2, \\ p_2 &= (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\beta_2 + \varepsilon_2\lambda_2 - \varepsilon_2\gamma_2, \\ 0 &= \varepsilon_2(\lambda_2+\beta_2) - (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\gamma_2, \end{aligned}\right\}$$

worin nun β_2 die relative Vergrößerung der Breite, γ_2 die relative Verminderung der Dicke oder Höhe vorstellt. Man zieht daraus nach und nach

$$p_1+p_2 = (\varepsilon_1+2\varepsilon_2)(\lambda_2+\beta_2) - 2\varepsilon_2\gamma_2 = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+3\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(\lambda_2+\beta_2),$$

$$p_1 - p_2 = \varepsilon_1(\lambda_2-\beta_2);$$

für $p_1 = p_2 = p$ hat man also

$$\lambda_2 = \beta_2 = p\,\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+3\varepsilon_2)}, \qquad \gamma_2 = p\,\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+3\varepsilon_2)}.$$

Wird endlich derselbe Stab parallel zu seinen drei Kanten durch die

geometrischen Kräfte p_1, p_2, p_3 relativ oder für die Längeneinheit um λ_3, β_3, γ_3 gestreckt, so wird man haben

$$\left\{\begin{array}{l} p_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\lambda_3 + \varepsilon_2\beta_3 + \varepsilon_2\gamma_3 \\ p_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\beta_3 + \varepsilon_2\lambda_3 + \varepsilon_2\gamma_3 \\ p_3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\gamma_3 + \varepsilon_2\lambda_3 + \varepsilon_2\beta_3 \end{array}\right.$$

und daraus die neuen Gleichungen:

$$p_1 + p_2 + p_3 = (\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)(\lambda_3 + \beta_3 + \gamma_3) ,$$

$$p_1 - p_2 = \varepsilon_1(\lambda_3 - \beta_3) , \quad p_1 - p_3 = \varepsilon_1(\lambda_3 - \gamma_3) , \quad p_2 - p_3 = \varepsilon_1(\beta_3 - \gamma_3)$$

ableiten; für $p_1 = p_2 = p_3 = p$ geben diese

$$\lambda_3 = \beta_3 = \gamma_3 = p\frac{1}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} .$$

Es verhalten sich demnach die Längendehnungen eines Stabes, je nachdem derselbe nach einer oder zwei oder drei unter sich senkrechten Richtungen durch dieselbe geometrische Kraft p gedehnt wird,

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 : \varepsilon_1 + \varepsilon_2 : \varepsilon_1 .$$

Für die geometrische Volumenausdehnung $\varrho = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ dagegen hat man im ersten Falle den Werth:

$$\varrho_1 = \lambda_1 - 2\beta_1 = p\frac{1}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\lambda_1 ,$$

im zweiten Falle wird

$$\varrho_2 = \lambda_2 + \beta_2 - \gamma_2 = p\frac{2}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\lambda_2 ,$$

und im dritten hat man

$$\varrho_3 = \lambda_3 + \beta_3 + \gamma_3 = p\frac{3}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} = 3\lambda_3$$

und daher für die drei genannten Fälle die Verhältnisse:

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = 1 : 2 : 3 .$$

Es braucht dabei wohl kaum bemerkt zu werden, daß wenn die geometrischen Kräfte im entgegengesetzten Sinne, also stauend wirken, auch alle Dehnungen das Zeichen wechseln, die Verlängerung in Verkürzung, die Verminderung der Breite in eine Vergrößerung derselben, und die Volumenausdehnung in eine Raumverminderung oder Contraction übergeht.

Wenn $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wäre, so hätte man in denselben Fällen

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 2 : 1 ;$$

es ständen also die Längendehnungen im umgekehrten Verhältnisse zu den Volumendehnungen. Die bis jetzt über die Dehnung der Stoffe angestellten Versuche sind aber viel zu ungenügend, um in Betreff des Coeffizienten ε_2 etwas Sicheres bestimmen zu können, da man sich meistens darauf beschränkte, die durch eine Kraft P bewirkte Längendehnung prismatischer Stäbe zu messen, aus dieser Kraft und dem ursprünglichen Querschnitt O_0 den auf die Flächen-Einheit wirkenden Zug $p = \frac{P}{O_0}$ und daraus mittels der relativen Längendehnung λ den sogenannten Elasticitäts-Coeffizienten: $E = \frac{p}{\lambda}$ abzuleiten, welcher nach dieser Ableitung die Größe der geometrischen Spannung p ausdrückt, die zur Erzeugung der relativen Verlängerung: $\lambda = 1$ erfordert, durch welche also ein prismatischer Stab auf die doppelte Länge gestreckt würde, wenn seine Elasticität und sein Querschnitt für eine solche Dehnung constant bliebe. Die vorhergehende Untersuchung zeigt aber, daß dieser Elasticitätscoeffizient allein für die Kenntniß der Elasticität eines Stoffes nicht genügt, und daß es dazu nicht nur nothwendig ist, auch die bei der Verlängerung eintretende Verminderung der Breite oder Dicke in Rechnung zu nehmen, sondern auch die Verminderung des Querschnittes zu berücksichtigen, um aus der physischen Zugkraft P die richtige geometrische Zugkraft $p = \frac{P}{O}$ zu bestimmen, da im gedehnten Zustande die Kraft P sich nur auf die Fläche O und nicht mehr auf die Fläche O_0 vertheilt. Für wenig dehnbare Stoffe, wie die Metalle, genügt es dann natürlich nicht mehr, die Versuche im kleinen Maßstabe mit Drähten oder dünnen Stäben anzustellen, da für diese die absolute Verminderung der Dicke zu gering ist, um β mit einiger Sicherheit bestimmen zu können; wir werden

übrigens im nächsten Bande auf diese Untersuchung ausführlicher zurückkommen und dort die darauf bezüglichen Versuche näher besprechen *).

§. 87.

Da in dem eben untersuchten Falle die Dehnungen $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{c}_x$, u. s. f., sowie die Spannungen S_z, S_y, S_x Null sind, so fallen sowohl die Spannungsachsen als die Dehnungsachsen mit den Coordinatenachsen zusammen (§§. 40 und 42). Wird der prismatische Stab nur nach der Länge gestreckt, sind also die Spannungen T_y oder $\mathfrak{B}$ und T_z oder $\mathfrak{C}$ Null, so geht das Ellipsoid der Spannungen (81), sowie die Richtungsfläche der Spannungen (83) in die Ebenen:

$$\xi = \frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{p} \qquad \text{und} \qquad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{1}{\sqrt{T_x}} = \frac{1}{\sqrt{p}}$$

über, von denen die zweite andeutet, daß die Spannungen für alle Schnitte parallel zur Achse des Stabes (der x= oder ξ=Achse) gerichtet sind, und die erste, mit der Beachtung, daß man hat

$$\xi = r \cos \lambda = \frac{1}{T} \cos \lambda \, ,$$

unter die Form:

$$T = \mathfrak{A} \cos \lambda = p \cos \lambda$$

gebracht, ausspricht, daß die Spannung für irgend einen Schnitt dem

*) Nach der von Poisson und von Andern nach ihm zu Grunde gelegten Theorie, welche darin besteht, die zwischen den einzelnen Atomen thätigen innern Kräfte durch unbekannte Functionen ihrer Entfernung auszudrücken und durch Summation, beziehungsweise Integration derselben die Gesammtwirkung auf einen Punkt zu bestimmen, müßte für alle Stoffe $\lambda_1 = 4\,\beta_1$, also $\varepsilon_1 = 2\,\varepsilon_2$ sein, und $\varrho_1 = \frac{1}{2}\,\lambda_1$ werden. Wertheim hat aber durch directe Messungen der Volumenänderung bei Glas und Messing $\varrho_1 = \frac{1}{3}\,\lambda_1$ gefunden, woraus sich nach unsern obigen Werthen

$$3\,\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + 2\,\varepsilon_2 \quad , \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

ergibt. Ich selbst habe durch directe Dehnungsversuche mit einem breiten Bande aus vulkanisirtem Kautschuk für diesen elastischen Stoff bis zu sehr bedeutenden Verlängerungen das Verhältniß $\beta_0 : \lambda_0$ nahe constant $= 0{,}36$ gefunden, womit sich

$$\varepsilon_2 = 0{,}36\,\varepsilon_1 + 0{,}72\,\varepsilon_2 \quad , \qquad \varepsilon_1 = \tfrac{7}{9}\,\varepsilon_2 \, ,$$

also ε_1 kleiner als ε_2 ergibt.

Dadurch ist die Theorie von Poisson für unhaltbar erklärt.

Cosinus des Winkels λ proportional ist, welchen die Normale des Schnittes mit der Achse des Stabes bildet. Das Ellipsoid der Dehnungen (90) dagegen wird, weil $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist, ein Umdrehungsellipsoid, und die Richtungsfläche der Dehnungen (88^a) besteht, weil $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ negativ sind, aus zwei conjugirten Umdrehungshyperboloiden mit gemeinschaftlichem Asymptotenkegel, deren geometrische Achse parallel zur Achse des Stabes ist; die beiden Halbachsen a und b dieser Flächen verhalten sich

$$a : b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} : \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}} : \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \sqrt{\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2},$$

also für die Annahme $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wie $1 : \sqrt{3} = 1 : 1,732\ldots$ Die Erzeugende des Asymptotenkegels bildet mit der Achse einen Winkel α, für welchen man hat

$$tang\,\alpha = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\beta_1}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\varepsilon_2}}.$$

Dieser Winkel wird also für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ gleich 60^0, und die Figur 29 stellt den Achsenschnitt der betreffenden Fläche dar; BSB' ist der Schnitt des Hyperboloids mit zwei Mänteln, CS'C' der des Hyperboloids mit einem Mantel, AK die Erzeugende des Asymptotenkegels. Für die Richtungen AK und AK' finden also nur normale Verschiebungen statt; nach allen Richtungen, welche in den Winkel KAK' fallen, eine im Schnittpunkte der Curve BSB' normale Dehnung, und für alle Richtungen in dem Winkel KAK'' eine zur Curve CS'C' normale Stauung; für die Richtung Am, z. B. hat man eine parallel zu mn gerichtete geometrische Dehnung. Der Größe nach wird diese geometrische Dehnung durch den verkehrten Fahrstrahl Ar des Achsenschnittes FGF'G' des Dehnungsellipsoids vorgestellt, dessen Halbachsen a' und b' sich verhalten

$$a' : b' = \frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\beta_1} = \varepsilon_2 : \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$

(also für die obige Annahme $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wie 1 : 3), wenn die verkehrte Achse AF = a' die geometrische Verlängerung λ_1 vertritt.

Wird der betreffende Körper dagegen nach zwei Richtungen durch dieselbe constante geometrische Kraft gedehnt, so daß $T_x = \mathfrak{A} = T_y = \mathfrak{B} = p$, $T_z = \mathfrak{C} = 0$ ist, so werden die Flächen (81) und (83) Rotationscylinder, deren gemeinschaftliche Achse senkrecht ist zur Ebene jener

Richtungen, in unserm Falle also parallel zur Achse der x; die Halbmesser r und r′ dieser Cylinder sind

$$r = \frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{\mathfrak{p}} \quad \text{und} \quad r' = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{p}}} ;$$

es folgt daraus für die Spannung in irgend einer Schnittebene die Beziehung:

$$T^2 = \mathfrak{A}^2 (\cos^2\lambda + \cos^2\mu) = \mathfrak{A}^2 \sin^2\nu \; , \quad T = \mathfrak{A} \sin\nu = \mathfrak{p} \sin\nu \; ,$$

und der zweite Cylinder deutet an, daß nun alle Spannungen zur Ebene der xy parallel sind. Die Spannungsachsen fallen wieder mit den Dehnungsachsen zusammen, und da man für die Hauptdehnungen die Werthe hat:

$$\mathfrak{a} = \lambda_2 = \mathfrak{b} = \beta_2 = \mathfrak{p}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} \; , \quad \mathfrak{c} = -\gamma_2 = -\mathfrak{p}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} ,$$

so geht das Dehnungsellipsoid (90) wieder in ein Umdrehungsellipsoid über, und die Richtungsfläche der Dehnungen besteht aus zwei conjugirten Umdrehungshyperboloiden; die geometrische Achse dieser Flächen ist aber nun die Achse der z oder die Achse der Dehnung $\mathfrak{c}$. Für $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ wird das Ellipsoid eine Kugelfläche, die Hyperboloide werden gleichseitige und ihr Asymptotenkegel ein rechtwinkliger; für diesen Fall sind also die geometrischen Dehnungen, Stauungen oder Verschiebungen für alle Uebergangsrichtungen gleich groß, und wenn α', β, γ die Winkel einer solchen Richtung mit den drei Achsen sind, λ, μ, ν die Winkel, welche die zur Fläche normale Dehnungsrichtung mit denselben bildet, so hat man sowohl für die durch das einfächerige Hyperboloid bestimmten Dehnungen wie für die durch das zweifächerige Hyperboloid begrenzten Stauungen

$$\lambda = \alpha \quad , \quad \mu = \beta \quad , \quad \nu = \pi - \gamma \; .$$

Nach dem Vorhergehenden wird es leicht sein, die Verhältnisse zu untersuchen, welche stattfinden müssen, wenn der Stab nur nach einer oder zwei Richtungen gedehnt werden, nach den übrigen Richtungen aber keine Dehnung und keine Stauung eintreten, also z. B. β und γ oder γ allein Null sein soll. Man wird finden, daß in diesen Fällen die Dehnungen und Spannungen ihre Rollen in den vorher untersuchten Fällen vertauschen, indem nun z. B. für $\beta = \gamma = 0$ das Ellipsoid der Dehnungen und die Richtungsfläche derselben sich in Ebenen auf-

lösen, welche zur Richtung der Dehnung λ oder zur Achse des Stabes normal sind, während das Ellipsoid und die Richtungsfläche der Spannungen Umdrehungsflächen werden, denen jene Richtung als geometrische Achse gemeinschaftlich ist.

Unter den gewöhnlich stattfindenden Verhältnissen hätte man strenggenommen außer den dehnenden Kräften P noch den Druck der atmosphärischen Luft zu berücksichtigen; für die meisten Stoffe verschwindet derselbe indessen schon gegen die Größe der Kraft, welche angewendet werden muß, um eine wahrnehmbare Dehnung hervorzubringen, und für sehr kleine Dehnungen ändert derselbe überhaupt nichts in den vorher abgeleiteten Gesetzen. Um dieß nachzuweisen, bezeichnen wir den entsprechenden geometrischen Druck (den Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit) mit p_0, die entsprechenden Dehnungen mit λ_0, β_0, γ_0, und erhalten für diese Dehnungen, welche von dem natürlichen ungespannten Zustande des Körpers an gerechnet werden, die Gleichungen:

$$\lambda_0 = \beta_0 = \gamma_0 = -\frac{1}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} p_0 .$$

Wird dann der Stab im Sinne seiner Länge durch eine geometrische Kraft p gestreckt, und werden die entsprechenden Dehnungen λ und β zuerst ebenfalls von dem natürlichen Zustande des Körpers an genommen gedacht, so ergeben sich die Gleichungen:

$$p - p_0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\lambda + 2\varepsilon_2\beta \quad , \quad -p_0 = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)\beta + \varepsilon_2\lambda ,$$

$$\lambda = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p - \frac{1}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} p_0 = \frac{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p + \lambda_0 ,$$

$$\beta = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p - \frac{1}{\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2} p_0 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p + \beta_0 ,$$

und daraus folgen für die neuen Dehnungen $\lambda_1 = \lambda - \lambda_0$, $\beta_1 = \beta - \beta_0$, welche von dem durch den Druck der Luft erzeugten gespannten Zustande des Körpers an gerechnet werden, dieselben Werthe:

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p \quad , \quad \beta_1 = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)} p ,$$

welche wir oben erhalten haben. Dieses Ergebniß ist übrigens eine einfache Folge des schon bei der elastischen Linie und der elastischen Fläche in den §§. 72 und 83 angewendeten Satzes, daß für sehr kleine Dehnungen die Beziehungen zwischen Spannungen

und Dehnungen auch dann noch gültig bleiben, wenn die Dehnungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etc. von einem bereits gespannten Zustande an gerechnet und für die Spannungen T_x, T_y, etc. die Unterschiede der entsprechenden Spannungscomponenten in diesem und einem neuen gespannten Zustande eingeführt werden; dieser Satz läßt sich aus den Gleichungen (139) wie für den vorhergehenden Fall sehr leicht allgemein erweisen oder vielmehr unmittelbar aus diesen Gleichungen herauslesen.

§. 88.

Die vorhergehende Untersuchung betrifft nur einen der vielen Fälle, in welchen an den einzelnen Punkten des Systems keine äußere geometrische Kraft angreift, die Componenten X, Y und Z also Null sind. Zu diesen Fällen gehören namentlich die Biegungen und Dehnungen von prismatischen Stäben durch äußere physische förderndé und drehende Kräfte, welche an bestimmten Querschnitten derselben angreifen, welchen aber bisweilen auch noch eine äußere geometrische Kraft, wie z. B. das Gewicht des Stabes, beigefügt wird.

In allen diesen Fällen werden die Gleichungen (137) in Verbindung mit den Gleichungen (139) zunächst dazu dienen, die durch anderweitige Betrachtungen abgeleiteten oder vielmehr muthmaßlich bestimmten Werthe der Dehnungen und Spannungen zu rechtfertigen, wie es auch schon bei den elastischen Flächen mit den Gleichungen (126) geschehen ist; zur directen Bestimmung jener Werthe oder Formänderungen sind sie nicht anwendbar, weil sie zu viele Auflösungen zulassen. Sie sind auch für sich allein nicht maßgebend, da auch den äußern physischen Verhältnissen Genüge geleistet werden muß. Wenn daher die geometrischen Verhältnisse den Gleichungen (137) entsprechend festgestellt sind, so muß man noch auf die physischen übergehen und zwar dadurch, daß man die betreffenden Gleichungen in Bezug auf die drei Veränderlichen x, y und z zwischen denjenigen Grenzen integrirt, zwischen welchen keine äußeren physischen Kräfte angreifen, zwischen welchen also alle Form- und Spannungsänderungen stetige sind. Man kommt dadurch im Grunde wieder auf die Gleichungen (c) in §. 38 zurück, welche aber nun eine zweckmäßigere Form erhalten können, indem wir die Coordinaten für eine der vorhergenannten Grenzen mit x_0, y_0, z_0 und die entsprechenden Spannungen, welche sich direct durch die daselbst wirkenden äußern physischen Kräfte ergeben, mit $\mathfrak{T}^{(x)}_{0x}$, $\mathfrak{T}^{(x)}_{0y}$, $\mathfrak{T}^{(x)}_{0z}$, $\mathfrak{T}^{(y)}_{0x}$, $\mathfrak{T}^{(y)}_{0y}$, u. s. f. bezeichnen, während dieselben Buchstaben, ohne den unterhalb

stehenden Index 0 die bis zu einer veränderlichen Grenze sich ergebenden physischen Spannungen vorstellen, so daß man für die letztern die in §. 37 aufgeführten Werthe (a) erhält, und die Gleichungen (137) durch die eben angegebene Integration in die folgenden übergehen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{T}_x^{(x)} + \mathfrak{T}_x^{(y)} + \mathfrak{T}_x^{(z)} &= \mathfrak{T}_{0\,x}^{(x)} + \mathfrak{T}_{0\,x}^{(y)} + \mathfrak{T}_{0\,x}^{(z)} - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, qX \\
\mathfrak{T}_y^{(x)} + \mathfrak{T}_y^{(y)} + \mathfrak{T}_y^{(z)} &= \mathfrak{T}_{0\,y}^{(x)} + \mathfrak{T}_{0\,y}^{(y)} + \mathfrak{T}_{0\,y}^{(z)} - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, qY \\
\mathfrak{T}_z^{(x)} + \mathfrak{T}_z^{(y)} + \mathfrak{T}_z^{(z)} &= \mathfrak{T}_{0\,z}^{(x)} + \mathfrak{T}_{0\,z}^{(y)} + \mathfrak{T}_{0\,z}^{(z)} - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, qZ
\end{aligned}\right\} . \qquad (143.$$

Diese Gleichungen werden dann einerseits dazu dienen, nachzuweisen, daß die aus den angenommenen geometrischen Spannungen sich ergebenden physischen Verhältnisse in den Begrenzungsflächen oder besondern Punkten mit den Bedingungen der Aufgabe übereinstimmen, und anderseits dazu, willkürlich eingeführte constante Größen nach jenen physischen Verhältnissen näher zu bestimmen.

Nehmen wir als einfaches Beispiel noch einmal die in den vorhergehenden §§. behandelte Dehnung eines prismatischen Stabes, jedoch mit der Abänderung, daß der Stab nun als schwer betrachtet wird, lothrecht aufgehängt ist und sowohl durch sein eigenes Gewicht G als durch ein an der untern Grundfläche angehängtes Gewicht Q gestreckt wird, dessen Zug sich auf diese Grundfläche gleichmäßig vertheilt. Wenn für diesen Fall die Achse des Stabes als z-Achse, ihr unteres Ende als Anfangspunkt genommen wird, so hat man

$$X = 0 \quad , \quad Y = 0 \quad , \quad qZ = -qg = -p$$

und genügt daher den Gleichungen (137) durch die den Verhältnissen muthmaßlich entsprechenden Werthe:

$$\begin{aligned}
T_x &= k_2 \quad , \quad & T_y &= k_2 \quad , \quad & T_z &= k_1 + pz \quad , \\
S_z &= 0 \quad , \quad & S_y &= 0 \quad , \quad & S_x &= 0 \quad ;
\end{aligned}$$

denn die beiden ersten dieser Gleichungen werden unmittelbar befriedigt, und für die dritte hat man auch

$$\frac{\partial T_z}{\partial z} - p = 0 \; .$$

Ferner hat man damit

$$\mathfrak{T}_x^{(x)} = k_3\, O_3 \quad , \qquad \mathfrak{T}_y^{(y)} = k_2\, O_2 \quad , \qquad \mathfrak{T}_z^{(z)} = k_1\, O_1 + p\, z\, O_1 \quad ,$$

$$\mathfrak{T}_y^{(x)} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{T}_z^{(x)} = 0 \quad , \qquad \mathfrak{T}_x^{(y)} = 0 \quad , \quad \text{u. s. f.,}$$

wenn O_3, O_2 und O_1 die Oberflächen dreier zu den Achsen der x, y und z senkrechten Schnitte des Stabes vorstellen. Bleibt demnach der Luftdruck unberücksichtigt, so daß $\underset{0}{\mathfrak{T}}{}_x^{(x)} = \underset{0}{\mathfrak{T}}{}_y^{(y)} = 0$ und $\underset{0}{\mathfrak{T}}{}_z^{(z)} = Q$ wird, so muß auch $k_2 = k_3 = 0$ sein, die dritte der Gleichungen (143) gibt

$$k_3\, O_1 + p\, z\, O_1 = Q + \int_0^z \partial z \int_{-x}^{x} \partial x \int_{-y}^{y} \partial y \,.\, p = Q + p\, V \; ,$$

und mit der Beachtung, daß auch $z\, O_1 = V$ ist, folgt daraus $k_3 = \frac{Q}{O_1} = p_1$.

Die Gleichungen (140) und (141) geben dann die Beziehungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{p_1 + p z}{E_1} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = -\, \frac{p_1 + p z}{E_2} \; ,$$

und aus diesen zieht man mit der Annahme, daß $\mathfrak{x}$ mit x, $\mathfrak{y}$ mit y Null wird, zunächst die Werthe:

$$\mathfrak{x} = -\, \frac{p_1 + p z}{E_2}\, x \quad , \qquad \mathfrak{y} = -\, \frac{p_1 + p z}{E_2}\, y \; ,$$

welche die Aenderungsgesetze geben:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = -\, \frac{p x}{E_2} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} = -\, \frac{p y}{E_2} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = 0 \, .$$

Dadurch erhält man unmittelbar $S_z = 0$, und dafür, daß auch S_y und S_x Null werden, die Bedingungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = -\, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{p x}{E_2} \quad , \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = -\, \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} = \frac{p y}{E_2} \; ,$$

welche nun mit dem obigen Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ für $\mathfrak{z}$ den Ausdruck geben:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{E_1}\left(p_1 z + \frac{1}{2} p z^2\right) + \frac{p}{2 E_2}\,(x^2 + y^2) \; .$$

Daraus würde folgen, daß im jetzigen Falle die zur Achse des Stabes normalen Schnitte, welche vor seiner Dehnung eben waren, nach der-

selben es nicht mehr sind, indem sich die Achse selbst am wenigsten dehnte, nämlich um die Größe $\mathfrak{z} = \mathfrak{l}$ für $z = L$, $x = y = 0$, also um

$$\mathfrak{l} = \frac{1}{E_1}\left(p_1 L + \frac{1}{2} p L^2\right) = L \frac{Q + \frac{1}{2} G}{E_1 O_1},$$

und jede Parallele zur Achse um eine Größe:

$$\Delta \mathfrak{l} = \frac{p r^2}{2 E_2}$$

mehr, welche dem Quadrat ihrer Entfernung r von der Achse proportional und von der Länge des Stabes unabhängig wäre. Diese Größe ist unter den gewöhnlichen Verhältnissen allerdings sehr klein wegen des Verhältnisses $\frac{p}{2 E_2}$ und weil man bei einem Stabe r nicht groß voraussetzen kann, und sie darf deßhalb vernachlässigt werden *); sie scheint indessen darauf hinzudeuten, daß für den betreffenden Fall die obigen einfachen Annahmen nicht ganz strenge genügen.

Mit Vernachlässigung dieser Größe kann man aus dem vorhergehenden Werthe von $\mathfrak{l}$ den Schluß ziehen, daß im jetzigen Falle die Verlängerung des Stabes dieselbe ist, als wenn derselbe gewichtlos gedacht und dafür am untern Ende dem Gewichte Q noch die Hälfte seines Gewichtes G beigefügt wird.

Für die Verminderung $\mathfrak{b}$ einer zur Achse senkrechten Ausdehnung B, so daß man hat $\mathfrak{x} = -\mathfrak{b}$ für $x = B$, zieht man aus dem Werthe von $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{b} = B \frac{p_1 + p z}{E_2} = \frac{B}{E_2 O_1}\left(Q + G \frac{z}{L}\right)$$

und schließt daraus, daß der Stab im jetzigen Falle nicht prismatisch bleibt, sondern sich nach oben proportional der Entfernung vom untern Ende verjüngt. Bei dieser Annahme könnte aber streng genommen O_1, also auch p_1 nicht constant bleiben, sondern würde eine Function von z; richtiger ausgesprochen folgt demnach aus dem letzten Werthe, daß der Stab erst durch die Dehnung prismatisch wurde, also vor

*) Wenn der Centimeter als Längeneinheit, das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird, so hat man für Eisen $E_1 = 2\,000\,000\,000$, E_2 wahrscheinlich nahe $3 E_1$ und $p = 7{,}8$, also $\frac{p}{2 E_2}$ verschwindend klein; für Kautschuk fand ich $p = 0{,}8$, $\varepsilon_1 = 7000$, $\varepsilon_2 = 9000$, womit sich $E_1 = 9520$, $E_2 = 26400$ ergibt, und $\frac{p}{2 E_2} = 0{,}000015$.

der Dehnung vom obern Ende gegen das untere hin verjüngt gewesen sein oder die Gestalt einer abgestumpften Pyramide oder eines abgestumpften Kegels gehabt haben muß, von der Art, daß sich die obere Grundfläche zur untern wie

$$\left(1+\frac{p_1+pL}{E_2}\right)^2 : \left(1+\frac{p_1}{E_2}\right)^2 \text{ oder nahe wie } 1+\frac{2pL}{E_2+p_1} : 1,$$

wenn pL sehr klein ist gegen E_2+p_1, verhalten hat.

Wenn der Stab eine andere als die ebenbezeichnete Verjüngung besitzt, dabei aber immer eine solche Gestalt hat, daß seine Querschnitte ähnlich sind, und daß seine Achse, d. i. die Linie, welche die Schwerpunkte dieser Querschnitte verbindet, eine Gerade ist, so wird derselbe weder durch die Kraft Q allein noch durch diese und sein Gewicht so gedehnt werden, daß er nach der Dehnung prismatisch wird. Sei dann nach der Dehnung O_0 die Größe der untern Grundfläche, O_z der Querschnitt des Stabes in der Entfernung z von der untern Grundfläche und V das Volumen von dieser an bis zu dem Querschnitte O_z. Man hat dann offenbar

$$\mathfrak{T}_z^{(z)} = Q + pV,$$

und mit der Beachtung, daß $O_z = \int_{x_0}^{x_1}\delta x\int_{y_0}^{y_1}\delta y\,.\,1$ nur eine Function von z sein kann, wird man schließen, daß man auch

$$\mathfrak{T}_z^{(z)} = \int_{x_0}^{x_1}\delta x\int_{y_0}^{y_1}\delta y\,.\,\frac{Q}{O_z} + \int_{x_0}^{x_1}\delta x\int_{y_0}^{y_1}\delta y\,.\,\frac{p\int_0^z dz\,.\,O_z}{O_z},\quad T_z = \frac{Q}{O_z} + \frac{p\int_0^z dz\,.\,O_z}{O_z},$$

also

$$\text{A.)}\quad \frac{d\,.\,T_z O_z}{dz} = pO_z \quad\text{oder}\quad T_z\frac{dO_z}{dz} = \left(p-\frac{dT_z}{dz}\right)O_z$$

haben muß, woraus sich unmittelbar die Gleichung:

$$\text{B.)}\quad logn\,\frac{O_z}{O_0} = \int_0^z dz\,.\,\frac{p-\frac{dT_z}{dz}}{T_z}$$

zur Bestimmung von O_z aus T_z ergibt.

Soll z. B. T_z constant und $= p_1 = \frac{Q}{O_0}$ sein, so hat man

$$\frac{dT_z}{dz} = 0 \quad , \quad O_z = O_0\, e^{\frac{pz}{p_1}} \quad , \qquad \text{a.)}$$

und die dritte der Gleichungen (137) gibt mit der Beachtung, daß wieder $qZ = -p$, $X = Y = 0$ ist, daß S_x und S_y in Bezug auf x und y symmetrisch und mit x und y Null werden müssen, weil in der Achse des Stabes keine Verschiebungen stattfinden,

$$\frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} - p = 0 \quad , \quad S_x = \frac{1}{2} p y \quad , \quad S_y = \frac{1}{2} p x \,.$$

Daraus folgt mit der weitern Beachtung, daß keine Verschiebungen senkrecht zur Achse des Stabes eintreten können, also $S_z = 0$ ist, und mit Berücksichtigung der beiden ersten jener Gleichungen

$$\frac{\partial S_x}{\partial z} = \frac{\partial S_y}{\partial z} = 0 \; , \quad \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \; , \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0 \; ,$$

also ohne Einrechnung des Luftdruckes $T_x = 0$, $T_y = 0$, und diese Werthe genügen auch den beiden ersten der Gleichungen (143), weil man hat

$$\mathfrak{T}_x^{(z)} = \tfrac{1}{2}\, p \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, x = \underset{0}{\mathfrak{T}_x^{(z)}} = 0 \;, \text{ u. s. f.}$$

wenn, wie vorausgesetzt wurde, die z=Achse mit der Achse des Stabes, d. i. mit der Geraden, welche die Schwerpunkte der Querschnittsflächen verbindet, zusammenfällt.

Durch die Gleichungen (141) ergibt sich dann weiter

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = -\frac{p_1}{E_2} \;, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{p_1}{E_1} \;,$$

und daraus folgt

$$\mathfrak{x} = -\frac{p_1}{E_2} x \;, \quad \mathfrak{y} = -\frac{p_1}{E_2} y \;, \quad \mathfrak{z} = \frac{p_1}{E_1} z + f(x, y) \;,$$

wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als unabhängig von z vorausgesetzt werden. Damit hat man wieder

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} = 0 \;, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = f'_x(x, y) \;, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = f'_y(x, y) \;,$$

also zufolge der Werthe von S_x und S_y die Bedingungen:

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 f'_x(x, y) = \tfrac{1}{2}px \quad , \qquad \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 f'_y(x, y) = \tfrac{1}{2}py \quad ,$$

durch welche sich

$$f(x, y) = \frac{p}{2\varepsilon_1}(x^2+y^2) \quad , \qquad \mathfrak{z} = \frac{p_1}{E_1}z + \frac{p}{2\varepsilon_1}(x^2+y^2)$$

ergibt.

Es ist demnach im jetzigen Falle, wie bei einem gewichtlosen prismatischen Stabe, welcher durch einen Zug Q an beiden Enden gestreckt wird, sowohl die Dehnung längs der Achse als die Zusammenziehung senkrecht zu derselben durchaus constant. Es ist daher auch, wenn man das kleine Glied $\frac{p}{2\varepsilon_1}(x^2+y^2)$ vernachlässigt, die Gestalt des Stabes vor der Dehnung derjenigen nach der Dehnung ganz ähnlich; denn ist B_z eine zur Achse senkrechte Ausdehnung des Stabes in der Entfernung z vom untern Ende, B_0 die parallele für $z = 0$ nach der Dehnung, $B_z^{(0)}$ und $B_0^{(0)}$ die entsprechenden Größen vor der Dehnung, so hat man

$$B_z^{(0)} - B_z = \frac{p_1}{E_2}B_z \quad , \quad B_z^{(0)} = \frac{E_2+p_1}{E_2}B_z \quad , \quad B_0^{(0)} = \frac{E_2+p_1}{E_2}B_0 \quad ,$$

also

$$\frac{B_z^{(0)}}{B_0^{(0)}} = \frac{B_z}{B_0} \quad \text{und} \quad \frac{O_z^{(0)}}{O_0^{(0)}} = \left(\frac{B_z^{(0)}}{B_0^{(0)}}\right)^2 = \left(\frac{B_z}{B_0}\right)^2 = \frac{O_z}{O_0} \quad ,$$

folglich nach Gleichungen (a)

$$\text{b.)} \qquad O_z^{(0)} = O_0^{(0)}\, e^{\frac{pz}{p_1}} = O_0^{(0)}\, e^{\frac{pzO_0}{Q}} \; .$$

Streng genommen wären in dieser Gleichung noch die auf den gedehnten Zustand sich beziehenden Größen p, z und p_1 durch die entsprechenden für den ungedehnten Zustand zu ersetzen; die Unterschiede sind aber für die unsern Untersuchungen zu Grunde liegenden Voraussetzungen sehr kleiner Dehnungen so gering, daß die Gleichung (b) mit hinreichender Genauigkeit die ursprüngliche Gestalt eines Stabes bestimmt, welcher, durch eine angehängte Last Q und sein eigenes Gewicht gedehnt, eine constante Spannung und Dehnung annimmt.

Wird das Gewicht des Stabes vernachlässigt, also $p = 0$ gesetzt, so wird $O_z = O_0$, $O_z^{(0)} = O_0^{(0)}$; der Stab ist also vor wie nach

der Dehnung prismatisch, wie früher in §. 86 angenommen wurde, und es nehmen auch die Dehnungen die dortigen Werthe wieder an.

Ebenso findet man durch die Gleichung (B) $O_z = O_0$, wenn man für T_z die Function:

$$T_z = p_1 + pz$$

wählt, wodurch man auf den schon behandelten Fall zurückkommt.

Weniger einfach als die Bestimmung von O_z aus T_z ist die umgekehrte Aufgabe, T_z nach O_z zu bestimmen, wenn das Gewicht des Stabes zu berücksichtigen ist. Die Gleichung (A) wird für diesen Fall

$$O_z \frac{dT_z}{dz} = pO_z - T_z \frac{dO_z}{dz} \quad \text{oder} \quad \frac{dT_z}{dz} = p - T_z \frac{d.\,logn\,O_z}{dz} \qquad (C.$$

und kann nicht allgemein aufgelöst werden.

§. 89.

Für die Untersuchung derjenigen Formänderungen, bei welchen die äußern Kräfte auch drehende Wirkungen ausüben, wird es vortheilhaft und selbst nothwendig sein, auch die Bedingungen für das Gleichgewicht der drehenden Kräfte zu Hülfe zu nehmen, nämlich die Gleichungen (e) oder (f) in §. 38, die zwar keine neue Bedingung zwischen den geometrischen Kräften aufstellen, welche aber für die Betrachtung selbst förderlich sein werden, und deren Integrale, die Gleichungen (d) daselbst, zwischen den Grenzen, an denen äußere physische drehende Kräfte angreifen, zur Lösung der Aufgabe unentbehrlich sind, indem sie von den geometrischen Verhältnissen eines Punktes auf die physischen Verhältnisse der Schnittflächen zurückführen. Diese Integrale nehmen nach der in §. 38 und bei den Gleichungen (143) angewendeten Bezeichnung die Form an:

$$\left(\mathfrak{T}_z^{(x)}\mathfrak{y}_z^{(x)} - \mathfrak{T}_y^{(x)}\mathfrak{z}_y^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{T}_z^{(y)}\mathfrak{y}_z^{(y)} - \mathfrak{T}_y^{(y)}\mathfrak{z}_y^{(y)}\right) + \left(\mathfrak{T}_z^{(z)}\mathfrak{y}_z^{(z)} - \mathfrak{T}_y^{(z)}\mathfrak{z}_y^{(z)}\right)$$

$$= \left(\underset{0}{\mathfrak{T}}_z^{(x)}\underset{0}{\mathfrak{y}}_z^{(x)} - \underset{0}{\mathfrak{T}}_y^{(x)}\underset{0}{\mathfrak{z}}_y^{(x)}\right) + \left(\underset{0}{\mathfrak{T}}_z^{(y)}\underset{0}{\mathfrak{y}}_z^{(y)} - \underset{0}{\mathfrak{T}}_y^{(y)}\underset{0}{\mathfrak{z}}_y^{(y)}\right) + \left(\underset{0}{\mathfrak{T}}_z^{(z)}\underset{0}{\mathfrak{y}}_z^{(z)} - \underset{0}{\mathfrak{T}}_y^{(z)}\underset{0}{\mathfrak{z}}_y^{(z)}\right)$$

$$- \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, q(yZ - zY),$$

u. s. f.;

sie können aber dadurch abgekürzt und für ihre Bedeutung bezeichnender dargestellt werden, daß man die um die x=Achse drehenden Momente

der geometrischen Kräfte $T^{(x)}$, $T^{(y)}$ und $T^{(z)}$ durch $M_x^{(x)}$, $M_x^{(y)}$, $M_x^{(z)}$, ihre drehenden Wirkungen um die y-Achse durch $M_y^{(x)}$, $M_y^{(y)}$, $M_y^{(z)}$, u. s. f., die entsprechenden physischen Wirkungen durch $\mathfrak{M}_x^{(x)}$, $\mathfrak{M}_x^{(y)}$, $\mathfrak{M}_x^{(z)}$, $\mathfrak{M}_y^{(x)}$, $\mathfrak{M}_y^{(y)}$, $\mathfrak{M}_y^{(z)}$, u. s. f. bezeichnet, so daß man für die erstern die Werthe:

$$144.)\quad \begin{cases} M_x^{(x)} = yT_z^{(x)} - zT_y^{(x)} = yS_y - zS_z \\ M_x^{(y)} = yT_z^{(y)} - zT_y^{(y)} = yS_x - zT_y \\ M_x^{(z)} = yT_z^{(z)} - zT_y^{(z)} = yT_z - zS_x \\ M_y^{(x)} = zT_x^{(x)} - xT_z^{(x)} = zT_x - xS_y \\ M_y^{(y)} = zT_x^{(y)} - xT_z^{(y)} = zS_z - xS_x \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

erhält und für die letztern

$$145.)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{y_0}^{z} \delta z . M_x^{(x)} \quad , \quad \mathfrak{M}_x^{(y)} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z . M_x^{(y)} , \\ \mathfrak{M}_x^{(z)} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y . M_x^{(z)} , \\ \mathfrak{M}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . M_y^{(x)} \quad , \quad \mathfrak{M}_y^{(y)} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z . M_y^{(y)} \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Die Gleichungen für das Gleichgewicht der geometrischen Momente nehmen damit die einfache Form:

$$146.)\quad \begin{cases} \frac{\delta M_x^{(x)}}{dx} + \frac{\delta M_x^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta M_x^{(z)}}{\delta z} + q(yZ - zY) = 0 \\ \frac{\delta M_y^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta M_y^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta M_y^{(z)}}{\delta z} + q(zX - xZ) = 0 \\ \frac{\delta M_z^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta M_z^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta M_z^{(z)}}{\delta z} + q(xY - yX) = 0 \end{cases}$$

an, so daß sie mit denen der fördernden Wirkungen ganz gleichlautend werden. Bezeichnet man dann noch die physischen drehenden Wirkungen für eine zur x=Achse senkrechte Schnittebene durch den Punkt $x_0\, y_0\, z_0$ mit $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_x^{(x)}$, $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_y^{(x)}$, $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_z^{(x)}$, für den zur Achse der y senkrechten Schnitt in demselben Punkte mit $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_x^{(y)}$, $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_y^{(y)}$, $\underset{0}{\mathfrak{M}}{}_z^{(y)}$, und so entsprechend für den zur z=Achse senkrechten Schnitt, so erhalten wir für das Gleichgewicht der physischen drehenden Kräfte die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x^{(x)} + \mathfrak{M}_x^{(y)} + \mathfrak{M}_x^{(z)} &= \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_x^{(x)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_x^{(y)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_x^{(z)} \\
&\quad - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, q(yZ - zY)\,, \\
\mathfrak{M}_y^{(x)} + \mathfrak{M}_y^{(y)} + \mathfrak{M}_y^{(z)} &= \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_y^{(x)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_y^{(y)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_y^{(z)} \\
&\quad - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, q(zX - xZ)\,, \\
\mathfrak{M}_z^{(x)} + \mathfrak{M}_z^{(y)} + \mathfrak{M}_z^{(z)} &= \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_z^{(x)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_z^{(y)} + \underset{0}{\mathfrak{M}}{}_z^{(z)} \\
&\quad - \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, q(xY - yX)\,.
\end{aligned}\right\} \quad (147.$$

In vielen Fällen dieser Art wird es auch zweckmäßig sein, Polarcoordinaten, insbesondere für die Drehung um eine bestimmte Achse Cylindercoordinaten anzuwenden oder doch mit den rechtwinkligen zu verbinden. Man hat dazu, wenn die z=Achse als Drehungsachse angenommen wird,

$$x = r \cos\omega\,, \quad x^{(0)} = r^{(0)} \cos\omega^{(0)}\,, \quad y = r \sin\omega\,, \quad y^{(0)} = r^{(0)} \sin\omega^{(0)}$$

und demnach, wenn man $r - r^{(0)} = \mathfrak{r}$, $\omega - \omega^{(0)} = \tau$ setzt, also $\mathfrak{r}$ und τ die Aenderungen des Fahrstrahles r und des Azimuths ω eines Punktes bezeichnen,

148.)

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{x}=\mathrm{r}\cos\omega-(\mathrm{r}-\mathfrak{r})\cos(\omega-\tau)=\mathfrak{r}\cos(\omega-\tau)-2\mathrm{r}\sin\tfrac{1}{2}\tau\sin(\omega-\tfrac{1}{2}\tau),\\
\mathfrak{y}=\mathrm{r}\sin\omega-(\mathrm{r}-\mathfrak{r})\sin(\omega-\tau)=\mathfrak{r}\sin(\omega-\tau)+2\mathrm{r}\sin\tfrac{1}{2}\tau\cos(\omega-\tfrac{1}{2}\tau),\\
\mathfrak{z}=\mathrm{z}-\mathrm{z}^{(0)},\\
\text{und wie früher}\\
\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\mathrm{x}}=\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\mathrm{r}}\cos\omega-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\mathrm{r}},\quad \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathrm{x}}=\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathrm{r}}\cos\omega-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\omega}\frac{\sin\omega}{\mathrm{r}},\\
\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\mathrm{y}}=\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\mathrm{r}}\sin\omega+\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\omega}\frac{\cos\omega}{\mathrm{r}},\quad \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathrm{y}}=\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\mathrm{r}}\sin\omega+\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial\omega}\frac{\cos\omega}{\mathrm{r}},\\
\quad\text{u. s. f.}
\end{array}\right.$$

Die weitere Entwicklung dieser Formeln dürfte übrigens am besten jedem besondern Falle vorbehalten werden.

Das einfachste Beispiel dieser Art ist die Drehung (Torsion) eines prismatischen Stabes durch zwei gleiche und entgegengesetzt wirkende Momente Pp, welche an den beiden Grundflächen desselben angreifen, und zwar ohne Rücksicht auf das Gewicht desselben, so daß keine äußere fördernde Wirkung und keine äußere geometrische Kraft vorhanden ist. Man kann dazu den Stab mit seiner obern Grundfläche an einer horizontalen Ebene befestigt annehmen, so daß seine Achse, welche auch die Achse der z vorstellt, eine lothrechte Richtung hat, in der Ebene der untern Grundfläche, der xy-Ebene, das Moment Pp angreifen lassen und von der geringen Dehnung des Stabes durch sein Gewicht Umgang nehmen. Der Widerstand der obern Grundfläche gegen die Drehung bildet das zweite Moment und muß dem Momente Pp an der untern Grundfläche des äußern Gleichgewichtes wegen gleich und entgegengesetzt sein, und da keine fördernden Kräfte vorhanden sind, so müssen an den Begrenzungsflächen des Stabes die Spannungen T_x, T_y und T_z Null werden.

Man genügt daher diesen Bedingungen und den Gleichungen (137) oder (146) am einfachsten dadurch, daß man in den Beziehungen (148) $\mathfrak{r}=\mathfrak{z}=0$ setzt, τ nur von z abhängig annimmt und die zweite und die höhern Potenzen von τ vernachlässigt, so daß man hat $\cos\tau=1$, $\sin\tau=\tau$ und

$$\mathfrak{x}=-\tau\mathrm{r}\sin\omega=-\tau\mathrm{y},\quad \mathfrak{y}=\tau\mathrm{r}\cos\omega=\tau\mathrm{x};$$

es folgt daraus zuerst

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} = 0 \;,\quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} = -\tau \;,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} = 0 \;,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = \tau \;,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = -y\frac{\partial \tau}{\partial z} \;,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} = x\frac{\partial \tau}{\partial z} \;,\quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} = 0 \;,$$

und damit ergeben sich die Werthe:

$$T_x = T_y = T_z = 0 \;,\; S_z = 0 \;,\; S_y = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 y \frac{\partial \tau}{\partial z} \;,\; S_x = \frac{1}{2}\varepsilon_1 x \frac{\partial \tau}{\partial z} \;,$$

$$\frac{\partial S_y}{\partial x} = \frac{\partial S_x}{\partial y} = 0 \;,\; \frac{\partial S_y}{\partial z} = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 y \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \;,\; \frac{\partial S_x}{\partial z} = \frac{1}{2}\varepsilon_1 x \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \;,$$

welche die letzte der Gleichungen (142) unmittelbar und die beiden ersten wie auch die Gleichungen (146) mit der Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} = 0 \;,\qquad \tau = kz$$

befriedigen. Die dritte der Gleichungen (147) wird dann

$$\mathfrak{M}_{x}^{(z)} = \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.(xS_x - yS_y) = \frac{1}{2}\varepsilon_1\frac{\partial \tau}{\partial z}\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_1\frac{\partial \tau}{\partial z}\int_0^{2\pi}\partial\omega\int_0^{r}\partial r.r^3 = \mathfrak{M}_{z\,0}^{(z)} = Pp$$

und gibt für den Coeffizienten k den Werth:

$$k = \frac{2Pp}{\varepsilon_1\int_0^{2\pi}\partial\omega\int_0^{r}\partial r.r^3} = \frac{2Pp}{\varepsilon_1\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.(x^2+y^2)} \;, \qquad \text{(a.}$$

worin $r = f(\omega)$ oder $y = f(x)$ und $y_0 = f_0(x)$ die Gleichungen der Begrenzung eines zur Achse des Stabes normalen Schnittes vorstellen. Wir haben aber auch noch die Bedingungen:

$$\mathfrak{X}_x^{(z)} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, S_y = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\partial \tau}{\partial z} \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, y = 0 \;,$$

$$\mathfrak{X}_y^{(z)} = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, S_x = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \frac{\partial \tau}{\partial z} \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \,.\, x = 0 \;,$$

und diese beiden Bedingungen sprechen aus, daß die Drehungsachse oder z-Achse mit der Verbindungslinie der Schwerpunkte aller zur z-Achse normalen Schnittflächen zusammenfallen muß.

Für einen cylindrischen Stab insbesondere, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser R ist, hat man als Begrenzungsgleichung: $r = R$ und daher

$$k = \frac{4Pp}{\pi \varepsilon_1 R^4} \;, \qquad Pp = \frac{1}{4}\varepsilon_1 \pi R^4 \frac{\tau}{z} \;;$$

für einen Stab mit quadratischem Querschnitte dagegen ergibt sich, wenn a die Seite dieses Querschnittes ist, $x = y = \frac{1}{2}a$, $x_0 = y_0 = -\frac{1}{2}a$, und

$$k = \frac{12Pp}{\varepsilon_1 a^4} \;, \qquad Pp = \frac{1}{12}\varepsilon_1 a^4 \frac{\tau}{z} \;.$$

Bezeichnen wir noch unsern Coeffizienten $\frac{1}{2}\varepsilon_1$ als Torsionscoeffizienten mit T, und setzen wir die Länge L des Stabes für z und den Drehungs-Winkel ϑ am Ende desselben für den veränderlichen τ, so ergeben sich für unsere beiden Stäbe die Beziehungen:

$$Pp = \frac{1}{2} T \pi R^4 \frac{\vartheta}{L} \;, \qquad Pp = \frac{1}{6} T a^4 \frac{\vartheta}{L} \;,$$

welche in Uebereinstimmung mit der Erfahrung aussprechen, daß für dasselbe Moment Pp die Drehungswinkel zweier cylindrischer oder zweier quadratischer Stäbe von gleichem Stoffe im geraden Verhältnisse ihrer Längen und im umgekehrten der vierten Potenzen ihrer Durchmesser oder Dicken stehen.

Die vorhergehende Untersuchung kann jedoch nur als eine erste Annäherung betrachtet werden, da sie nicht nur voraussetzt, daß τ immer sehr klein bleibt, was an dem untern Ende eines dünnen Stabes von einiger Länge nicht nothwendig der Fall ist, sondern überhaupt nicht ganz mit der Natur der Sache in Uebereinstimmung steht. Denn die Annahme:

$$\mathfrak{x} = -\tau y \qquad , \qquad \mathfrak{y} = \tau x$$

gibt für die ursprüngliche Lage eines Punktes die Coordinaten:

$$x^{(0)} = x - \mathfrak{x} = x + \tau y \quad , \quad y^{(0)} = y - \mathfrak{y} = y - \tau x$$

und für seinen ursprünglichen Abstand $r^{(0)}$ von der Achse

$$r^{(0)} = \sqrt{x^{(0)2} + y^{(0)2}} = \sqrt{(x^2+y^2)(1+\tau^2)} = r\sqrt{1+\tau^2} = r\sqrt{1+k^2 z^2} \; ;$$

der Stab kann also darnach strenggenommen vor der Drehung nicht cylindrisch oder prismatisch gewesen sein, sondern müßte an demjenigen Ende, wo $\tau = 0$ ist oder wo die z anfangen, einen etwas schwächeren Durchmesser gehabt haben, als an dem entgegengesetzten, während es einleuchtet, daß es für die Sache selbst ganz gleichgültig sein muß, an welchem Ende man den Anfangspunkt der z annimmt, daß dieser sowohl in der befestigten als in der freien Grundfläche des Stabes angenommen werden kann, da an beiden dieselben drehenden Kräfte wirken.

Ich werde übrigens hier nicht weiter auf diese Untersuchung eingehen, da wir dieselbe im nächsten Bande doch wieder aufnehmen müssen, und bemerke nur noch, daß sich nach dem Vorhergehenden für die Coeffizienten E_1 und T der Längendehnung und der Drehung eines prismatischen Stabes das Verhältniß:

$$E_1 : T = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} : \frac{1}{2}\varepsilon_1 = \frac{2\varepsilon_1 + 6\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} : 1$$

ergibt; für die Annahmen: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ und $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ gehen daraus die Beziehungen:

$$T = \tfrac{3}{8} E_1 \quad \text{und} \quad T = \tfrac{2}{5} E_1$$

hervor, welche übrigens zu wenig verschieden sind, um aus den durch die Erfahrung gegebenen Werthen von T und E_1 auf das Verhältniß von ε_1 zu ε_2 zurückschließen zu können.

§. 90.

Die in den vorhergehenden §§. gegebenen Auflösungen der einfachsten Fälle, welche sich für die Untersuchung des innern Gleichgewichtszustandes elastischer Körper darbieten, wurden mit den möglichst einfachen, dem Zustande des Körpers muthmaßlich entsprechenden Functionen für die innern Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ oder die innern Spannungen T_x, T_y, S_z, u. s. f. durchgeführt; es wurde aber einerseits dabei schon bemerkt, daß diese Functionen dem betreffenden Zustande

des elastischen Stabes nicht vollkommen entsprechen, und anderseits wird man sich bald überzeugen, daß es nicht leicht ist, besser entsprechende Functionen aufzufinden, da diese Functionen den Gleichungen (137) und den Gleichungen (139) gleichzeitig genügen müssen, und weil auch die Verbindung dieser Gleichungen durch Elimination der Spannungen nicht besser zum Ziele führt. Die aus der ebengenannten Elimination hervorgehenden Gleichungen können aber dazu dienen, allgemein bezeichnende Eigenschaften der Functionen kennen zu lehren, welche zur Auflösung der den innern Gleichgewichtszustand elastischer Körper betreffenden Aufgaben tauglich sind.

Nehmen wir nämlich die Aenderungsgesetze der Werthe (139), um sie in die Gleichungen (137) einzuführen, so finden wir

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} + \varepsilon_2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right) - \varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\right)}{\partial x} - \varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right)$$

$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right)$$

oder

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2}\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\partial z}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_1\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\partial z}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon_1\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right);$$

ferner wird

$$\frac{\partial S_z}{\partial y} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x\,\partial y}\right), \quad \frac{\partial S_y}{\partial z} = \frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x\,\partial z}\right),$$

u. s. f.,

und man kann damit die Gleichungen (137) entweder unter die Form:

$$\left.\begin{aligned}
(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial x\partial z}\right)+qX=0\\
(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial y\partial z}\right)+qY=0\\
(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x\partial z}\right)+\frac{1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial y\partial z}\right)+qZ=0
\end{aligned}\right\}\quad(149.$$

bringen oder unter die Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial x}+\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}\right)+qX=0\\
\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial y}+\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial z^2}\right)+qY=0\\
\frac{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}{2}\,\frac{\partial\varrho}{\partial z}+\frac{\varepsilon_1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial z^2}\right)+qZ=0
\end{aligned}\right\}\quad(150.$$

Differenzirt man nun die drei Gleichungen (149) der Reihe nach in Bezug auf x, y und z und bildet die Summe der sich ergebenden theilweisen Aenderungsgesetze, so erhält man die neue Gleichung:

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)+q\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0,\quad(151.$$

welche in zwei sehr allgemeinen Fällen auf die einfache bezeichnende Eigenschaft:

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}=0\qquad(152.$$

zurückkommt, nämlich 1) in dem Falle, wo X, Y und Z Null sind, und 2) in dem Falle, wo diese Componenten durch die theilweisen Aenderungsgesetze einer Function V ausgedrückt erscheinen, welche die ähnliche Eigenschaft:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0\qquad(V.$$

besitzt. Dieß findet z. B. statt, wenn X, Y und Z die Componenten einer Kraft R vorstellen, welche dem Quadrate der Entfernung des

Punktes xyz von einem festen Punkte verkehrt proportional ist, so daß man hat

$$qR = G\mu q \frac{1}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} = G\mu q \frac{1}{w^2},$$

wenn mit w die genannte Entfernung, mit a, b, c die Coordinaten des festen Punktes, mit μ dessen Masse oder Dichte und mit G ein constanter Coefficient bezeichnet wird. Denn man hat dann (II. Buch, §. 99)

$$qX = G\mu q \frac{a-x}{w^3}, \quad qY = G\mu q \frac{b-y}{w^3}, \quad qZ = G\mu q \frac{c-z}{w^3},$$

$$= -qR\frac{\delta w}{\delta x}, \quad = -qR\frac{\delta w}{\delta y}, \quad = -qR\frac{\delta w}{\delta z},$$

$$= q\frac{\delta V}{\delta x}, \quad = q\frac{\delta V}{\delta y}, \quad = q\frac{\delta V}{\delta z},$$

wo nun der Ausdruck:

$$-G\mu\frac{1}{w} = -G\mu\frac{1}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}}$$

durch V ersetzt ist; es wird darnach

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} = G\mu\left(\frac{3(a-x)^2}{w^5} - \frac{1}{w^3}\right),$$

u. s. f.

und folglich erhält man als Summe dieser Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0.$$

Diese Eigenschaft wird aber allgemein statthaben, sobald X, Y und Z so von drei neuen Veränderlichen $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{Z}$ abhängen, daß man hat

$$X = \frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta \boldsymbol{Y}}{\delta z} - \frac{\delta \boldsymbol{Z}}{\delta y}, \quad Y = \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta \boldsymbol{Z}}{\delta x} - \frac{\delta \boldsymbol{X}}{\delta z}, \quad Z = \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta \boldsymbol{X}}{\delta y} - \frac{\delta \boldsymbol{Y}}{\delta x}.$$

Bezeichnen wir ferner die eingeklammerten Glieder der Gleichungen (150) mit U_x, U_y, U_z, so daß

$$\frac{\delta^2 \mathfrak{X}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{X}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{X}}{\delta z^2} = U_x, \quad \frac{\delta^2 \mathfrak{Y}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{Y}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \mathfrak{Y}}{\delta z^2} = U_y, \text{ u. s. f.}$$

so nehmen diese Gleichungen unter der vorhergehenden Voraussetzung in Betreff der Componenten X, Y und Z die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{\varepsilon_1}{2} U_x + q\frac{\partial V}{\partial x} = 0\,, \\ \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \frac{\varepsilon_1}{2} U_y + q\frac{\partial V}{\partial y} = 0\,, \\ \frac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\varepsilon_1}{2} U_z + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (153.$$

Differenzirt man dann diese Gleichungen wieder der Reihe nach in Bezug auf x, y und z und nimmt die Summe der Aenderungsgesetze, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Gleichungen (152) und (V) die Eigenschaft:

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0\,. \qquad (154.$$

Differenzirt man dagegen jede der Gleichungen (153) zweimal nacheinander in Bezug auf x, y und z und nimmt für jede der genannten Gleichungen die Summe dieser drei Aenderungsgesetze zweiter Ordnung, so folgt mit der Beachtung, daß

$$\frac{\partial^3 \varrho}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \varrho}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varrho}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z^2}\right)}{\partial x} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 V}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)}{\partial x} = 0\,,$$

u. s. f.

für U_x, U_y und U_z die bezeichnende Eigenschaft:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} = 0\,, \\ \frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = 0\,. \end{aligned}\right\} \qquad (155^a.$$

Wenn demnach die Componenten X, Y, Z Null oder die theilweisen Aenderungsgesetze einer Function V von der Eigenschaft (V)

sind, so müssen auch die Functionen U_x, U_y, U_z und die Volumenänderung ϱ diese Eigenschaft (V) besitzen, wenn den Bedingungen für das innere Gleichgewicht Genüge geleistet werden soll. Für die Verschiebungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ selbst ergibt sich darnach unter denselben Voraussetzungen für X, Y und Z als allgemeinste Eigenschaft die Bedingung:

155b.)
$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}\right)}{\partial z^2}=0\,,\quad \text{u. s. f.}$$

oder entwickelt

$$\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial x^2\partial z^2}+2\frac{\partial^4\mathfrak{x}}{\partial y^2\partial z^2}=0$$

u. s. f.

welche aber jedenfalls noch mit der Bedingung (154) zu verbinden ist, da die Functionen für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ nicht unabhängig von einander gewählt werden dürfen.

Die eben entwickelte Eigenschaft ist viel zu allgemein, als daß die entsprechenden Functionen in einer Form zusammengefaßt werden könnten; es gibt jedoch eine Klasse solcher Functionen, welche sich zunächst durch die Untersuchung der Bewegung darbieten und welche die allgemeine Auflösung zu enthalten scheinen. Bezeichnet man nämlich durch $\varphi_1(k_1 x)$, $\varphi_2(k_2 y)$, $\varphi_3(k_3 z)$ solche Functionen, wie in §. 84 angeführt wurden, welche nämlich die Eigenschaft:

$$\varphi''(u) = \pm\,\varphi(u)$$

besitzen, nimmt für $F(x, y, z)$ eine der Formen:

$A\,\varphi_1(k_1 x)\,\varphi_2(k_2 y)\,\varphi_3(k_3 z)$, $A\,\varphi_1(k_1 x)\,\varphi_2(k_2 y + k_3 z)$,
$A\,\varphi_1(k_1 x + k_2 y)\,\varphi_3(k_3 z)$, $A\,\varphi_1(k_1 x + k_2 y + k_3 z)$, u. s. f.

und setzt dann

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial F}{\partial x}\,,\quad \mathfrak{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\,,\quad \mathfrak{z} = \frac{\partial F}{\partial z}\,,$$

so hat man

$$U_x = M(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{\partial F}{\partial x}, \quad U_y = M(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$U_z = M(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \frac{\partial F}{\partial z},$$

folglich $U_x = U_y = U_z = 0$, wenn $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ ist, und

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = N(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^2 F = 0.$$

Es muß also $k_1^2 = -(k_2^2 + k_3^2)$ oder $k_1^2 + k_2^2 = -k_3^2$, u. s. f. sein, d. h. es muß entweder einer der drei Coeffizienten k reell und zwei imaginär sein, oder zwei reell und einer imaginär; man muß also für die Function φ die allgemeine Form:

$$m\left[\left(e^{+i}\right)^{kx} \pm \left(e^{-i}\right)^{kx}\right]$$

wählen und darin $i = 1$ setzen für reelle k, $i = \sqrt{-1}$ für imaginäre k, so daß man z. B. hat

$$F(x, y, z) = A \sin k_1 x \left(e^{k_2 y} + e^{-k_2 y}\right)\left(e^{k_3 z} - e^{-k_3 z}\right),$$

$$k_2^2 + k_3^2 = k_1^2.$$

Die Eigenschaft: $U_x = 0$ ist aber nur ein besonderer Fall der Eigenschaft (155); um dieser letztern zu genügen, ohne daß $U_x = 0$ wird, kann man für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Formen:

$$\mathfrak{x} = (Ax + By + Cz + Dh) \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mathfrak{y} = (Ax + By + Cz + Dh) \frac{\partial F}{\partial y},$$
u. s. f.

wählen; denn man erhält damit und mit der Bedingung: $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$

$$U_x = 2A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2C\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, \quad U_y = 2A\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + 2B\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2C\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z},$$

$$U_z = 2A\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + 2B\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + 2C\frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

und man wird leicht einsehen, daß mit derselben Bedingung: $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ die daraus folgenden Ausdrücke für

$$\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}, \text{ u. s. f.}$$

Null werden müssen, und daß gleichzeitig der Bedingung (154) genügt wird.

Beachtet man endlich, daß man für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ beliebig viele solcher Glieder, wie die eben angedeuteten nehmen kann, so wird man die Werthe:

$$156.)\begin{cases}\mathfrak{x}=\Sigma.(Ax+By+Cz+Dh)\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \mathfrak{y}=\Sigma.(Ax+By+Cz+Dh)\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \mathfrak{z}=\Sigma.(Ax+By+Cz+Dh)\frac{\partial F}{\partial z}\end{cases}$$

als eine allgemeine Auflösung der Gleichungen (150) annehmen können. Die Untersuchung besonderer Fälle mit Hülfe dieser Auflösungen muß indessen einer besondern Bearbeitung der Formänderung elastischer Körper vorbehalten bleiben, und deßhalb einstweilen auf das in der Anmerkung zu §. 76 genannte Werk von Lamé verwiesen werden.

§. 91.

Nehmen wir endlich die im vorhergehenden §. abgeleiteten Aenderungsgesetze der Werthe (139), um sie in die Bewegungsgleichungen (138) einzuführen, und ersetzen wir darin wie früher $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{q}$ durch a^2, ferner $\frac{\varepsilon_1}{2q}$ durch b^2, so nehmen die Gleichungen (138) für die kleinen innern Bewegungen eines elastischen Körpers die Form:

$$157.)\begin{cases}\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}=X+a^2\frac{\partial\varrho}{\partial x}+b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] \\ \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}=Y+a^2\frac{\partial\varrho}{\partial y}+b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\right)}{\partial x}\right] \\ \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}=Z+a^2\frac{\partial\varrho}{\partial z}+b^2\left[\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\right)}{\partial y}\right]\end{cases}$$

an, welche wieder mit der Form der Gleichungen (133ᵃ) übereinstimmt, wenn man von den äußern geometrischen Kräften X, Y, Z Umgang nimmt.

Diese Gleichungen zeigen, daß man drei verschiedene Arten von innern Bewegungen eines elastischen Körpers unterscheiden kann, nämlich 1) solche, welche nur von den mit a^2 multiplizirten Gliedern abhängen, 2) solche, welche nur von den mit b^2 multiplizirten, und 3) solche, welche von den mit beiden Coeffizienten a und b behafteten Gliedern zugleich abhängen; die beiden ersten Arten wird man als einfache innere Bewegungen bezeichnen können, die dritte Art dagegen wird die zusammengesetzten inneren Bewegungen umfassen.

Wenn die innere Bewegung nur von den mit dem Coeffizienten a behafteten Gliedern abhängen soll, so müssen die Factoren von b^2 für die ganze Dauer der Bewegung Null sein; es müssen also unabhängig von t die Bedingungen:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

erfüllt werden, worin

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} \text{ durch } w, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} \text{ durch } v,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} \text{ durch } u$$

ersetzt ist. Mit diesen Bedingungen, welche aussprechen, daß u, v, und w als die partiellen Aenderungsgesetze einer Function: $\psi(x, y, z, t)$ in Bezug auf x, y und z betrachtet werden können, so daß man hat

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

kommen die Gleichungen (149) zunächst auf die einfachen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2} = X + a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial x}, \quad \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2} = Y + a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \\ \frac{d^2 \mathfrak{z}}{dt^2} = Z + a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial z} \end{array}\right\} \quad (158.$$

zurück; aus diesen ergeben sich dann die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta . \frac{d^2 \mathfrak{x}}{dt^2}}{\delta y} = \frac{d^2 . \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y}}{dt^2} = \frac{\delta X}{\delta y} + a^2 \frac{\delta^2 \varrho}{\delta x \delta y},$$

$$\frac{\delta . \frac{d^2 \mathfrak{y}}{dt^2}}{\delta x} = \frac{d^2 . \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}}{dt^2} = \frac{\delta Y}{\delta x} + a^2 \frac{\delta^2 \varrho}{\delta x \delta y},$$

u. s. f.

und damit erhält man die Beziehungen:

$$\frac{d^2 . \left(\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y} - \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}\right)}{dt^2} = \frac{d^2 . \frac{\delta \psi}{\delta z}}{dt^2} = \frac{\delta X}{\delta y} - \frac{\delta Y}{\delta x},$$

$$\frac{d^2 . \frac{\delta \psi}{\delta y}}{dt^2} = \frac{\delta Z}{\delta x} - \frac{\delta X}{\delta z}, \qquad \frac{d^2 . \frac{\delta \psi}{\delta x}}{dt^2} = \frac{\delta Y}{\delta z} - \frac{\delta Z}{\delta y},$$

welche mit der Beachtung, daß die Kräfte X, Y, Z immer als Functionen der Coordinaten x, y, z ausgedrückt werden können, zeigen, daß für die Voraussetzung, aus welcher die Gleichungen (150) hervorgegangen sind, die zweiten Aenderungsgesetze von $\frac{\delta \psi}{\delta x}$, $\frac{\delta \psi}{\delta y}$ und $\frac{\delta \psi}{\delta z}$ in Bezug auf t von dieser Veränderlichen unabhängig werden müssen. Dieß ist aber nur möglich, entweder wenn diese Functionen, also auch ψ selbst und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ von t unabhängig sind, was in unserm Falle nicht stattfinden kann, oder wenn diese Functionen eine der Formen:

$$t \varphi (x, y, z), \qquad t^2 \varphi (x, y, z)$$

haben, was wieder nicht stattfinden kann, weil dann auch die immer als sehr klein vorausgesetzten und daher periodischen Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ähnliche Functionen von t sein und mit t unbegrenzt wachsen müßten. Es bleibt daher als die einzig mögliche Bedingung für unsere Voraussetzung nur $\frac{\delta \psi}{\delta x} = \frac{\delta \psi}{\delta y} = \frac{\delta \psi}{\delta z} = 0$ übrig, aus welcher die Gleichungen:

$$\frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta y} = \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}, \quad \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta x} = \frac{\delta \mathfrak{x}}{\delta z}, \quad \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta z} = \frac{\delta \mathfrak{z}}{\delta y}$$

oder für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Formeln:

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial F}{\partial x}\,, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial F}{\partial y}\,, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial F}{\partial z}\,, \tag{159}$$

worin F wieder eine Function von x, y, z und t vorstellt, hervorgehen. Man zieht daraus aber auch die Werthe:

$$\varrho = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,, \quad \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \frac{\partial F}{\partial x}}{dt^2} = \frac{\partial . \frac{d^2 F}{dt^2}}{\partial x}\,, \text{ u. s. f.,}$$

und wenn diese in die Gleichungen (158) eingeführt und die daraus folgenden Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ multiplizirt werden, so gibt die Summe der Producte die neue Gleichung:

$$\frac{\partial . \frac{d^2 F}{dt^2}}{\partial s} = X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s} + a^2 \frac{\partial \varrho}{\partial s}\,,$$

deren Integral in Bezug auf die willkürliche Veränderliche s, nämlich

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = \int \partial s . \left(X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s}\right) + a^2 \varrho\,, \tag{160}$$

in Verbindung mit den Gleichungen (159) die Gleichungen (158) ersetzt und für den angenommenen Fall die Untersuchung der Bewegung auf die Auflösung einer einzigen Gleichung mit partiellen Aenderungsgesetzen zweiter Ordnung zurückführt, vorausgesetzt, daß die Function: $X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s}$ das vollständige Aenderungsgesetz einer Function von x, y, z, also in Bezug auf jede Veränderliche s, von welcher x, y, z auf beliebige Weise abhängig gedacht werden, integrirbar ist, und das wird immer der Fall sein, wenn die Componenten X, Y, Z die im vorigen §. erörterte Eigenschaft besitzen, so daß man hat

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}\,, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}\,, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}\,.$$

In dieser Voraussetzung wird

$$\int \partial s . \left(X \frac{\partial x}{\partial s} + Y \frac{\partial y}{\partial s} + Z \frac{\partial z}{\partial s}\right) = V\,,$$

und die vorhergehende Gleichung (160) nimmt die Form an:

$$160^a.)\quad \frac{d^2F}{dt^2} = V + a^2\left(\frac{\delta^2F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2F}{\delta y^2} + \frac{\delta^2F}{\delta z^2}\right).$$

Nimmt man von äußern geometrischen Kräften Umgang, also $X = Y = Z = 0$, so hat man einfacher

$$161.)\quad \frac{d^2F}{dt^2} = a^2\left(\frac{\delta^2F}{\delta x^2} + \frac{\delta^2F}{\delta y^2} + \frac{\delta^2F}{\delta z^2}\right),$$

und dieser Gleichung wird man durch ähnliche Functionen von den vier Veränderlichen x, y, z und t Genüge leisten, wie sie für die Gleichung (134^b) in §. 84 in Bezug auf die drei Veränderlichen x, y und t dargestellt wurden, d. h. man kann für $F(x, y, z, t)$ entweder die Form:

$$F(x, y, z, t) = \Sigma . f\left(k_1 x + k_2 y + k_3 z \pm at\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\right)$$

nehmen, worin die mit f bezeichnete Function ohne Rücksicht auf weitere Bedingungen für den anfänglichen Zustand und die an den Begrenzungsflächen stattfindenden Verhältnisse jede beliebige seyn kann, oder eine der Formen:

$$F(x, y, z, t) = \Sigma . \varphi_1(k_1 x + k_2 y + k_3 z)\,\varphi_2\left(at\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\right),$$

$$F(x, y, z, t) = \Sigma . \varphi_1(k_1 x)\,\varphi_2(k_2 y)\,\varphi_3(k_3 z)\,\varphi_4\left(at\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\right),$$

u. s. f.,

worin aber die Functionen φ_1, φ_2, etc. wieder der Bedingung unterworfen sind, daß man hat $\varphi''(u) = \pm\varphi(u)$, wenn $\varphi''(u)$ das Aenderungsgesetz zweiter Ordnung der Function $\varphi(u)$ in Bezug auf u bezeichnet, und die k entsprechend reell oder imaginär genommen werden, wie es im vorhergehenden §. mit Rücksicht auf die allgemeine Form jener Functionen angedeutet worden ist.

Die Gleichung (160^a) dagegen wird durch eine Function F von der Form:

$$F(x, y, z, t) = \Sigma . \varphi_1(k_1 x + k_2 y + k_3 z \pm k\,at) - \Sigma . \psi(x, y, z)$$

befriedigt, worin $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$ ist, und ψ eine ähnliche Function wie φ bezeichnet, für welche man also hat

$$\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\psi}{\delta z^2}=h^2\psi$$

und

$$X=a^2\,\Sigma.h^2\frac{\delta\psi}{\delta x},\quad Y=a^2\,\Sigma.h^2\frac{\delta\psi}{\delta y},\quad Z=a^2\,\Sigma.h^2\frac{\delta\psi}{\delta z}.$$

Die Wahl der Function F ist aber im Allgemeinen noch durch die Bedingung beschränkt, daß die aus ihr hervorgehenden Werthe für die innern Spannungen, nämlich

$$T_x=\varepsilon_1\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}+\varepsilon_2\left(\frac{\delta^2 F}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 F}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 F}{\delta z^2}\right),$$

$$S_z=\varepsilon_1\frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta y},\quad S_y=\varepsilon_1\frac{\delta^2 F}{\delta x\,\delta z},\quad \text{u. s. f.}$$

auch den an den Begrenzungsflächen des Körpers stattfindenden physischen Verhältnissen entsprechen müssen. Diese Spannungsverhältnisse werden demnach in gegebenen Fällen noch besondere Bedingungsgleichungen für die Wahl der Function F feststellen.

Differenzirt man endlich die Gleichungen (157) der Reihe nach in Bezug auf x, y und z, nimmt die Summe der sich ergebenden Aenderungsgesetze und beachtet, daß man hat

$$\frac{\delta\,\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}}{\delta x}+\frac{\delta\,\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}}{\delta y}+\frac{\delta\,\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}}{\delta z}=\frac{d^2.\left(\frac{\delta\mathfrak{x}}{\delta x}+\frac{\delta\mathfrak{y}}{\delta y}+\frac{\delta\mathfrak{z}}{\delta z}\right)}{dt^2}=\frac{d^2\varrho}{dt^2},$$

so folgt die Gleichung:

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2}=a^2\left(\frac{\delta^2\varrho}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\varrho}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\varrho}{\delta z^2}\right)+\frac{\delta X}{\delta x}+\frac{\delta Y}{\delta y}+\frac{\delta Z}{\delta z},\quad (162.$$

welche zeigt, daß die Volumenänderung ϱ selbst eine ähnliche Function wie F ist, und daß sie wie diese nur von dem Coeffizienten a^2 abhängt. In den Fällen, wo X, Y, Z Null sind oder solche Functionen, wie in §. 90 angegeben wurde, daß man hat

$$X=\frac{\delta V}{\delta x},\quad Y=\frac{\delta V}{\delta y},\quad Z=\frac{\delta V}{\delta z}\quad\text{und}\quad\frac{\delta^2 V}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta y^2}+\frac{\delta^2 V}{\delta z^2}=0,$$

kommt die vorhergehende Gleichung auf

162[a].) $$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)$$

zurück, wird also der Form nach ganz übereinstimmend mit (161).

§. 92.

Nehmen wir z. B. einen beliebig begrenzten Körper, dessen äußere Begrenzungsfläche ganz frei sei, so daß alle Punkte derselben beliebige Schwingungen machen können, und lassen wir die Spannungsverhältnisse an den Begrenzungsflächen einstweilen noch unberücksichtigt, so werden wir den Bedingungen des vorhergehenden §. durch die Function:

A.) $$F(x, y, z, t) = A\,\sin\left(k_1 x + k_2 y + k_3 z \pm at\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}\right)$$

genügen, welche offenbar den einfachsten Bewegungszustand darstellt. Setzen wir darin $k_1 = k\cos\alpha$, $k_2 = k\cos\beta$, $k_3 = k\cos\gamma$, worin α, β, γ die Winkel irgend einer Richtung oder Geraden mit den drei Coordinaten-Achsen vorstellen, also die Bedingungsgleichung: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ befriedigen, und nehmen wir das untere Zeichen, so ergeben sich für die augenblicklichen, zu denselben Achsen parallelen Ausweichungen eines Punktes xyz aus seiner Gleichgewichtslage die Werthe:

B.) $$\begin{cases} \mathfrak{x} = \dfrac{\partial F}{\partial x} = Ak\cos\alpha\cos k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at), \\ \mathfrak{y} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = Ak\cos\beta\cos k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at), \\ \mathfrak{z} = \dfrac{\partial F}{\partial z} = Ak\cos\gamma\cos k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at), \end{cases}$$

und für die Componenten der Oscillationsgeschwindigkeit hat man

C.) $$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = aAk^2\cos\alpha\sin k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at), \\ \dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = aAk^2\cos\beta\sin k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at), \\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{dt} = aAk^2\cos\gamma\sin k(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - at). \end{cases}$$

Bezeichnet man ferner die radiale Ausweichung $\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}$ eines Punktes aus seiner Gleichgewichtslage mit $\mathfrak{r}$ und seine augenblickliche Oscillationsgeschwindigkeit $\sqrt{\left(\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2}$ mit $\mathfrak{v}$, und ersetzt noch den Factor $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$ durch u, so daß u die senkrechte Entfernung einer durch xyz gelegten und auf der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung normalen Ebene vom Anfangspunkte vorstellt, so hat man

$$\left.\begin{array}{lll} \mathfrak{r} = Ak\cos k(u-at)\ , & \mathfrak{v} = aAk^2 \sin k(u-at)\ , & \\ \mathfrak{x} = \mathfrak{r}\cos\alpha\ , & \mathfrak{y} = \mathfrak{r}\cos\beta\ , & \mathfrak{z} = \mathfrak{r}\cos\gamma\ , \\ \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = \mathfrak{v}\cos\alpha\ , & \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = \mathfrak{v}\cos\beta\ , & \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = \mathfrak{v}\cos\gamma\ . \end{array}\right\} \text{(D.)}$$

Man schließt daraus, daß, wenn der Bewegungszustand des Körpers durch diese Gleichungen ausgedrückt wird, alle Punkte desselben in oscillirender Bewegung begriffen sind, und zwar so, daß alle in parallelen Geraden schwingen, welche die Winkel α, β und γ mit den drei Coordinaten-Achsen bilden, daß alle dieselbe größte Ausweichung $\mathfrak{R} = \pm Ak$ aus ihrer Gleichgewichtslage erreichen, wenn $k(u-at) = i\pi$ wird, und alle dieselbe größte Oscillationsgeschwindigkeit $\mathfrak{V} = aAk^2$ beim Durchgange durch ihre Gleichgewichtslage erhalten, wenn $k(u-at) = \frac{1}{2}i\pi$, also $\mathfrak{r} = 0$ ist; endlich daß alle Punkte, welche in derselben zur Oscillationsrichtung senkrechten Ebene liegen, gleichzeitig schwingen, und daher *ebene Wellenflächen* in dem Körper gebildet werden, daß aber die Zustände oder *Phasen* der Oscillationen in zwei auf einander folgenden Ebenen, deren Abstände vom Anfangspunkte u_1 und u_2 sind, im Allgemeinen nicht übereinstimmen, indem z. B. die Punkte der zweiten Ebene später durch ihre Gleichgewichtslage gehen oder ihre größte Ausweichung erreichen, als die der ersten, und die Gleichung:

$$u = \frac{i\pi}{k} + at$$

zeigt, daß die Entfernung u der Ebenen, welche nach und nach die größte Ausweichung aus der Gleichgewichtslage erreicht haben, der Zeit proportional wächst, oder daß sich diese größte und, wie sie, jede andere bestimmte Ausweichung von einer Ebene zur folgenden mit einer con-

stanten Geschwindigkeit a fortpflanzt. Es schreiten demnach die Wellen in der Richtung der Oscillation selbst fort, und die Oscillationen der einzelnen Punkte sind normal zur Wellenfläche gerichtet.

Derselbe Punkt oder die Punkte derselben Ebene:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = u$$

kehren in denselben Zustand, in welchem sie sich am Ende der Zeit t befanden, nach einer Zeit t, zurück, für welche man hat

$$k(u-at) = 2\pi + k(u-at_{,}) ;$$

es ergibt sich daraus für die Dauer $\mathfrak{t} = t_{,}-t$ einer ganzen Schwingung der Werth:

$$\text{E.)} \qquad \mathfrak{t} = \frac{2\pi}{ka} .$$

In demselben Augenblicke dagegen oder für denselben Werth von t werden die Punkte zweier Ebenen:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = u \quad \text{und} \quad x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = u_{,}$$

sich in demselben Zustande oder in derselben Phase der Oscillation befinden, wenn

$$k(u_{,}-at) = 2\pi + k(u-at) \quad \text{oder} \quad ku_{,} = 2\pi + ku ;$$

der Abstand $u_{,}-u$ dieser beiden Ebenen oder Wellenflächen wird die Wellenlänge genannt; bezeichnen wir sie mit λ, so ist mit Berücksichtigung des Werthes von $\mathfrak{t}$ und, wenn noch $\mathfrak{n}$ die Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit ist,

$$\text{F.)} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = a\mathfrak{t} , \quad \mathfrak{t} = \frac{\lambda}{a} , \quad \mathfrak{n} = \frac{a}{\lambda} .$$

Die Wellenlänge ist also gleich dem Wege, welchen ein materieller Punkt mit der constanten Geschwindigkeit a in der Zeit $\mathfrak{t}$ oder während einer Schwingungsdauer zurücklegt; sie ist also auch gleich der Entfernung, bis zu welcher sich ein bestimmter Zustand der oscillirenden Bewegung während einer Schwingungsdauer fortpflanzt; der Coeffizient $a = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}}$ bedeutet die constante Fortpflanzungsgeschwindigkeit der oscillirenden

den Bewegung und drückt, auf Längeneinheiten bezogen, die Fortpflanzungsweite für die Zeiteinheit aus, d. h. den Weg, welchen die oscillirende Bewegung in der Zeiteinheit durchläuft.

Führt man dann die Werthe von k aus (E) und (F) in die Gleichungen (D) ein und ersetzt die Coeffizienten Ak und a Ak² durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so nehmen diese die Form an:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A} \cos 2\pi \left(\frac{u}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}}\right), \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{B} \sin 2\pi \left(\frac{u}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}}\right); \quad \text{(G.}$$

man hat zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{A}}{\lambda} = \frac{\mathfrak{B}}{2\pi a},$$

welche ausspricht, daß sich die größte Ausweichung zur Wellenlänge verhält, wie die größte Vibrationsgeschwindigkeit zur 2πfachen Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und die Gleichungen (G) geben, verglichen mit den Gleichungen der Oscillationsbewegung eines materiellen Punktes in den §§. 52, 82 und 83 des ersten Buches, den Ausdruck:

$$m\beta^2 = q\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2} = 4\pi^2 q \frac{a^2}{\lambda^2} = 4\pi^2 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\lambda^2}$$

für die Größe der bewegenden Kraft in der Einheit der Entfernung von der Gleichgewichtslage.

Wählen wir ferner für die Function F den Ausdruck:

$$F(x, y, z, t) = -A \cos (k_1 x + k_2 y + k_3 z) \cos at\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$$
$$= -A \cos k\,(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) \cos kat,$$

welcher ebenfalls der Gleichung (153) genügt, und setzen wir wieder

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = u,$$

so ergeben sich für die Ausweichungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{r}$ eines Punktes aus seiner Gleichgewichtslage die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} = Ak \cos\alpha \sin ku \cos kat, \quad \mathfrak{y} = Ak \cos\beta \sin ku \cos kat, \\ \mathfrak{z} = Ak \cos\gamma \sin ku \cos kat, \\ \mathfrak{r} = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2} = Ak \sin ku \cos kat, \end{aligned}\right\} \text{(H.}$$

und die Oscillationsgeschwindigkeit nebst ihren Componenten sind

$$\text{J.)}\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{x}}{dt} = -aAk^2 \cos\alpha \sin ku \sin kat\,, \quad \dfrac{d\mathfrak{y}}{dt} = -aAk^2 \cos\beta \sin ku \sin kat\,, \\ \dfrac{d\mathfrak{z}}{dt} = -aAk^2 \cos\gamma \sin ku \sin kat\,, \\ \mathfrak{v} = -\sqrt{\left(\dfrac{d\mathfrak{x}}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{y}}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\mathfrak{z}}{dt}\right)^2} = -aAk^2 \sin ku \sin kat\,. \end{cases}$$

Es oscilliren also wieder alle Punkte, welche in Bewegung begriffen sind, nach parallelen Richtungen, und alle, welche in derselben zu dieser Oscillationsrichtung normalen Ebene liegen, gleichzeitig; es sind nun aber nicht alle Punkte des Körpers in Bewegung begriffen, sondern in demselben mehrere Knoten-Ebenen vorhanden, in welchen keine Bewegung stattfindet; denn man hat $\mathfrak{r} = 0$ und $\mathfrak{v} = 0$ für jeden Werth von t, wenn $ku = i\pi$, und insbesondere, wenn $u = 0$ ist.

Wenn demnach der Bewegungszustand eines elastischen Körpers durch die Gleichungen (H) und (J) ausgedrückt wird, so sind in demselben stehende ebene Wellen vorhanden; die Oscillationen selbst sind aber noch normal zur Wellenfläche, und man kann diese Art der Oscillation als die bezeichnende Eigenschaft der durch die Gleichungen (150) dargestellten einfachen innern Bewegung aufstellen.

Der Werth von k hängt nun von dem anfänglichen Zustande der Bewegung ab und kann im Allgemeinen die Form: $\pi\,\dfrac{1}{l}$ annehmen, worin dann l die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Knoten-Ebenen bezeichnet; man erhält dadurch die Gleichungen:

$$\text{K.)}\quad \mathfrak{r} = \mathfrak{A} \sin\pi\frac{u}{l} \cos\pi\frac{at}{l}\,, \qquad \mathfrak{v} = -\mathfrak{B} \sin\pi\frac{u}{l} \sin\pi\frac{at}{l}\,,$$

worin wieder $\mathfrak{A}$ für Ak und $\mathfrak{B}$ für aAk^2 gesetzt ist, und welche zeigen, daß die Punkte derselben Ebene in denselben Zustand, in welchem sie am Ende der Zeit t waren, nach einer Zeit $t_,$ zurückkehren, für welche man hat

$$\pi\frac{at_,}{l} = 2\pi + \pi\frac{at}{l} \quad \text{oder} \quad t_, = t + \frac{2l}{a}\,,$$

daß also die Schwingungsdauer t durch das Verhältniß: $\dfrac{2l}{a}$ gemessen

wird. Man wird aber leicht bemerken, daß im jetzigen Falle nicht mehr alle Punkte dieselbe größte Ausweichung $\mathfrak{A}$ und dieselbe größte Oscillationsgeschwindigkeit $\mathfrak{V}$ erlangen, sondern nur die in der Mitte zwischen zwei Knoten-Ebenen liegenden, und daß diese Größen gegen die Knoten-Ebenen hin allmälig abnehmen; ferner daß die Punkte zweier Ebenen, welche gleich weit vom Anfangspunkte oder allgemein von irgend einer Knoten-Ebene entfernt sind, immer in entgegengesetztem Sinne schwingen, da $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{v}$ mit u das Zeichen wechseln; endlich wird man aus der Vergleichung der Schwingungsdauer im vorigen und im jetzigen Falle schließen, daß der Abstand l zweier Knoten-Ebenen einer halben Wellenlänge entspricht.

Um den innern Zustand des elastischen Körpers bei den beiden vorhergehenden Bewegungen noch weiter zu beleuchten, haben wir noch die Volumenänderung ϱ desselben und die innern Spannungsverhältnisse darzustellen.

Für die erste dieser Bewegungen ergibt sich aus den Gleichungen (B) mit Beachtung der darauf folgenden Gleichungen

$$\varrho_1 = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \frac{\mathfrak{V}}{a} \sin 2\pi \left(\frac{u}{\lambda} - \frac{t}{\mathfrak{t}}\right) = \frac{\mathfrak{v}}{a}; \quad \text{(L.}$$

bei dieser Bewegung ist daher die Volumenänderung durchaus der Oscillationsgeschwindigkeit proportional und wird durch das Verhältniß dieser Geschwindigkeit zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit a gemessen. In demselben Augenblicke findet in den auf einander folgenden Wellen-Ebenen stetig ab- und zunehmend abwechselnd Raumverminderung oder Verdichtung und Raumausdehnung oder Verdünnung statt, und das Maximum dieser Verdichtung oder Verdünnung ist da, wo die Punkte das Maximum der Oscillationsgeschwindigkeit besitzen, also in denjenigen Ebenen, deren Punkte gerade im Durchgange durch die Gleichgewichtslage begriffen sind; die größte Verdichtung tritt ein, wenn die Oscillationsgeschwindigkeit den größten negativen Werth hat, während die größte Verdünnung dem größten positiven Werthe von $\mathfrak{v}$ entspricht. Beide Volumenänderungen ändern aber mit der Zeit ihren Ort und schreiten gleichsam hintereinanderfolgend mit der Geschwindigkeit a fort, und gerade hierin besteht bei diesen zur Wellenfläche normalen Schwingungen die Aehnlichkeit mit der Wellenbewegung.

Für die zweite Bewegung mit stehenden Wellen ergibt sich aus den Gleichungen (H) mit Beachtung des Nachfolgenden

$$\varrho_2 = \frac{\mathfrak{V}}{a} \cos \pi \frac{u}{l} \cos \pi \frac{at}{l}; \quad \text{(M.}$$

hier findet also die größte Verdichtung und Verdünnung da statt, wo $\cos \pi \frac{u}{l} = \mp 1$ ist, also in den Knoten-Ebenen, während in der Mitte zwischen zwei solchen aufeinanderfolgenden Ebenen, wo $\cos \pi \frac{u}{l} = 0$ ist, die Dichte ungeändert bleibt. Auch ist leicht zu sehen, daß in demselben Augenblicke in den aufeinanderfolgenden Knoten-Ebenen, und mit der Zeit in derselben Knoten-Ebene Verdichtung und Verdünnung fortwährend abwechseln. Man hat z. B. für $t = 0$, in den beiden Ebenen $u = 0$ und $u = \pm 1$, $\varrho_2 = + \frac{\mathfrak{B}}{a}$ und $- \frac{\mathfrak{B}}{a}$, also im Anfangspunkte die größte Raumausdehnung, in den beiden zunächst liegenden Knoten-Ebenen die größte Verdichtung; für $t = \frac{l}{a}$ wird in denselben Ebenen $\varrho_2 = - \frac{\mathfrak{B}}{a}$ und $+ \frac{\mathfrak{B}}{a}$; es tritt nun im Anfangspunkte die größte Verdichtung, in den beiden andern Ebenen die größte Verdünnung ein, u. s. f.

Was endlich die innern Spannungen betrifft, so zieht man für die beiden vorher betrachteten Bewegungen sowohl aus den Gleichungen (B) wie aus den Gleichungen (H) die Werthe:

$$T_x = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \varepsilon_2 \varrho = (\varepsilon_1 \cos^2\alpha + \varepsilon_2)\varrho, \quad S_z = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right) = \varepsilon_1 \varrho \cos\alpha \cos\beta,$$

$$T_y = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \varepsilon_2 \varrho = (\varepsilon_1 \cos^2\beta + \varepsilon_2)\varrho, \quad S_y = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right) = \varepsilon_1 \varrho \cos\alpha \cos\gamma,$$

$$T_z = \varepsilon_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} + \varepsilon_2 \varrho = (\varepsilon_1 \cos^2\gamma + \varepsilon_2)\varrho, \quad S_x = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right) = \varepsilon_1 \varrho \cos\beta \cos\gamma.$$

Läßt man demnach die Achse der x mit der Oscillations-Richtung zusammenfallen, so daß man hat $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, so findet man

$$T_x = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varrho, \quad T_y = T_z = \varepsilon_2 \varrho, \quad S_z = S_y = S_x = 0,$$

und schließt daraus, daß sowohl für die Wellenflächen als für die dazu senkrechten Schnittebenen die verschiebenden Spannungscomponenten Null, daß also die Spannungen selbst normal zu diesen Ebenen sind; ferner sieht man, daß diese Spannungen in constanten Verhältnissen zur

Volumenänderung stehen, also nicht nur für die verschiedenen Wellenflächen, sondern auch für dieselbe Wellenfläche mit der Zeit veränderlich sind. Dieser Schluß läßt sich übrigens mittels der Gleichungen (b) in §. 85 und den vorhergehenden Werthen von T_x, T_y, S_z, u. s. f. leicht auch allgemein ableiten; denn man findet mit der Beachtung, daß im jetzigen Falle $\cos\alpha = a$, $\cos\beta = b$, $\cos\gamma = c$ ist, und daß für eine beliebige Richtung der zur Wellenfläche senkrechten Schnittebenen immer die Bedingungen: $a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$, $aa' + bb' + cc' = 0$, $aa'' + bb'' + cc'' = 0$, etc. bestehen,

$$T_\xi = \varepsilon_1 \varrho (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) + \varepsilon_2 \varrho (a^2 + b^2 + c^2)$$
$$= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\varrho\,,$$

$$T_\eta = \varepsilon_1 \varrho (a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2aa'bb' + 2aa'cc' + 2bb'cc') + \varepsilon_2 \varrho (a'^2 + b'^2 + c'^2)$$
$$= \varepsilon_2 \varrho\,,$$

$$S_\zeta = \varepsilon_1 \varrho (a^3a' + b^3b' + c^3c' + a^2bb' + aa'b^2 + a^2cc' + aa'c^2 + b^2cc' + bb'c^2)$$
$$= \varepsilon_1 \varrho (aa' + bb' + cc') = 0\,,$$

u. s. f.

Bei beiden Bewegungen findet also nicht nur eine zur Wellenfläche normale Spannung T_ξ statt, welche mit der Bewegung nothwendig verbunden ist und sich bald als Zug, bald als Druck äußert, je nachdem in der entsprechenden Ebene Verdünnung oder Verdichtung statt hat, sondern es muß auch eine zur Fortpflanzungsrichtung senkrechte und für alle Richtungen in derselben Wellenebene gleiche Spannung T_η von gleichem Sinne wie T_ξ und proportionaler Intensität vorhanden sein, wenn nur Schwingungen, welche normal zur Wellenfläche sind, stattfinden sollen.

Der Grund davon liegt darin, daß, wie in §. 86 und 87 gezeigt wurde, mit der Dehnung oder Stauung eines Körpers nach einer Richtung das Bestreben verbunden ist, die zu diesen Richtungen senkrechten Ausdehnungen desselben zu vermindern oder zu vergrößern, und daß nach diesen senkrechten Richtungen noch besondere Spannungen vorhanden sein müssen, wenn die entsprechenden Ausdehnungen ungeändert bleiben oder nur parallele Bewegungen der einzelnen Punkte stattfinden sollen. Es werden demnach die äußern physischen Verhältnisse darüber entscheiden, ob dieß letztere der Fall sein kann oder nicht, und wenn nicht, dazu dienen, neue Bedingungen zur Bestimmung der Funktion F aufzustellen, durch welche dieselbe befähigt wird, den geforderten Span-

nungsverhältnissen Genüge zu leisten, wenn dieß überhaupt für die Function F allein und ohne Zuziehung der mit b^2 multiplizirten Glieder in den Gleichungen (157) möglich ist.

§. 93.

Zur weitern Ausführung und Anwendung des Vorhergehenden wollen wir unserm Körper die Form eines prismatischen Stabes geben, dessen Länge L ziemlich groß sei gegen die dazu senkrechten Ausdehnungen, und bestimmen, daß derselbe mit einem Ende befestigt und der Länge nach durch Reiben in schwingende und tönende Bewegung versetzt worden sei. Es müssen dann an den Begrenzungsflächen, den befestigten Querschnitt ausgenommen, alle Spannungen Null sein. Nimmt man daher die Längenachse des Stabes als x-Achse, das befestigte Ende als Anfang, so kann man die Bewegung des Stabes nicht durch die aus (K) folgenden einfachen Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x} = \mathfrak{A} \sin \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{at}{l}, \quad \mathfrak{y} = 0, \quad \mathfrak{z} = 0$$

darstellen; denn man kann durch diese Gleichung zwar der Bedingung genügen, daß T_x Null werde für $x = L$, also an dem freien Ende des Stabes, wenn derselbe senkrecht zu seiner Länge begrenzt ist, und zwar dadurch, daß man $L = \frac{2i+1}{2}\, l$ setzt, so daß man hat

$$\text{N.)} \begin{cases} \mathfrak{x} = \mathfrak{A} \sin \frac{2i+1}{2} \pi \frac{x}{L} \cos \frac{2i+1}{2} \pi \frac{at}{L}, \\ T_x = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{2i+1}{2} \pi \frac{\mathfrak{A}}{L} \cos \frac{2i+1}{2} \pi \frac{x}{L} \cos \frac{2i+1}{2} \pi \frac{at}{L}; \end{cases}$$

allein die zu den Seitenflächen normalen Spannungen T_y und T_z, für welche sich der nur von x abhängige Werth:

$$T_y = T_z = \varepsilon_2 \frac{2i+1}{2} \pi \frac{\mathfrak{A}}{L} \cos \frac{2i+1}{2} \pi \frac{x}{L} \cos \frac{2i+1}{2} \pi \frac{at}{L}$$

ergibt, können nicht unabhängig von x und für bestimmte Werthe von y und z Null werden. Unter den gegebenen Verhältnissen kann demnach ein solcher Stab nicht blos Schwingungen seiner Länge nach

machen, ohne daß gleichzeitig noch andere Bewegungen in seinem Innern stattfinden.

Beachtet man nun, daß nach den frühern Untersuchungen in §. 86 und 87 mit der Längendehnung eines solchen Stabes immer eine Verminderung der dazu senkrechten Ausdehnungen verbunden ist, wenn nicht entsprechende Zugkräfte T_y und T_z vorhanden sind, welche jene Verminderung der Breite und Dicke, also eine zur Länge senkrecht gerichtete Bewegung zu verhindern vermögen, wie es auch die vorhergehenden Gleichungen fordern, daß aber durch den Zug T_x allein keine innere Spannung T_y oder T_z senkrecht zu einem Längenschnitt hervorgerufen wird, so wird man einsehen, daß man in dem gegebenen Falle die Function F so wählen muß, daß T_y und T_z durchaus Null werden.

Die Werthe:

$$T_y = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$T_z = \varepsilon_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = 0$$

führen auf die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad (O.$$

und diese bringen die Gleichung (161) auf folgende zurück:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(1 - \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\, a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \qquad (P.$$

Macht man demnach zur Abkürzung $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} = \alpha^2$, $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} = \gamma^2$, so genügt man den Gleichungen (O) durch Functionen von der Form:

$$A \begin{Bmatrix} \cos kx \\ \sin kx \end{Bmatrix} \left(e^{\gamma k y} \pm e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} \pm e^{-\gamma k z}\right)$$

und kann daher mit Rücksicht auf die Gleichung (P) und die äußern Zustände des Stabes für fortlaufende Wellen die Function:

$$F(x,y,z,t) = -A \cos k(x + \alpha a t)\left(e^{\gamma k y} + e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} + e^{-\gamma k z}\right),$$

für stehende Wellen in einem Stabe von begrenzter Länge die Function:

$$F(x,y,z,t) = -A \cos kx \cos k\alpha a t \left(e^{\gamma k y} + e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} + e^{-\gamma k z}\right)$$

wählen, um die Längenschwingungen desselben darzustellen. Es ergeben sich dann aus der letzten Function die Werthe:

$$\text{Q.)}\begin{cases} \mathfrak{x} = Ak \sin kx \cos k\alpha a t \left(e^{\gamma k y} + e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} + e^{-\gamma k z}\right), \\ \mathfrak{y} = -\gamma Ak \cos kx \cos k\alpha a t \left(e^{\gamma k y} - e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} + e^{-\gamma k z}\right), \\ \mathfrak{z} = -\gamma Ak \cos kx \cos k\alpha a t \left(e^{\gamma k y} + e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} - e^{-\gamma k z}\right), \end{cases}$$

nach welchen die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ je mit x, y und z Null werden, und welche den Bedingungen (O) und (P), also auch der Bedingung: $T_y = T_z = 0$ Genüge leisten.

Für T_x dagegen findet man den Ausdruck:

$$T_x = \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$= E_1 Ak^2 \cos kx \cos k\alpha a t \left(e^{\gamma k y} + e^{-\gamma k y}\right)\left(e^{\gamma k z} + e^{-\gamma k z}\right);$$

damit also an dem freien Ende des Stabes $T_x = 0$ wird, muß man wieder $k = \frac{2i+1}{2} \frac{\pi}{L}$ setzen und erhält damit für die Schwingungsdauer $\mathfrak{t}$ und die Zahl der Schwingungen $\mathfrak{n}$ in der Zeiteinheit die Werthe:

$$\text{R.)} \quad \mathfrak{t} = \frac{1}{2i+1} \frac{4L}{\alpha a}, \quad \mathfrak{n} = (2i+1) \frac{\alpha a}{4L},$$

welche zeigen, daß im jetzigen Falle, wo der Stab von allen Seiten frei und nur an einem Ende befestigt ist, die Schwingungsdauer im Verhältnisse $1 : \alpha' = \sqrt{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} : \sqrt{\varepsilon_1}$ größer ist, als für den Fall, wo der Stab senkrecht zu seiner Länge gleichmäßig und so gespannt ist, wie es die Gleichungen (N) verlangen, d. h. für den Fall, wo in demselben nur Schwingungen nach der Länge stattfinden.

Ebenso wird man für die fortlaufenden Wellen finden, daß nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht mehr α ist, sondern

$$\alpha a = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}} ,$$

Ist aber, wie in §. 86, λ die relative Verlängerung, und β die relative Verminderung der Dicke eines solchen Stabes durch eine im Sinne der Länge wirkende geometrische Zugkraft p, so ist dort abgeleitet worden

$$\varepsilon_1 = \frac{p}{\lambda + \beta} , \quad \varepsilon_2 = \frac{\beta}{\lambda - 2\beta} \varepsilon_1 ,$$

und damit wird

$$\alpha a = \sqrt{\frac{p}{q\lambda} \cdot \frac{\lambda - \beta}{\lambda + \beta}} . \qquad \text{(S,}$$

Setzt man endlich noch $p = gq$, d. h. nimmt man für die physische Zugkraft P am Ende des Stabes das Gewicht von der Längeneinheit desselben und bezeichnet die entsprechenden Werthe von λ und β mit λ_0 und β_0, ferner durch m_0 die dem Grundton oder dem $i = 0$ entsprechende Schwingungszahl des Stabes, so ergibt sich aus (R) und (S) die Beziehung:

$$\alpha a = \sqrt{\frac{g}{\lambda_0} \cdot \frac{\lambda_0 - \beta_0}{\lambda_0 + \beta_0}} = 4 m_0 l , \qquad \text{(T.}$$

welche einerseits dazu dienen wird, unsere Theorie mit der Erfahrung zu vergleichen, indem man λ, β und m direct durch Versuche ermittelt, und anderseits dazu, das Verhältniß $\frac{\lambda - \beta}{\lambda + \beta}$ für einen Stab aus dessen Longitudinal-Grundton und die Werthe von ε_1 und ε_2 für den Stoff, aus dem er besteht, zu bestimmen, wenn man zuvor die Längendehnung λ durch directe Dehnungsversuche kennen gelernt hat. Für die Voraussetzung $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ wird $\lambda = 3\beta$, und damit hat man

$$\alpha a = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{g}{\lambda_0}} ,$$

während man aus den Versuchen über die Längenschwingungen elastischer Stäbe auf einen größern Werth glaubt schließen zu müssen.

Nach unserer Voraussetzung, daß der Stab im Verhältniß zu seiner Länge sehr dünn sei, werden $\gamma k y$ und $\gamma k z$ immer sehr kleine Größen

sein, da große Werthe von i durch den Versuch nicht zu erreichen sind; man zieht dann mit Vernachlässigung der Quadrate und höhern Potenzen dieser Größen aus den Gleichungen (Q) die Näherungswerthe:

$$\text{U.)}\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= B \sin \frac{2i+1}{2}\pi\frac{x}{L}\cos\frac{2i+1}{2}\pi\frac{\alpha a t}{L}, \\ \mathfrak{y} &= -\frac{2i+1}{2}\pi\frac{y}{L}\gamma^2 B\cos\frac{2i+1}{2}\pi\frac{x}{L}\cos\frac{2i+1}{2}\pi\frac{\alpha a t}{L}, \\ \mathfrak{z} &= -\frac{2i+1}{2}\pi\frac{z}{L}\gamma^2 B\cos\frac{2i+1}{2}\pi\frac{x}{L}\cos\frac{2i+1}{2}\pi\frac{\alpha a t}{L}, \end{aligned}\right.$$

worin B für 4Ak steht, und welche, abgesehen von dem wesentlichen Unterschiede der Schwingungsdauer, äußerlich nur wenig von den Werthen für reine Längen-Schwingungen des Stabes abweichen.

Streng genommen sollte auch die verschiebende Spannung S_x Null sein, was aber nur nach den vorstehenden Werthen annäherungsweise der Fall ist, und man hat für $i = 0$, außer $S_x = 0$ noch die Werthe:

$$S_z = \frac{1}{2}\varepsilon_1\gamma^2\frac{\pi^2}{4}\frac{By}{L^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\cos\frac{\pi}{2}\frac{\alpha a t}{L},$$

$$S_y = \frac{1}{2}\varepsilon_1\gamma^2\frac{\pi^2}{4}\frac{Bz}{L^2}\sin\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\cos\frac{\pi}{2}\frac{\alpha a t}{L},$$

also sehr kleine Werthe für S_z und S_y, wenn y und z gegen L und umsomehr By und Bz gegen L^2 sehr klein sind.

Die vorhergehenden Beziehungen gelten auch dann noch, wenn der Stab in der Mitte seiner Länge festgehalten und durch Reiben der Länge nach zum Tönen gebracht wird, wo es leichter gelingt, als bei dem mit einem Ende befestigten Stabe; es bezeichnet dann aber L die halbe Länge desselben und der Anfang der x ist in der Mitte seiner Achse. Die erste der Gleichungen (U) spricht für diesen Fall aus, daß die $\mathfrak{x}$ mit den x das Zeichen wechseln, daß also zwei Punkte, welche gleich weit von dem mittleren Querschnitte entfernt sind, in demselben eine gleich große, dem Sinne nach aber entgegengesetzte Ausweichung und Oscillationsgeschwindigkeit besitzen. Ebenso ist die Spannung T_x in diesen Punkten gleich; es ist daher nicht nothwendig, daß der tönende Stab in der Mitte festgehalten wird, es genügt, daß er wegen seines Gewichtes im Schwerpunkte unterstützt ist, um sich im Stande des äußern Gleichgewichtes zu befinden, da die Spannungen T_x

in beiden Hälften ihre fördernden Wirkungen auf die Mitte gegenseitig aufheben.

§. 94.

Wenn die innere Bewegung eines elastischen Körpers nur von den mit dem Coeffizienten b multiplizirten Gliedern in den Gleichungen (157) abhängen soll, so muß man haben

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0 \ , \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0 \ , \quad \varrho = \varrho_0 \ ; \qquad (163.$$

für diesen Fall bleibt also die Raumausdehnung und die Aenderung der Dichte mit viel größerer Annäherung constant, als im vorhergehenden, und wenn man von dem anfänglichen Zustande als demjenigen ausgeht, von welchem die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ gerechnet werden, so kann man einfach $\varrho_0 = 0$ setzen. Entwickelt man die vorhergehenden Bedingungen, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x \, \partial z} = 0 \ , \\
\frac{\partial \varrho}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial y \, \partial z} = 0 \ , \\
\frac{\partial \varrho}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x \, \partial z} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial y \, \partial z} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial z^2} = 0 \ ,
\end{aligned}\right\}$$

und wenn diese Gleichungen mit b^2 multiplizirt der Reihe nach zu den Gleichungen (157) addirt werden, nachdem man die Factoren von b^2 darin ebenfalls entwickelt und der ersten derselben die Form:

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} = X + b^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x \, \partial z} \right)$$

gegeben hat, so findet man folgende einfache Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} &= X + b^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial z^2} \right) , \\
\frac{d^2 \mathfrak{y}}{d t^2} &= Y + b^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial z^2} \right) , \\
\frac{d^2 \mathfrak{z}}{d t^2} &= Z + b^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial z^2} \right) .
\end{aligned}\right\} \qquad (164.$$

Diese Gleichungen haben ganz dieselbe Form, wie die Gleichung (160), da hier X, Y oder Z und dort das Integral als eine Function von x, y und z zu betrachten ist, und wenn keine äußern Kräfte berücksichtigt werden, kommen sie ganz auf die Form der Gleichung (161) zurück; sie werden demnach auch durch ähnliche Functionen, wie jene befriedigt, wenn man darin a mit b vertauscht.

Es bleibt indessen dabei zu beachten, daß diese Functionen für die drei Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ nicht willkürlich und unabhängig von einander gewählt werden dürfen, da sie, abgesehen von den äußern an den Begrenzungsflächen stattfindenden Verhältnissen, noch den Gleichungen (163) genügen müssen, durch diese also in einer bestimmten Abhängigkeit stehen. Man wird daher zweckmäßiger die genannten Veränderlichen wieder von andern ableiten, welche unabhängig von einander sind. Die Bedingungen (163) zeigen, daß man die drei Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ durch Werthe von der Form:

165.)
$$\begin{cases} \mathfrak{x} = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} + k_1 x + k_2 y + k_3 z \,, \\ \mathfrak{y} = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} + k'_1 x + k'_2 y + k'_3 z \,, \\ \mathfrak{z} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} + k''_1 x + k''_2 y + k''_3 z \end{cases}$$

ausdrücken kann, worin f_1, f_2, f_3 drei verschiedene Functionen von x, y, z und t bedeuten, und k_1, k_2, u. s. f. constante Coeffizienten sind. Aus diesen Gleichungen zieht man dann

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + k_2 - k'_1$$

$$= \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \right) + k_2 - k_1' \,,$$

oder wenn man die Function: $\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ durch F, bezeichnet und die beiden andern Differenzen: $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}$ ebenso behandelt,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x} &= \frac{\partial F_{,}}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right) + k_2 - k'_1\,, \\
\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z} &= \frac{\partial F_{,}}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right) + k''_1 - k_3\,, \\
\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y} &= \frac{\partial F_{,}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right) + k'_3 - k''_2\,.
\end{aligned}\right\} \text{(a.}$$

Ersetzt man sodann zur Abkürzung die mit b^2 multiplizirten eingeklammerten Größen dieser Gleichungen durch W_3, W_2, W_1, so daß man hat

$$W_1 = b^2 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right), \quad \text{u. s. f.}$$

so wird

$$b^2 \left[\frac{\partial\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] = \frac{\partial W_2}{\partial z} - \frac{\partial W_3}{\partial y}\,,$$

u. s. f.;

ferner hat man mit den Werthen (165)

$$\frac{d^2 \mathfrak{x}}{d t^2} = \frac{d^2\left(\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y}\right)}{d t^2} = \frac{\partial \frac{d^2 f_2}{d t^2}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{d^2 f_3}{d t^2}}{\partial y}\,,$$

u. s. f.,

und damit nehmen die Gleichungen (157) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\frac{d^2 f_2}{d t^2} - W_2\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{d^2 f_3}{d t^2} - W_3\right)}{\partial y} &= X\,, \\
\frac{\partial\left(\frac{d^2 f_3}{d t^2} - W_3\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{d^2 f_1}{d t^2} - W_1\right)}{\partial z} &= Y\,, \\
\frac{\partial\left(\frac{d^2 f_1}{d t^2} - W_1\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{d^2 f_2}{d t^2} - W_2\right)}{\partial x} &= Z\,.
\end{aligned}\right\} \text{(b.}$$

Wenn man aber diese Gleichungen der Reihe nach von Neuem nach x, y und z differenzirt, so gibt ihre Summe die Bedingung:

$$\text{a.)} \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 ,$$

und spricht dadurch aus, daß die verlangte einfache innere Bewegung nur statthaben kann, wenn die äußern geometrischen Componenten wieder die in §. 90 besprochene Eigenschaft haben, nämlich so von drei neuen Functionen X, Y, Z der Veränderlichen x, y, z abhängen, daß man die Beziehungen hat:

$$X = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} , \quad Y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} , \quad Z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} .$$

Damit gehen die Gleichungen (b) in folgende über:

$$\frac{\partial \left(\frac{d^2 f_2}{dt^2} - W_2 - Y\right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{d^2 f_3}{dt^2} - W_3 - Z\right)}{\partial y} = 0 ,$$

u. s. f.

und werden allgemein befriedigt, wenn man

$$166.) \begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dt^2} - W_1 - X = \frac{\partial \Phi}{\partial x} , \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} - W_2 - Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} , \\ \frac{d^2 f_3}{dt^2} - W_3 - Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{cases}$$

setzt, worin Φ eine neue willkürliche Function von x, y, z und t bedeutet, welche daher auch zunächst gleich Null genommen werden kann. Man erhält so mit den Werthen von W_1, W_2 und W_3 zur Bestimmung der drei Functionen f_1, f_2 und f_3 die Gleichungen:

$$167.) \begin{cases} \frac{d^2 f_1}{dt^2} = X + b^2 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right) , \\ \frac{d^2 f_2}{dt^2} = Y + b^2 \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}\right) , \\ \frac{d^2 f_3}{dt^2} = Z + b^2 \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right) , \end{cases}$$

welche der Form nach wieder ganz mit den Gleichungen (164) übereinstimmen, worin nun aber die Functionen f_1, f_2, f_3, ebenso wie die Functionen X, Y, Z unabhängig von einander gewählt werden können.

Sind auf diese Weise die genannten Functionen bestimmt worden, so geben die Gleichungen (165) die Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, und die Gleichungen (166) die der geometrischen Componenten X, Y, Z, welche einer innern Bewegung des Körpers von der Art entsprechen, daß die Bedingungen (163) erfüllt werden, daß dieselbe also nur von dem Coeffizienten b abhängt.

Setzt man $X = Y = Z = 0$, so hat man auch $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{Z} = 0$, und die Gleichungen (167) kommen auf die Form der Gleichung (161) zurück; nimmt man dann noch die am Anfange der Zeit statthabende Raumausdehnung als ursprünglichen Zustand an, so daß $\varrho_0 = 0$ ist, so werden auch die Constanten k in den Gleichungen (165) gleich Null, und man hat die einfachen Beziehungen:

$$\mathfrak{x} = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad (168.$$

zur Bestimmung der augenblicklichen Ausweichungen eines Punktes aus seiner Gleichgewichtslage.

Für die innern Spannungen ergeben sich damit die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{T_x} &= \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}\right), \quad \mathrm{T_y} = \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}\right), \\
\mathrm{T_z} &= \varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z}\right), \\
\mathrm{S_z} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z}\right), \\
\mathrm{S_y} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}\right), \\
\mathrm{S_x} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (169.$$

nach welchen dieselben nur von dem Coeffizienten ε_1 abhängen, und die normalen Spannungen $\mathrm{T_x}$, $\mathrm{T_y}$ und $\mathrm{T_z}$ nur Null werden können, wenn $\mathfrak{x}$ von x, $\mathfrak{y}$ von y und $\mathfrak{z}$ von z unabhängig ist.

§. 95.

Den einfachsten Fall einer den Bedingungen (163) entsprechenden inneren Bewegung erhalten wir wieder, wenn wir für die Functionen f solche von der Form der Function (A) in §. 90 wählen, also

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, t) = A' \sin k(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma + bt) \\ f_2(x, y, z, t) = B' \sin k(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma + bt) \\ f_3(x, y, z, t) = C' \sin k(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma + bt) \end{cases}$$

nehmen und $X = Y = Z = 0$ setzen; dadurch werden die Gleichungen (167) befriedigt und man zieht daraus gemäß der Gleichungen (168) mit der frühern Abkürzung: p für $x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma$, ferner A für A'k, B für B'k, C für C'k, die Werthe:

$$\text{d.)} \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = (B \cos\gamma - C \cos\beta) \cos k(p + bt), \\ \mathfrak{y} = (C \cos\alpha - A \cos\gamma) \cos k(p + bt), \\ \mathfrak{z} = (A \cos\beta - B \cos\alpha) \cos k(p + bt) \end{cases}$$

für die augenblicklichen Verschiebungen und

$$\text{e.)} \quad \begin{cases} \frac{d\mathfrak{x}}{dt} = -(B \cos\gamma - C \cos\beta)\, kb \sin k(p + bt), \\ \frac{d\mathfrak{y}}{dt} = -(C \cos\alpha - A \cos\gamma)\, kb \sin k(p + bt), \\ \frac{d\mathfrak{z}}{dt} = -(A \cos\beta - B \cos\alpha)\, kb \sin k(p + bt) \end{cases}$$

für die Componenten der Oscillationsgeschwindigkeit. Setzt man dann noch

$$E \text{ für } \sqrt{(A \cos\beta - B \cos\alpha)^2 + (C \cos\alpha - A \cos\gamma)^2 + (B \cos\gamma - C \cos\beta)^2},$$

so findet man für die radiale Ausweichung $\mathfrak{r}$ und die Oscillationsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die Ausdrücke:

$$\text{f.)} \quad \mathfrak{r} = E \cos k(p + bt), \quad \mathfrak{v} = -E\, kb \sin k(p + bt),$$

und damit ergeben sich aus den Gleichungen (d) und (e) für die Winkel λ, μ, ν, welche von der Richtung der Ausweichung $\mathfrak{r}$ oder

der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ mit den Coordinaten-Achsen gebildet werden, die Functionen:

$$\cos\lambda = \frac{B\cos\gamma - C\cos\beta}{E}, \quad \cos\mu = \frac{C\cos\alpha - A\cos\gamma}{E},$$

$$\cos\nu = \frac{A\cos\beta - B\cos\alpha}{E},$$

aus welchen, wenn sie der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ multiplizirt und dann addirt werden, noch die Beziehung:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

hervorgeht.

Man schließt aus diesen Ergebnissen, daß bei dieser Bewegung wieder fortlaufende Wellen gebildet werden, da alle Punkte einer Ebene, welche zu der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung normal ist, gleichzeitig und auf dieselbe Weise schwingen, und die auf einander folgenden parallelen Ebenen nach und nach dieselben Schwingungszustände oder Oscillationsphasen annehmen. Die schwingende Bewegung pflanzt sich also wieder nach der durch die genannten Winkel bestimmten Richtung fort, und zwar nun mit der Geschwindigkeit b; die Schwingungen der einzelnen Punkte selbst sind aber nicht mehr normal zur Wellenfläche oder parallel zu der eben bemerkten Fortpflanzungsrichtung, sondern finden in der Wellenfläche selbst statt, sind also senkrecht zu dieser Richtung der Fortpflanzung und daher eigentliche transversale oder Querschwingungen.

Wählen wir dagegen die Functionen:

$$f_1(x,y,z,t) = -A'\cos kp\cos kbt, \quad f_2(x,y,z,t) = -B'\cos kp\cos kbt,$$
$$f_3(x,y,z,t) = -C'\cos kp\cos kbt,$$

so erhalten wir die Verschiebungen:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathfrak{x} = (B\cos\gamma - C\cos\beta)\sin kp\cos kbt, & \mathfrak{y} = (C\cos\alpha - A\cos\gamma)\sin kp\cos kbt, \\ \mathfrak{z} = (A\cos\beta - B\cos\alpha)\sin kp\cos kbt, & \mathfrak{r} = E\sin kp\cos kbt,\end{array}\right\} \quad (g.$$

also stehende ebene Wellen, welche zu der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung normal sind, und in deren Ebene die Schwingungen der einzelnen Punkte vor sich gehen.

Zwischen den Constanten k, der Wellenlänge λ und der Schwingungsdauer t hat man im ersten Falle die Beziehungen:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{b\mathfrak{t}}\ , \qquad \lambda = b\mathfrak{t}\ ,$$

und wenn man die Normale zur Wellenfläche als x=Achse nimmt, also $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ setzt, so werden die Gleichungen (d)

$$\text{h.)}\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{y} = C \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\mathfrak{t}}\right)\ ; \quad \mathfrak{z} = -B \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\mathfrak{t}}\right)\ , \\ \mathfrak{x} = 0\ , \quad \mathfrak{r} = \sqrt{C^2 + B^2} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\mathfrak{t}}\right)\ . \end{array}\right.$$

Dreht man dann noch das Coordinatensystem um die x=Achse und zwar rückwärts um den Winkel $arc\ tang\ \frac{B}{C}$ und ersetzt $\sqrt{C^2 + B^2}$ durch $C_{,}$, so werden alle Oscillationen parallel zur Achse der y, und es genügen die Gleichungen:

$$\text{i.)} \qquad \mathfrak{x} = 0\ , \quad \mathfrak{z} = 0\ , \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{y} = C_{,} \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\mathfrak{t}}\right)\ ,$$

um das Gesetz derselben darzustellen.

Im zweiten Falle wird man wieder den Abstand l zweier Knoten=Ebenen einführen, also

$$k = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{b\mathfrak{t}}\ , \qquad l = \frac{1}{2} b\mathfrak{t}$$

setzen und für eine gleiche Lage der Coordinaten=Ebenen wie vorher die einfachen Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = 0\ , \quad \mathfrak{z} = 0\ , \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{y} = C_{,} \sin \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{bt}{l}$$

für die betreffende Bewegung erhalten.

In beiden Fällen ist leicht zu sehen, daß alle zu ihren Schnittflächen normalen Spannungen Null sind, wenn man von dem Zustande ausgeht, von welchem die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gerechnet werden; ebenso sind die verschiedenen Spannungen S_y und S_x Null, da sowohl die Aenderungsgesetze: $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$, als $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}$ Null sind. Man hat aber in beiden Fällen eine um die z=Achse ver=

schiebende oder drehende Spannung $S_z = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \frac{\delta \mathfrak{y}}{\delta x}$, welche insbesondere für den zweiten Fall durch

$$S_z = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \pi \frac{C_,}{l} \cos \pi \frac{x}{l} \cos \pi \frac{bt}{l}$$

ausgedrückt wird und das Drehen der zur x=Achse senkrechten Wellenebenen zu verhindern hat; sie muß am größten sein für $x = 0$ oder überhaupt für $x = il$, also in den Knoten=Ebenen, und ist Null für $x = \frac{1}{2} il$ oder in der Mitte zwischen denselben. Ein prismatischer Stab, welcher, gewichtlos gedacht ganz frei oder auch in bestimmten Querschnitten gestützt oder befestigt, zu seiner Länge senkrechte oder transversale Schwingungen macht, und für welchen eine solche Spannung S_z nicht vorhanden ist, kann daher nach den oben betrachteten einfachen Gesetzen nicht schwingen; seine Querschnitte bleiben nicht parallel, sondern drehen sich, und dadurch werden abwechselnd Stauungen und Dehnungen in den zur Schwingungsrichtung senkrechten Längenschnitten hervorgerufen; man kann folglich in diesem Falle, was die Art der Bewegung betrifft, ϱ nicht mehr als constant oder Null annehmen, die betreffende Bewegung also nicht mehr von den mit b^2 multiplizirten Gliedern der Gleichungen (157) allein abhängig machen.

Wir haben dagegen eine hieher gehörende Bewegung eines prismatischen Stabes, wenn derselbe an einem Ende festgeklemmt und um seine Längenachse in drehende Schwingungen versetzt wird; denn bei dieser Bewegung schwingt jeder Punkt in der Ebene seines zur Längenachse senkrechten Schnittes, und die Volumenänderung ϱ bleibt Null. Beachtet man dann, daß die Ausweichung $\mathfrak{r}$ eines Punktes aus seiner Gleichgewichtslage nahezu seiner Entfernung r von der Achse des Stabes, welche (wie in §. 89) die Achse der z sein soll, proportional und zu diesem Fahrstrahl r senkrecht gerichtet ist, daß also die Projectionen jener Ausweichung auf die Achsen der y und x, nämlich $\mathfrak{y} = \mathfrak{r} \cos \omega$ und $\mathfrak{x} = - \mathfrak{r} \sin \omega$ nahezu auch den Ordinaten $r \cos \omega = x$ und $- r \sin \omega = - y$ des betreffenden Punktes proportional sind, daß aber die genannte Ausweichung für wachsende r eher die zu r proportionale übersteigt, als kleiner wird, ferner daß die Abscisse z ungeändert bleiben, also $\mathfrak{z}$ Null werden muß, endlich daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit z Null werden müssen, wenn man den befestigten Querschnitt des Stabes als Ebene der xy annimmt, so wird man erkennen, daß diesem Falle durch die nachstehenden Formen der Functionen: f_1, f_2, f_3 Genüge geleistet wird:

$$\text{k.)}\left\{\begin{aligned} f_1(x,y,z,t) &= A\left(e^{k_1 x} - e^{-k_1 x}\right) \cos k_2 z \cos kbt\,, \\ f_2(x,y,z,t) &= A\left(e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}\right) \cos k_2 z \cos kbt\,, \\ f_3(x,y,z,t) &= C\left(e^{k_1 x} + e^{-k_1 x} + e^{k_1 y} + e^{-k_1 y}\right) \sin k_2 z \cos kbt\,; \end{aligned}\right.$$

denn man zieht daraus zufolge der Gleichungen (168) die Werthe:

$$\text{l.)}\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= -(Ak_2 + Ck_1)\left(e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}\right) \sin k_2 z \cos kbt\,, \\ \mathfrak{y} &= +(Ak_2 + Ck_1)\left(e^{k_1 x} - e^{-k_1 x}\right) \sin k_2 z \cos kbt\,, \\ \mathfrak{z} &= 0\,. \end{aligned}\right.$$

Diese Werthe genügen den Gleichungen (164) und (167) durch die Bedingung:

$$\text{m.)}\quad k^2 = k_2^2 - k_1^2\,,\quad k_1 = \alpha k_2\,,\quad k = k_2\sqrt{1-\alpha^2} = \beta k_2$$

und geben, wenn zur Abkürzung $Ak_2 + Ck_1 = F$ gesetzt wird, die Spannungen:

$$\text{n.)}\left\{\begin{aligned} &T_x = 0\,,\quad T_y = 0\,,\quad T_z = 0\,, \\ &S_z = \frac{1}{2}\varepsilon_1 k_1 F\left(e^{k_1 x} + e^{-k_1 x} - e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}\right) \sin k_2 z \cos kbt\,, \\ &S_y = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 k_2 F\left(e^{k_1 y} - e^{-k_1 y}\right) \cos k_2 z \cos kbt\,, \\ &S_x = \frac{1}{2}\varepsilon_1 k_2 F\left(e^{k_1 x} - e^{-k_1 x}\right) \cos k_2 z \cos kbt\,. \end{aligned}\right.$$

Die beiden letzten Spannungen sind in dem Stabe nothwendig vorhanden; nur in der freien Stirnfläche müssen sie Null werden, man muß also haben, wenn L die Länge des Stabes bezeichnet,

$$\cos k_2 L = 0\,,\qquad k_2 = \frac{2i+1}{2}\,\frac{\pi}{L}\,.$$

Daraus folgt $k_1 = \alpha \frac{2i+1}{2} \frac{\pi}{L}$; wenn demnach die Länge des Stabes ziemlich groß ist im Verhältniß zu seiner Dicke, so werden die Exponenten $k_1 x$ und $k_1 y$ immer ziemlich kleine Brüche bleiben, und man kann annähernd

$$e^{k_1 x} = 1 + k_1 x\,,\quad e^{k_1 y} = 1 + k_1 y\,,\quad e^{-k_1 x} = 1 - k_1 x\,,\quad \text{u. s. f.}$$

setzen, wodurch die Spannung S_z auf Null zurückkommt, und die beiden andern die einfachen Werthe:

$$S_y = -\varepsilon_1 k_1 k_2 F y \cos k_2 z \cos kbt\,,$$
$$S_x = \varepsilon_1 k_1 k_2 F x \cos k_2 z \cos kbt$$

annehmen. Diese zeigen durch die weitern Bedingungen:

$$\mathfrak{T}^{(z)}_x = 0 = -\varepsilon_1 k_1 k_2 F \cos k_2 z \cos kbt \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \,.\, y\,,$$

$$\mathfrak{T}^{(z)}_y = 0 = \varepsilon_1 k_1 k_2 F \cos k_2 z \cos kbt \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \,.\, x\,,$$

wie in §. 89, daß die Verbindungslinie der Schwerpunkte aller Schnittflächen die Drehungsachse des Stabes ist.

Für die Schwingungsdauer $\mathfrak{t}_,$ und die Schwingungszahl $\mathfrak{n}_,$ hat man hier die Ausdrücke:

$$\mathfrak{t}_, = \frac{2\pi}{kb} = \frac{4}{2i+1} \frac{L}{\beta b}\,,\quad \mathfrak{n}_, = (2i+1)\frac{\beta b}{4L} = \frac{2i+1}{4L} \sqrt{\frac{\beta^2 \varepsilon_1}{2q}}\,,$$

und die Vergleichung dieser Werthe mit den in §. 93 für die Längenschwingungen eines Stabes gefundenen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ gibt das Verhältniß:

$$\mathfrak{n} : \mathfrak{n}_, = \sqrt{\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}} : \sqrt{\frac{\beta^2\varepsilon_1}{2}} = 1 : \sqrt{\frac{\beta^2(\varepsilon_1+2\varepsilon_2)}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}} = \mathfrak{t}_, : \mathfrak{t}\,.$$

Die obigen Gleichungen bieten übrigens kein Mittel, um den Coeffizienten β^2 zu bestimmen; man erhält jedoch einen mit der Erfahrung nahe übereinstimmenden Werth, wenn man $\beta^2 = \frac{4}{5}$ nimmt; denn die

Erfahrung zeigt, daß wenn ein und derselbe cylindrische Stab an einem Ende befestigt und zuerst durch Längenschwingungen, dann durch drehende Schwingungen zum Tönen gebracht wird, der Grundton im ersten Falle um eine schwache Quinte höher ist, als im zweiten, daß man also nahe haben muß

$$\mathfrak{n} : \mathfrak{n}_{,} = 3 : 2 = 1 : 0{,}67 \text{ bis } 0{,}70 \,.$$

Das obige Verhältniß $1 : \sqrt{\dfrac{\beta^2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)}{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$ wird für $\beta^2 = \dfrac{2}{3}$ gleich

$1 : \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}}$ und gibt für $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ genau den Werth $1 : \dfrac{2}{3}$,

für $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ den Werth $1 : \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ oder $1 : 0{,}707$, also Werthe, welche an den beiden Grenzen der Beobachtung liegen.

§. 96.

In den meisten Fällen wird die innere Bewegung eines elastischen Körpers aus den beiden vorherbetrachteten einfachen Arten der Bewegung zusammengesetzt sein und von den beiden Coeffizienten a^2 und b^2 zugleich abhängen; man kann dann aber seine Bewegung immer in diese einfachen zerlegen, indem man

170.) $\quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 \,, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{y}_2 \,, \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \mathfrak{z}_2$

setzt und die $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ nach den Gleichungen (159), die $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{z}_2$ nach den Gleichungen (168) bestimmt, wodurch den allgemeinen Gleichungen (157) in jedem Falle genügt werden kann. Es wäre indessen denkbar, daß es noch andere Functionen für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ gäbe, welche den Gleichungen (157) Genüge leisten; man muß daher, um dieß zu erkennen, aus den Gleichungen der Bewegung noch allgemeinere Eigenschaften der für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ einzuführenden Functionen ableiten. Dazu bringt man die rechte Seite dieser Gleichungen unter die Form der Gleichungen (150) oder (153) und ersetzt darin wieder

$\dfrac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{q}$ durch a^2, $\dfrac{\varepsilon_1}{2q}$ durch b^2, also $\dfrac{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}{2q}$ durch $a^2 - b^2$,

so daß sie die Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} &= X + (a^2-b^2)\frac{\partial\varrho}{\partial x} + b^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial z^2}\right),\\
\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} &= Y + (a^2-b^2)\frac{\partial\varrho}{\partial y} + b^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial z^2}\right),\\
\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} &= Z + (a^2-b^2)\frac{\partial\varrho}{\partial z} + b^2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (171.$$

Differenzirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach in Bezug auf x, y und z und nimmt die Summe der Ergebnisse, so folgt mit Beachtung der am Ende des §. 91 abgeleiteten Beziehungen und, wenn man wie in §. 90 die mit b^2 multiplizirten eingeklammerten Summen durch U_x, U_y, U_z ersetzt, zuerst

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + (a^2-b^2)\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)$$
$$+ b^2\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}\right),$$

und daraus wird durch die Gleichung (162) die Bedingung:

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2} = \frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_z}{\partial z}. \quad (172.$$

Differenzirt man dagegen jede der Gleichungen (171) zweimal nacheinander in Bezug auf x, y und z und nimmt für jede derselben die Summe der sich ergebenden Aenderungsgesetze, so findet man für die erste derselben

$$\frac{d^2U_x}{dt^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)}{\partial x} + (a^2-b^2)\frac{\partial\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)}{\partial x}$$
$$+ b^2\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}\right);$$

mit Berücksichtigung der Gleichung (162) wird daraus

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2U_x}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2}\right) &= \frac{\partial\left[\frac{d^2\varrho}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial z^2}\right)\right]}{\partial x}\\
&= \frac{d^2\varrho'_x}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2\varrho'_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varrho'_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varrho'_x}{\partial z^2}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (173.$$

wenn ϱ'_x für $\frac{\delta \varrho}{\delta x}$ gesetzt wird, und für die Fälle, wo $\frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = 0$ ist, hat man nach (162ᵃ)

173ᵃ.)

$$\begin{cases} \frac{d^2 U_x}{d t^2} - b^2 \left(\frac{\delta^2 U_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 U_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 U_x}{\delta z^2} \right) = (a^2 - b^2) \frac{\delta \left(\frac{\delta^2 \varrho}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varrho}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varrho}{\delta z^2} \right)}{\delta x} \\ \qquad = (a^2 - b^2) \left(\frac{\delta^2 \varrho'_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varrho'_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varrho'_x}{\delta z^2} \right) \\ \qquad = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{d^2 \varrho'_x}{d t^2} . \end{cases}$$

Aehnliche Beziehungen wird man auch zwischen U_y und $\frac{\delta \varrho}{\delta y}$ oder ϱ'_y und zwischen U_z und $\frac{\delta \varrho}{\delta z} = \varrho'_z$ finden und daraus mittels der Gleichung (172) die neuen Gleichungen:

174.)

$$\frac{d^2 U_x}{d t^2} = a^2 \frac{\delta \left(\frac{\delta U_x}{\delta x} + \frac{\delta U_y}{\delta y} + \frac{\delta U_z}{\delta z} \right)}{\delta x} + b^2 \left[\frac{\delta \left(\frac{\delta U_x}{\delta y} - \frac{\delta U_y}{\delta x} \right)}{\delta y} - \frac{\delta \left(\frac{\delta U_z}{\delta x} - \frac{\delta U_x}{\delta z} \right)}{\delta z} \right]$$

u. s. f.

ableiten, welche nur Beziehungen zwischen den Functionen U_x, U_y, U_z allein darstellen und in der Form den Gleichungen (157) ähnlich sind. Differenzirt man sodann die vorstehenden Gleichungen wieder der Reihe nach in Bezug auf x, y und z und nimmt die Summe der neuen Aenderungsgesetze, nachdem man darin den Ausdruck $\frac{\delta U_x}{\delta x} + \frac{\delta U_y}{\delta y} + \frac{\delta U_z}{\delta z}$ durch $\widehat{U}$ ersetzt hat, so findet man als allgemeinste Beziehung:

175.) $$\frac{d^2 \widehat{U}}{d t^2} = a^2 \left(\frac{\delta^2 \widehat{U}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \widehat{U}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \widehat{U}}{\delta z^2} \right) ,$$

welche zeigt, daß die Function $\widehat{U}$ immer wieder die Form der Functionen F oder ϱ haben muß und nur den Coeffizienten a enthalten darf; die mit b behafteten Glieder in den Werthen von U_x, U_y und

U_z müssen demnach in einer solchen Form vorhanden sein, daß sie in der Function $\widehat{U}$ verschwinden. Bezeichnet man daher mit

$\widehat{F}(x, y, z, at)$, $\widehat{f_1}(x, y, z, bt)$, $\widehat{f_2}(x, y, z, bt)$, $\widehat{f_3}(x, y, z, bt)$

beliebige Functionen von x, y, z und t, so kann man setzen:

$$U_x = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{f_2}}{\partial z} - \frac{\partial \widehat{f_3}}{\partial y}, \quad U_y = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{f_3}}{\partial x} - \frac{\partial \widehat{f_1}}{\partial z},$$

$$U_z = \frac{\partial \widehat{F}}{\partial z} + \frac{\partial \widehat{f_1}}{\partial y} - \frac{\partial \widehat{f_2}}{\partial x};$$

denn es ergibt sich damit

$$\widehat{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial z^2},$$

also eine Function, welche nur den Coeffizienten a enthält. Wird dann dieser Werth in die Gleichung (175) eingeführt, und zur Abkürzung

$$\frac{d^2 \widehat{F}}{dt^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial z^2}\right) = \Phi$$

gesetzt, so folgt die Bedingung:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \qquad (176.$$

nach welcher es scheint, als ob die Function Φ nicht selbst Null werden müßte, und als ob man der Gleichung (175) auch noch durch andere Functionen $\widehat{F}$ genügen könnte als durch solche, für die man hat

$$\frac{d^2 \widehat{F}}{dt^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial z^2}\right). \qquad (a.$$

Allein abgesehen davon, daß es schwer sein möchte, unter Anwendung der Functionen φ in den §§. 90 und 91 eine Function F zu bilden, welche der Gleichung (176) genügt, ohne daß weder $\widehat{U}$ noch Φ Null wird, läßt sich aus den Gleichungen (174) folgern, daß Φ Null oder constant werden muß. Führen wir nämlich den Werth:

$$a\widehat{U} = a\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right) = \frac{d^2 F}{dt^2} - \Phi$$

mit den vorhergehenden Werthen von U_x, U_y und U_z in die Gleichungen (174) ein und ersetzen die Differenzen:

$$\frac{d^2\widehat{f_1}}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2\widehat{f_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_1}}{\partial z^2}\right), \quad \frac{d^2\widehat{f_2}}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2\widehat{f_2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_2}}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{d^2\widehat{f_3}}{dt^2} - b^2\left(\frac{\partial^2\widehat{f_3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_3}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widehat{f_3}}{\partial z^2}\right)$$

durch Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, so geben diese Gleichungen die Bedingungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial y} - \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial z} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z} - \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial y} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}, \end{array}\right.$$

und diese können nur durch die getrennten Bedingungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad \Phi = C, \\ \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial\Psi_3}{\partial x} - \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial\Psi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial\Psi_2}{\partial x} = 0 \end{array}\right.$$

erfüllt werden, weil die Functionen Ψ nur die Constante b enthalten, während Φ nur eine Function von x, y, z und at ist. Die drei letzten dieser Bedingungen führen aber selbst wieder auf die Bedingungen:

$$177.) \quad \Psi_1 = \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial x}, \quad \Psi_2 = \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial y}, \quad \Psi_3 = \frac{\partial\widehat{\Psi}}{\partial z},$$

welche wieder mit den Gleichungen (166) in §. 94 übereinstimmen und aussprechen, daß die Functionen Ψ nicht selbst Null sein müssen, aber in einer bestimmten Abhängigkeit stehen.

Es ist übrigens leicht zu sehen, daß diese Abhängigkeit für die nur aus φ-Functionen gebildeten $\widehat{f}$ dahin führt, die Functionen U_x, U_y und U_z von b unabhängig zu machen, woraus dann rückwärts folgt, daß auch die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ von diesem Coeffizienten unabhängig sein

müßten. Man genügt jedoch den Bedingungen (177) ohne die ebenbemerkte Beschränkung, wenn man den Functionen f_1, f_2 und f_3 in §. 94 noch Glieder von der Form: $x f_0$, $y f_0$, $z f_0$ beifügt, worin f_0 eine solche Function von x, y, z und bt bezeichnet, daß man hat

$$\frac{d^2 f_0}{d t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2}\right) . \qquad \text{(b.}$$

Denn es ergibt sich dadurch für den von b abhängigen Theil von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$

$$\mathfrak{x}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial y} + y \frac{\partial f_0}{\partial z} - z \frac{\partial f_0}{\partial y} ,$$

u. s. f.

und damit folgt

$$U_x = B \frac{\partial f_2}{\partial z} - C \frac{\partial f_3}{\partial y} + D \left(y \frac{\partial f_0}{\partial z} - z \frac{\partial f_0}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}$$

u. s. f.

Man kann also auch

$$\widehat{f_1} = A f_1 + D x f_0 \;, \quad \widehat{f_2} = B f_2 + D y f_0 \;, \quad \widehat{f_3} = C f_3 + D z f_0$$

setzen und findet damit unter der Voraussetzung:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 f_1}{d t^2} = b^2 \left(\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right) \\ \text{u. s. f.} \end{array}\right\} \qquad \text{(c.}$$

die Werthe:

$$\psi_1 = 2 D \frac{\partial f_0}{\partial x} \;, \quad \psi_2 = 2 D \frac{\partial f_0}{\partial y} \;, \quad \psi_3 = 2 D \frac{\partial f_0}{\partial z} ,$$

welche offenbar den Bedingungen (177) entsprechen.

Faßt man nun alle diese Bedingungen zusammen und bezeichnet wie vorher durch

$F(x,y,z,at)$, $f_0(x,y,z,bt)$, $f_1(x,y,z,bt)$, $f_2(x,y,z,bt)$, $f_3(x,y,z,bt)$

solche Functionen von x, y, z und at oder bt, welche die Eigenschaften (a), (b) und (c) besitzen, und außerdem noch mit ψ_1, ψ_2 und ψ_3 solche Functionen von x, y und z allein, welche die Eigenschaft:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}=h_1^2\,\psi_1\,,\quad \text{u. s. f.}$$

haben, so kann man als allgemeine Auflösung der Gleichungen (157) oder (171) für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die Werthe nehmen:

$$178.)\left\{\begin{aligned}\mathfrak{x}&=\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial y}+y\frac{\partial f_0}{\partial z}-z\frac{\partial f_0}{\partial y}\right)-\Sigma\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial z}-\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)\\ \mathfrak{y}&=\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}+z\frac{\partial f_0}{\partial x}-x\frac{\partial f_0}{\partial z}\right)-\Sigma\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)\\ \mathfrak{z}&=\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}+x\frac{\partial f_0}{\partial y}-y\frac{\partial f_0}{\partial x}\right)-\Sigma\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)\end{aligned}\right.$$

und findet dann, wenn sie in jene Gleichungen eingeführt werden, zuletzt noch die Bedingungen:

$$179.)\left\{\begin{aligned}&X=b^2\Sigma\left(h_2^2\frac{\partial\psi_2}{\partial z}-h_3^2\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)\,,\quad Y=b^2\Sigma\left(h_3^2\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-h_1^2\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right),\\ &\qquad Z=b^2\,\Sigma\left(h_1^2\frac{\partial\psi_1}{\partial y}-h_2^2\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right),\end{aligned}\right.$$

welche auf die früheren Bedingungen: $X=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}$, etc. zurückkommen, wenn $h_1^2=h_2^2=h_3^2$, also $b^2\Sigma.h^2\psi_1=X$, $b^2\Sigma.h^2\psi_2=Y$, $b^2\Sigma.h^2\psi_3=Z$ wird.

So einfach sich indessen die vorhergehende allgemeine Auflösung der Gleichungen (157) für die innere Bewegung eines stetigen elastischen Systems dargeboten hat, so schwierig ist das Auffinden der besondern Functionen F und f, welche für gegebene Fälle allen Bedingungen der Aufgabe genügen. Für viele Aufgaben der Art wird es ferner wieder nothwendig werden, andere Coordinatensysteme anzuwenden, und demgemäß die Gleichungen der Bewegung umzuändern. Es könnte aber darauf nicht ohne eine viel zu weitgehende Ueberschreitung der uns gesteckten Grenzen eingegangen werden, und ich muß mich um so mehr begnügen, in dieser Beziehung wieder auf das in §. 76 angeführte Werk von Lamé zu verweisen, als die meisten der hiehergehörenden Untersuchungen in das Gebiet der Optik gehören.

Viertes Kapitel.

Uebertragung der Bewegung. Stoß.

§. 97.

Bei veränderlichen Systemen, welche aus mehreren festen Körpern in der Art zusammengesetzt sind, daß diese in unmittelbarer Verbindung oder Berührung stehen, kommt es oft vor, und bei unsern Maschinen ist es durchaus der Fall, daß die Hauptursache der Bewegung nur auf den einen oder den andern jener festen Körper wirkt, und daß sie von diesem durch Druck oder Zug oder auch nur durch die Reibung auf die andern übertragen wird oder übertragen werden soll. Mit dieser Uebertragung ist dann im Allgemeinen eine Aenderung in der Form der einzelnen Körper verbunden, welche auf die Bewegung des Systems von wesentlichem Einfluß sein und selbst so weit gehen kann, daß die Cohäsion derselben überwunden wird, und in Folge dessen eine Trennung derselben in mehrere Theile eintritt, wodurch die Verbindung der einzelnen Glieder des Systems aufgehoben und die fernere Uebertragung der Bewegung unmöglich wird. Oder es kann in dem Falle, wo diese Uebertragung nur durch die zwischen den sich berührenden Körpern stattfindende Reibung vermittelt werden soll, dieser Widerstand gegen die zu übertragende Kraft zu schwach und daher nicht im Stande sein, diese in der gewünschten Weise dem folgenden Körper mitzutheilen. In allen diesen Fällen kann man die Bewegung des Systems nur auf solche Weise richtig untersuchen, daß man die zwischen seinen einzelnen Theilen wirksamen Kräfte als unbekannte Größen in die Gleichungen für die Bewegung dieser einzelnen Theile einführt und mit den für die Verbindung derselben gegebenen Bedingungen noch die Bedingungen für die Aenderung der Form derjenigen verbindet, bei welchen eine solche zu berücksichtigen ist, um jene unbekannten Größen zu eliminiren und das Gesetz der Bewegung zu bestimmen, und dann auch jene Kräfte selbst und die von ihnen erzeugte Formänderung kennen zu lernen, und daraus zu schließen, ob diese Formänderung nicht zu

weit geht, oder ob die beabsichtigte Uebertragung der Bewegung wirklich stattfindet.

Um aber Fälle der Art allgemein durchführen zu können, müßten die Untersuchungen des vorhergehenden Kapitels viel weiter gediehen sein; es müßten die Beziehungen zwischen den äußern Spannungen und der Formänderung eines Körpers je nach der Natur und nach dem Grade seiner Elasticität aufgestellt werden können, während dieß bis jetzt kaum für die einfachsten Körperformen unter der Voraussetzung sehr kleiner Aenderungen derselben möglich ist.

Es dürfte indessen nicht überflüssig sein, für die vorhergehende Erörterung zwei sehr einfache Beispiele zu geben, von denen das erstere auch an und für sich beachtungswerth sein dürfte, und die beide uns bei den Erörterungen im nächsten Abschnitte noch einmal dienen werden.

§. 98.

Auf einer horizontalen festen Ebene liegen zwei rechtwinklige Parallelepipede mit ihren Schwerpunkten lothrecht übereinander, B auf A; mit dem untern A ist mittels eines undehnbaren, vollkommen biegsamen und gewichtlosen Fadens, welcher über eine gewichtlose Rolle geht, ein Gewicht C, das lothrecht herabsinken kann, in der Art verbunden, daß der zwischen der Rolle und dem Körper A befindliche Fadentheil immer horizontal bleibt und seine Verlängerung durch den Schwerpunkt von A geht. Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen sich beide Parallelepipede so mit einander bewegen, als wenn sie fest verbunden wären, und wann das obere B gegen das untere zurückbleibt.

Wir nehmen die feste Ebene als die der xy und legen die Ebene der xz durch die Schwerpunkte der beiden Körper und die Rolle, so daß dieselbe auch den Faden und den Schwerpunkt des Gewichtes C enthält, und bezeichnen die Coordinaten der Schwerpunkte der drei Körper A, B, C, deren Gewichte P_1, P_2 und Q seien, der Reihe nach mit $x_1\,z_1$, $x_2\,z_2$ und z_3, da unter den gemachten Voraussetzungen keine Ursache für eine zur xz-Ebene senkrechte Bewegung der beiden ersten vorhanden ist, den Druck des obern Parallelepipeds auf das untere mit N_2, den des letztern auf die Ebene mit N_1, dann den Coeffizienten für die Reibung zwischen A und der Ebene mit f_1, für die zwischen A und B mit f_2, endlich die Spannung des Fadens mit T. Damit ergeben sich folgende Gleichungen für die fortschreitende Bewegung dieser Körper:

$$1)\ \frac{P_1}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} = T - f_1 N_1 - f_2 N_2\,, \qquad 2)\ \frac{P_1}{g}\frac{d^2z_1}{dt^2} = 0 = N_2 - N_1 + P_1\,,$$

$$3)\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2x_2}{dt^2} = + f_2 N_2\,, \qquad 4)\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2z_2}{dt^2} = 0 = P_2 - N_2\,,$$

$$5)\ \frac{Q}{g}\frac{d^2z_3}{dt^2} = Q - T\,,$$

mit welchen noch die Bedingungsgleichung: $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_3}{dt}$ zu verbinden ist, die aus der unveränderlichen Länge des Fadens folgt. Mit Berücksichtigung dieser und der Gleichungen (2) und (4) gibt die Elimination von T aus der ersten und fünften die Gleichung:

$$6)\ \begin{cases} \frac{P_1+Q}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} = Q - f_1 N_1 - f_2 N_2 \\ \qquad\qquad\quad = Q - f_1 (P_1 + P_2) - f_2 P_2\,. \end{cases}$$

Addirt man hiezu die dritte Gleichung, so hat man für die äußere Bewegung des Systems die Gleichung:

$$7)\ \frac{P_1+Q}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{P_2}{g}\frac{d^2x_2}{dt^2} = Q - f_1 (P_1 + P_2)\,,$$

welche das einleuchtende Gesetz ausspricht, daß keine Bewegung eintritt, so lange nicht $Q > f_1 (P_1 + P_2)$ ist.

Setzen wir sodann $x_2 = x_1 + u$, so wird u die zur x-Achse parallele Entfernung des Schwerpunktes B von dem Schwerpunkte A am Ende der Zeit t oder das Gesetz der innern Bewegung ausdrücken. Die zuletzt erhaltene Gleichung (7) nimmt dann die Form an:

$$8)\ \frac{P_1+P_2+Q}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{P_2}{g}\frac{d^2u}{dt^2} = Q - f_1 (P_1 + P_2)\,,$$

und die Gleichung (3) wird

$$\frac{P_2}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{P_2}{g}\frac{d^2u}{dt^2} = f_2 P_2\,;$$

eliminirt man also daraus $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, so folgt für die innere Bewegung die Gleichung:

$$9)\quad \frac{P_1+Q}{g}\frac{d^2u}{dt^2}=Q(1-f_2)-(f_1+f_2)(P_1+P_2)\ ,$$

und diese spricht aus, 1) daß die Entfernung u nur eine negative sein, daß also B gegen A nur zurückbleiben kann; 2) daß ohne anfängliche innere Bewegung von B auf A, wie es vorausgesetzt wurde, u immer Null bleibt, so lange

$$Q\,(1-f_2) < (f_1+f_2)\,(P_1+P_2)\ ,$$

daß man also

$$10)\quad Q > \frac{f_1+f_2}{1-f_2}\,(P_1+P_2)$$

nehmen muß, wenn ein Zurückbleiben des obern Parallelepipedes gegen das untere eintreten soll. So lange Q diesen Werth nicht erreicht, ist $\frac{d^2u}{dt^2}$ in der Gleichung (8) Null zu setzen, und die sich ergebende Gleichung:

$$11)\quad \frac{P_1+P_2+Q}{g}\,\frac{d^2x_1}{dt^2}=Q-f_1\,(P_1+P_2)\ ,$$

welche leicht vorauszusehen ist, drückt das Gesetz der gemeinschaftlichen Bewegung der Körper A und B aus. Ueberschreitet aber Q den Werth: $\frac{f_1+f_2}{1-f_2}\,(P_1+P_2)$, so kann der Werth von $\frac{d^2u}{dt^2}$ aus der Gleichung (8) in die Gleichung (7) eingeführt werden, und man findet dann nach einigen Reductionen die Gleichung (6) wieder, nämlich

$$\frac{P_1+Q}{g}\,\frac{d^2x_1}{dt^2}=Q-f_1\,(P_1+P_2)-f_2\,P_2\ ,$$

welche nun das Gesetz für die Bewegung des Körpers A und des Gewichtes C ausdrückt.

Nehmen wir als besondern Fall $f_1=f_2=\frac{1}{2}$, so muß Q größer werden als $\frac{1}{2}\,(P_1+P_2)$, wenn überhaupt Bewegung eintreten soll, und größer als P_1+P_2, wenn das obere Parallelepiped zurückbleiben soll.

§. 99.

Die vorhergehende Aufgabe werde nun dahin abgeändert, daß der obere Körper B entfernt, daß dagegen der Faden als dehnbar ange-

nommen wird und E sein Elasticitätscoeffizient ist, daß also für eine Spannung T desselben eine relative Verlängerung $\lambda = \frac{T}{E}$ erfolgt; das Gewicht Q sei vor der Bewegung unterstützt gewesen, und die Zeit werde von dem Augenblicke an gezählt, wo dasselbe frei gelassen wird. Wir haben dann für die fortschreitende Bewegung die Gleichungen:

$$1)\quad \frac{P}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} = T - fP \quad , \qquad 2)\quad \frac{Q}{g}\frac{d^2z_2}{dt^2} = Q - T$$

und zwischen x_1 und z_2 die Bedingung:

$$3)\quad z_2 = h + x_1 + L\cdot\frac{T}{E} ,$$

worin L die natürliche Länge des Fadens und h den anfänglichen Werth von z_2 bezeichnet, während der anfängliche Werth von x_1 gleich Null vorausgesetzt wird.

Da nach unserer Annahme T am Anfang der Zeit Null ist, so darf man nicht geradezu das T zwischen den beiden Gleichungen (1) und (2) eliminiren; denn die erste Gleichung spricht die Bedingung aus, daß der Körper nicht eher anfangen kann sich zu bewegen, bis T größer als fP geworden ist. Bis zu dieser Zeit hat man also $x_1 = 0$ und die Bedingung (3) gibt die Aenderungsgesetze:

$$4)\quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{L}{E}\frac{dT}{dt} \quad , \qquad \frac{d^2z_2}{dt^2} = \frac{L}{E}\frac{d^2T}{dt^2} ,$$

von denen das letztere, in die zweite Gleichung eingeführt, die neue Beziehung:

$$5)\quad \frac{d^2T}{dt^2} = \frac{Eg}{L}\left(1 - \frac{T}{Q}\right)$$

hervorbringt, die nun in Bezug auf T integrirt werden kann. Setzt man $T = Q + u$ und $\frac{Eg}{QL} = \beta^2$, so wird

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\beta^2 u \quad , \qquad T = Q + A\cos\beta t + B\sin\beta t ;$$

und mit der Bedingung, daß T und $\frac{dT}{dt}$ mit t Null werden müssen, da auch $\frac{dz_2}{dt}$ am Anfang der Zeit Null ist, ergibt sich

$$6)\quad T = Q\,(1 - \cos\beta t) .$$

Soll also $T > fP$ werden, so muß auch $Q > \frac{1}{2} fP$ sein, da aus der letzten Gleichung $T = 2Q$ als größte Spannung des Fadens folgt. Ist dieß nicht der Fall, so bleibt der Körper A unbewegt, und das Gewicht C bewegt sich nach den Gesetzen:

$$7)\quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} = g \cos \beta t\,, \quad \frac{d z_2}{dt} = \frac{g}{\beta} \sin \beta t\,, \quad z_2 = h + \frac{g}{\beta^2}(1 - \cos \beta t),$$

welche aus (2) mit dem Werthe (6) hervorgehen; sein Schwerpunkt schwingt also zwischen den Grenzen h und $h + \frac{2g}{\beta^2}$ auf und nieder; seine größte Geschwindigkeit beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage: $z_2 = h + \frac{g}{\beta^2}$ ist $= \frac{g}{\beta}$, und seine Schwingungsdauer $= 2\pi \frac{1}{\beta}$ $= 2\pi \sqrt{\frac{QL}{Eg}}$.

Hat man dagegen $Q > \frac{1}{2} fP$, so ergibt sich eine Zeit t_0, für welche $T = fP$ wird, und welche durch die Gleichung:

$$8)\quad t_0 = \frac{1}{\beta} \operatorname{arc} \cos \left(1 - \frac{fP}{Q}\right)$$

gegeben wird; während dieser Zeit bleibt A unbewegt, und Q sinkt um die Höhe: $\Delta z_2 = \frac{g}{\beta^2} \frac{fP}{Q}$, mit dem Ende derselben tritt aber eine neue Bewegung ein, an welcher auch der Körper A Theil nimmt. Für diese Bewegung muß man nun die drei ersten Gleichungen verbinden, indem man die Werthe von $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$ und $\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ aus den beiden ersten in die aus der dritten folgende:

$$9)\quad \frac{d^2 z_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{L}{E} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

einführt und dadurch die Beziehung:

$$10)\quad \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{E}{L} g \left[1 + f - T\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{Q}\right)\right]$$

ableitet, welche sich in ähnlicher Weise wie (5) integriren läßt und dann mit der Abkürzung:

$$\frac{g}{L}\left(\frac{E}{Q}+\frac{E}{P}\right)=\beta_{,}^{2}$$

den Werth gibt:

$$11)\quad T=(1+f)\,\frac{PQ}{P+Q}+A_{,}\cos\beta_{,}t+B_{,}\sin\beta_{,}t\,.$$

Zur Bestimmung der Constanten $A_{,}$ und $B_{,}$ hat man dann die Bedingung zu beachten, daß man haben muß

$$T=fP \quad \text{und} \quad \frac{dT}{dt}=\beta Q\sqrt{\frac{fP}{Q}\left(2-\frac{fP}{Q}\right)} \quad \text{für } t=t_0\,,$$

und man findet damit

$$12)\quad \begin{cases} A_{,}=-P\left[\dfrac{Q-fP}{P+Q}\cos\beta_{,}t_0+\sqrt{f\,\dfrac{2Q-fP}{P+Q}}\,\sin\beta_{,}t_0\right], \\[2ex] B_{,}=-P\left[\dfrac{Q-fP}{P+Q}\sin\beta_{,}t_0+\sqrt{f\,\dfrac{2Q-fP}{P+Q}}\,\cos\beta_{,}t_0\right]. \end{cases}$$

Werden diese Ausdrücke in die Werthe von T und $\frac{dT}{dt}$ eingeführt, so nehmen diese die Form an:

$$13)\quad T=(1+f)\frac{PQ}{P+Q}-P\frac{Q-fP}{P+Q}\cos\beta_{,}(t-t_0)+P\sqrt{f\,\frac{2Q-fP}{P+Q}}\,\sin\beta_{,}(t-t_0)\,;$$

$$14)\quad \frac{dT}{dt}=\beta_{,}P\left[\frac{Q-fP}{P+Q}\sin\beta_{,}(t-t_0)+\sqrt{f\,\frac{2Q-fP}{P+Q}}\,\cos\beta_{,}(t-t_0)\right],$$

und die letzte Gleichung gibt für $\frac{dT}{dt}=0$ den Ausdruck:

$$15)\quad \tang\beta_{,}(t-t_0)=-\frac{\sqrt{f(P+Q)(2Q-fP)}}{Q-fP}\,,$$

um die Zeit $t-t_0$ zu bestimmen, nach welcher T einen größten oder kleinsten Werth annimmt. Setzt man daher

$Q - fP = \mp r \cos\beta_{,}(t-t_0)$, $\sqrt{f(P+Q)(2Q-fP)} = \pm r \sin\beta_{,}(t-t_0)$

in die Gleichung (13) und beachtet, daß man hat

$$r^2 = (Q-fP)^2 + f(P+Q)(2Q-fP) = Q^2(1+2f) - f^2 PQ\,,$$

so findet man für den entsprechenden größten und kleinsten Werth von T

$$16)\quad T = Q\,\frac{P}{P+Q}\left(1 + f \pm \sqrt{1 + 2f - f\frac{fP}{Q}}\right),$$

und wird daraus schließen, daß T nach der Zeit t_0 immer kleiner werden kann, als fP; denn setzt man $Q = \infty$, so wird mit dem untern Zeichen, und wenn man im Nenner P neben Q vernachlässigt,

$$T = P\left(1 + f - \sqrt{1+2f}\right)$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß der Coeffizient von P immer kleiner als f ist.

Führt man endlich den Werth (13) in die Gleichungen (1) und (2) ein, so wird die erstere

$$17)\quad \frac{P}{g}\,\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{P}{P+Q}\Big[(Q-fP)\left(1 - \cos\beta_{,}(t-t_0)\right) + \sqrt{f(P+Q)(2Q-fP)}\,\sin\beta_{,}(t-t_0)\Big]$$

und gibt mit der Beachtung, daß man $\frac{dx_1}{dt} = 0$ haben muß, wenn $t = t_0$ ist, für die Geschwindigkeit des Körpers A den Ausdruck:

$$18)\quad \frac{dx_1}{dt'} = gt'\left[\frac{Q-fP}{P+Q}\left(1 - \frac{\sin\beta_{,}t'}{\beta_{,}t'}\right) + \sqrt{\frac{f(2Q-fP)}{P+Q}}\,\frac{1-\cos\beta_{,}t'}{\beta_{,}t'}\right],$$

worin t' für $t - t_0$ steht; dieser Ausdruck zeigt, daß wenn $Q > fP$ ist, $\frac{dx_1}{dt'}$ nach der Zeit t_0 niemals Null wird, daß dieser Fall aber eintreten kann, wenn Q zwischen $\frac{1}{2}$ fP und fP liegt, und er wird in diesem Falle dazu dienen, den Werth von t' zu bestimmen, für welchen die genannte Geschwindigkeit Null wird, da sie von diesem Augenblicke an Null bleibt, bis die Spannung T wieder gleich fP geworden ist,

und da während dieser Zeit wieder das frühere Gesetz der Bewegung für das Gewicht C maßgebend wird.

Die Gleichung (2) nimmt mit dem Werthe (13) die Form an:

$$19)\quad \frac{Q}{g}\frac{d^2 z_2}{dt'^2} = \frac{Q-fP}{P+Q}(Q+P\cos\beta_{,}t') - P\sqrt{f\frac{2Q-fP}{P+Q}}\sin\beta_{,}t'$$

und gibt als erstes Integral mit der Beachtung, daß nach (7) für $t'=0$ oder $t=t_0$ die Geschwindigkeit $\frac{dz_2}{dt}$ gleich $\frac{g}{\beta}\sin\beta t_0$ geworden ist, die Beziehung:

$$20)\quad \frac{dz_2}{dt'} = \frac{g}{\beta}\sin\beta t_0 + \frac{Q-fP}{P+Q}gt' + \frac{P}{\beta_{,}Q}g\left[\frac{Q-fP}{P+Q}\sin\beta_{,}t' - \sqrt{f\frac{2Q-fP}{P+Q}}(1-\cos\beta_{,}t')\right].$$

Die Bewegungen der beiden Körper A und C sind also jede aus einer gleichförmig veränderten und aus einer oscillirenden Bewegung zusammengesetzt; in ihrem besondern Gange sind sie aber wesentlich verschieden.

Einen besondern Fall bildet der Grenzwerth $Q=fP$; für diesen wird

$$t_0 = \frac{\pi}{2\beta},\quad \beta_{,}t_0 = \frac{\beta_{,}}{\beta}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{Q}{P}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+f},$$

und man hat einfach

$$T=fP\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+f}}\sin\beta_{,}(t-t_0)\right),\quad \frac{dT}{dt}=\frac{\beta_{,}fP}{\sqrt{1+f}}\cos\beta_{,}(t-t_0);$$

das Maximum oder Minimum von T tritt also ein, wenn

$$\beta_{,}(t-t_0) = \frac{1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad = \frac{3}{2}\pi$$

geworden ist, und die entsprechenden Werthe sind

$$T = fP\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+f}}\right) \quad \text{und} \quad T = fP\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+f}}\right).$$

Ebenso werden die Gleichungen für die Bewegung der Körper A und C einfacher, und zwar findet man

$$\frac{d^2 x_1}{d t'^2} = g \frac{f}{\sqrt{1+f}} \sin \beta_, t' , \quad \frac{d x_1}{d t'} = \frac{f}{\sqrt{1+f}} \frac{g}{\beta_,} (1 - \cos \beta_, t') ,$$

$$\frac{d^2 z_2}{d t'^2} = - g \frac{1}{\sqrt{1+f}} \sin \beta_, t' , \quad \frac{d z_2}{d t'} = \frac{g}{\beta} - \frac{g}{\beta_, \sqrt{1+f}} (1 - \cos \beta_, t') ;$$

die Werthe für die Geschwindigkeiten zeigen, daß die betreffenden Bewegungen nun aus gleichförmigen und oscillirenden zusammengesetzt sind, und es wird nun leicht sein, sich diese Gesetze anschaulich darzustellen.

Wird die Reibung sehr klein, wie in dem Falle, wo der Körper A auf Rädern ruht, deren Gewicht aber nicht beträchtlich sein darf im Vergleich zu P, so kann man als erste Annäherung $f = 0$ setzen; es wird dann auch $t_0 = 0$, und die Bewegungen von P und Q fangen mit einander gleichzeitig an. Die Natur dieser Bewegungen bleibt übrigens dieselbe wie im allgemeinen Falle, wenn die Reibung berücksichtigt und so lange $\frac{d x_1}{d t'}$ nicht Null ist; ihre Gesetze sind aus den vorhergehenden Gleichungen (18) bis (20) leicht darzustellen.

§. 100.

Besonders fühlbar macht sich der Mangel unserer Kenntnisse in Betreff der Formänderung und der innern Spannungen der Körper bei derjenigen Erscheinung, welche mit dem Namen: Stoß bezeichnet wird, und welche darin besteht, daß zwei Körper, welche anfänglich außer aller Verbindung waren, während ihrer Bewegung sich begegnen und in Berührung kommen, dadurch ihre Bewegungen gegenseitig auf einander übertragen und die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpunkte der Größe und Richtung nach wesentlich ändern. Diese Aenderung der Geschwindigkeit kann aber nicht plötzlich in einem untheilbaren Augenblicke geschehen, sondern sich nur nach und nach von den zuerst in Berührung gekommenen Theilchen der beiden Körper aus allen übrigen mittheilen; es ist also immer eine bestimmte, wenn auch sehr kleine Zeit dazu erforderlich, vergleichbar mit der Dauer einer durch den Körper laufenden Wellenbewegung, und es muß mit jener Aenderung der Geschwindigkeit,

wie mit dieser Bewegung, immer eine Formänderung beider Körper verbunden sein, welche als eine Function des in jedem Augenblicke von beiden Körpern auf einander ausgeübten Druckes zu betrachten ist. Diese Formänderung ist aber nicht immer in die Grenzen eingeschlossen, welche wir im vorhergehenden Kapitel gezogen haben; sie überschreitet bei den unmittelbar getroffenen Theilchen meistens die Grenzen der vollkommenen Elasticität und verursacht eine bleibende Formänderung, und sie kann selbst so weit gehen, daß die Cohäsion dieser unmittelbar getroffenen und der übrigen Theile aufgehoben, daß einer oder beide Körper theilweise oder ganz zertrümmert werden. Von den letztern Fällen werden wir ohnehin ganz Umgang nehmen und in Betreff der übrigen müssen wir uns im Allgemeinen auf die beiden äußersten Grenzen der Elasticität beschränken, nämlich auf diejenigen Voraussetzungen, unter welchen sich die aus der Formänderung entspringenden unbekannten Kräfte eliminiren lassen, und welche darin bestehen, daß entweder

1) die sich stoßenden Körper aller Elasticität beraubt sind, daß also der Stoß beendigt ist, wenn die Formänderungen der beiden Körper für die stattfindenden Umstände die größtmöglichen geworden sind, oder wenn die Schwerpunkte derselben ihre kleinste Entfernung von einander erreicht haben, oder daß

2) die Körper vollkommen elastisch sind, daß sie nicht nur ihre frühere Form wieder ganz annehmen, was bei vielen elastischen Körpern wirklich stattfindet, da bei ihnen die getroffenen Theilchen wahrscheinlich noch über ihre ursprüngliche Lage hinausschwingen, sondern daß sie auch dabei dieselbe Kraft entwickeln, die zur Erzeugung jener Formänderung nothwendig war, und daß die Berührung beider Körper auch gerade so lange dauert, bis die aus der Wiederherstellung der ursprünglichen Form entspringende Wirkung gerade derjenigen gleich geworden ist, welche die Formänderung erzeugt hat. Wir werden aber dabei noch ferner voraussetzen, daß

3) die Zeit des Stoßes hinreichend kurz sei, um die Wirkungen der an beiden sich stoßenden Körpern angreifenden äußern Kräfte während derselben vernachlässigen zu können.

Wir wollen indessen nebenbei auch noch den besondern Fall betrachten, in welchem die Verminderung des Abstandes der Schwerpunkte beider Körper dem Drucke, den sie auf einander ausüben, proportional vorausgesetzt wird, einerseits um dadurch die Einsicht in die allgemeinen Betrachtungen zu unterstützen, und dann um zu zeigen, auf welche besondere Folgerungen die vorhergehenden allgemeinen Voraussetzungen in

diesem Falle führen, endlich um unter dieser besondern Annahme die Wirkung des Stoßes zwischen zwei nicht vollkommen elastischen oder zwischen einem nicht elastischen und einem vollkommen elastischen untersuchen zu können.

Für diese Untersuchungen betrachten wir die Körper zunächst unter den einfachsten Umständen, nämlich unter der Voraussetzung, daß die beiden Körper beim Beginne des Stoßes keine drehende Bewegung besitzen, daß ihre Geschwindigkeiten, beziehungsweise die ihrer Schwerpunkte dieselbe Richtung haben, daß diese Richtung mit der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte zusammenfällt, und daß diese Verbindungslinie zugleich für beide Körper die Normale im ersten Berührungspunkte ist. Unter diesen Voraussetzungen, unter welchen man die gegenseitige Wirkung der Körper auf einander einen centralen Stoß nennt, liegt es auf der Hand, daß durch den Stoß allein nur die Größe der Geschwindigkeiten geändert werden kann, aber nicht ihre Richtung, und daß aus dem Stoße selbst keine Ursache für eine drehende Bewegung der sich stoßenden Körper hervorgeht, und man genügt jenen Bestimmungen für die Vorstellung am einfachsten durch die Annahme, daß beide Körper von Kugelflächen begrenzt oder für unsere besondere Voraussetzung Cylinder sind, deren Achsen mit der Richtung der Geschwindigkeit zusammenfallen.

Nehmen wir demnach die Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte A und B als x-Achse an und bezeichnen deren Entfernungen von einem festen Punkte O dieser Achse beim Beginne des Stoßes, welcher der Anfang der Zeit sei, mit x'_0, x''_0, für einen spätern Zeitpunkt innerhalb der sehr kleinen Zeitdauer τ des Stoßes mit x', x''; ebenso die Geschwindigkeiten derselben mit v'_0, v''_0 für den Anfang der Zeit, mit v', v'' für das Ende der veränderlichen Zeit t, wobei wir annehmen, daß v'_0 und v''_0 in gleichem Sinne und zwar im Sinne der positiven x gerichtet und daher $v''_0 > v'_0$ sei; bezeichnen dann noch m' und m'' die Massen der beiden Körper und N den Druck, welchen diese in irgend einem Augenblicke auf einander ausüben: so haben wir mit Vernachlässigung der äußern Kräfte für die Bewegung der Punkte A und B die einfachen Gleichungen:

$$a.)\qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = N\ ,\qquad m''\frac{d^2x''}{dt^2} = -N$$

und die Bedingung:

$$b.)\qquad x' - x'' = x'_0 - x''_0 - f(N)\ ,$$

worin $f(N)$ die unbekannte Function von N bezeichnet, durch welche die gegenseitige Näherung der beiden Punkte A und B bedingt wird. Für unsere spezielle Annahme haben wir demnach und wenn noch k einen von der Elasticität der beiden Körper und von ihren Dimensionen abhängigen Coeffizienten bezeichnet, die Bedingung:

$$x' - x'' = x'_0 - x''_0 - kN. \qquad (c.$$

Differenzirt man die Gleichungen (b) und (c) und führt die Werthe für $\frac{d^2x'}{dt^2}$ und $\frac{d^2x''}{dt^2}$ in die neue Gleichung ein, so wird diese

$$\frac{d^2.f(N)}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m'} + \frac{1}{m''}\right) N = k\frac{d^2N}{dt^2} \qquad (d.$$

und gibt nach ausgeführter Integration den Werth von N in Function von t. In unserm besondern Falle haben wir

$$N = F\cos\gamma t + G\sin\gamma t, \qquad (e.$$

wenn γ^2 für $\frac{m'+m''}{k\,m'\,m''}$ gesetzt wird; für $t=0$ wird $x'-x''=x'_0-x''_0$, und man hat daher auch $N=0$, $F=0$; ferner wird nach (c) und (e)

$$\frac{dx'}{dt} - \frac{dx''}{dt} = -k\frac{dN}{dt}, \qquad \frac{dN}{dt} = \gamma G\cos\gamma t,$$

also für den Anfang der Zeit

$$\gamma G = \left(\frac{dN}{dt}\right)_0 = -\frac{1}{k}(v'_0 - v''_0), \qquad G = \frac{1}{\gamma k}(v''_0 - v'_0)$$

und für irgend einen Zeitpunkt

$$N = \frac{1}{\gamma k}(v''_0 - v'_0)\sin\gamma t. \qquad (f.$$

Addirt man nun die beiden Gleichungen (a) und integrirt das Ergebniß in Bezug auf t, so folgt das Gesetz der äußern Bewegung der zu einem veränderlichen System vereinigten Körper A und B, nämlich

$$m'v' + m''v'' = m'v'_0 + m''v''_0, \qquad (g.$$

welches ausspricht, daß die Bewegungsgröße dieses Systems während

des Stoßes ungeändert bleibt, und diese Gleichung führt durch eine zweite Integration auf den Ausdruck:

$$m'x' + m''x'' = m'x'_0 + m''x''_0 + (m'v'_0 + m''v''_0)\,t$$

oder auf das Gesetz der gleichförmigen Bewegung des Mittelpunktes der Masse beider Körper; dieses kommt aber im jetzigen Falle durch Vernachlässigung des letzten Gliedes wegen des sehr kleinen Werthes von t auf

$$\text{h.)} \qquad m'x' + m''x'' = m'x'_0 + m''x''_0$$

zurück und spricht so aus, daß der Mittelpunkt der Masse beider Körper während des Stoßes eine fast unveränderte Lage behält.

Führen wir dann den aus der Gleichung (d) sich ergebenden Werth von N in der Form: $N = \varphi(t)$ oder bei unserer besondern Voraussetzung den Werth (f) in die Gleichungen (a) ein, so werden diese in Bezug auf t integrirbar und geben allgemein

$$\text{i.)} \quad \begin{cases} m'v' = m'v'_0 + \int_0^t dt\,.\,\varphi(t)\,, & m''v'' = m''v''_0 - \int_0^t dt\,.\,\varphi(t)\,, \\ \quad = m'v'_0 + \Phi(t)\,, & \quad = m''v''_0 - \Phi(t)\,, \end{cases}$$

und für unsere Annahme

$$\text{k.)} \quad \begin{cases} m'v' = m'v'_0 + \dfrac{v''_0 - v'_0}{\gamma^2 k}(1 - \cos\gamma t)\,, \\ m''v'' = m''v''_0 - \dfrac{v''_0 - v'_0}{\gamma^2 k}(1 - \cos\gamma t)\,. \end{cases}$$

Die Differenz der mit m′ und m″ dividirten Gleichungen (i) und (k) gibt mit Berücksichtigung des Werthes von γ^2 die Gleichungen:

$$\text{l.)} \quad \begin{cases} v'' - v' = v''_0 - v'_0 - \left(\dfrac{1}{m'} + \dfrac{1}{m''}\right)\Phi(t)\,, \\ v'' - v' = (v''_0 - v'_0)\cos\gamma t\,, \end{cases}$$

von denen die erste zeigt, daß im Allgemeinen $v'' - v'$ Null ist oder daß die Schwerpunkte A und B gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben, wenn

$$\Phi(t) = \frac{m'm''}{m'+m''}(v''_0 - v'_0) \qquad (\text{m.}$$

geworden ist; aus der zweiten Gleichung folgt für diesen Fall einfach $\gamma t = \frac{1}{2}\pi$. Aus diesen Gleichungen zieht man aber auch durch Integration nach t die entsprechenden Werthe von $x'' - x'$, nämlich

$$\left.\begin{aligned} x' - x'' &= x'_0 - x''_0 - (v''_0 - v'_0)t + \frac{m'+m''}{m'm''}\int_0^t dt\,\Phi(t)\,, \\ x' - x'' &= x'_0 - x''_0 - \frac{1}{\gamma}(v''_0 - v'_0)\sin\gamma t\,, \end{aligned}\right\} \qquad (\text{n.}$$

und schließt daraus, daß $x'' - x'$ mit $v'' - v' = -\frac{d(x' - x'')}{dt} = 0$ ein Minimum geworden ist, daß sich also in dem entsprechenden Augenblicke die beiden Schwerpunkte A und B am meisten genähert haben und die gegenseitigen Eindrücke am größten geworden sind.

Werden nun die beiden Körper als gänzlich unelastisch angenommen, so ist der Widerstand, welchen sie gegen die Aenderung ihrer Form leisten, ein ähnlicher, wie die Reibung; er dauert nur so lange, als Formänderung stattfindet, und verschwindet mit der Ursache zur Formänderung, also in dem Augenblicke, wo die Geschwindigkeiten beider Körper gleich geworden sind und die Formänderung den größten Werth erreicht hat. Für gänzlich unelastische Körper muß demnach der Stoß in dem Zeitpunkt endigen, für welchen das t aus der Gleichung (m) hervorgeht, und die von diesem Augenblicke an gemeinschaftliche Geschwindigkeit V beider Körper ergibt sich aus den Gleichungen (i), wenn darin der Werth (m) eingeführt wird; man findet so für V den von k oder allgemein von der Form der Function $f(N)$ unabhängigen Werth:

$$V = \frac{m'v'_0 + m''v''_0}{m' + m''}\,, \qquad (180.$$

welcher übrigens mit dem vorhergehenden Schluß, daß der Stoß unelastischer Körper mit dem Gleichwerden der Geschwindigkeiten endigen muß, unmittelbar aus der Gleichung (g) hervorgeht. Mit unserer besonderen Annahme ergeben sich dann noch für die Dauer τ_1 des Stoßes und für die Summe der Eindrücke: $i' + i'' = x'_0 - x''_0 - (x' - x'')$ an beiden Körpern die Werthe:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{2\gamma} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{k m' m''}{m'+m''}} \quad , \quad i'+i'' = (v''_0 - v'_0)\sqrt{\frac{k m' m''}{m'+m''}} ,$$

welche bei sonst gleichen Umständen um so kleiner werden, je kleiner der Coeffizient k ist. Dieser Coeffizient wird die Form haben:

$$k = \frac{a'}{E'} + \frac{a''}{E''} ,$$

worin a' und a'' die Abstände des ersten Berührungspunktes von den Punkten A und B bezeichnen, so daß $a' + a'' = x'_0 - x''_0$ ist, und E' und E'' solche Druckkräfte vorstellen, durch welche jener Berührungspunkt den Punkten A und B um die Längeneinheit genähert wird. Die Dauer des Stoßes und die Tiefe der Eindrücke wird demnach um so kleiner, je kleiner a' und a'' und je größer die E' und E'' sind. Für $m'' = m'$, $a'' = a'$, $E'' = E'$ hat man mit Weglassung der Accente einfach

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{m a}{E}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}\frac{p}{E}} \quad , \quad i'+i'' = (v''_0 - v'_0)\sqrt{\frac{a}{g}\frac{p}{E}} ,$$

worin nun p das Gewicht eines der beiden Körper bezeichnet.

Sind dagegen beide Körper in der oben ausgesprochenen Weise vollkommen elastisch, so wird nach der Zeit τ_1 die Differenz $x' - x''$ wieder wachsen, also das Integral der ersten Gleichung (n) größer werden als $(v''_0 - v'_0)\,t$, und zwar so, daß die Differenz $x' - x''$ für $t = \tau_1 + t'$ wieder denselben Werth erhält, welchen sie für $t = \tau_1 - t'$ hatte, daß sie also auch mit $t = 2\tau_1$ wieder ihren anfänglichen Werth $x'_0 - x''_0$ erhält, und daher

$$\text{o.)} \quad \int_0^{2\tau_1} dt . \Phi(t) = 2\int_0^{\tau_1} dt\, \Phi(t) = 2\,\frac{m' m''}{m'+m''}\,(v''_0 - v'_0)\,\tau_1$$

geworden ist. Soll dann in diesem Augenblicke auch der Stoß sein Ende erreichen, so muß auch der Druck N mit $t = 2\tau_1 = \tau_2$ Null werden, also $\varphi(\tau_2) = 0$ und $\Phi(\tau_2)$ ein größter Werth der Function $\Phi(t)$ sein. Man wird nach diesem ferner annehmen müssen, daß auch $\varphi(\tau_1 + t') = \varphi(\tau_1 - t')$ und demnach

$$\text{p.)} \qquad \Phi(\tau_2) = 2\,\Phi(\tau_1) = 2\,\frac{m' m''}{m'+m''}\,(v''_0 - v'_0)$$

sei, und man wird damit für die Geschwindigkeiten V' und V'' am Ende des Stoßes vollkommen elastischer Körper die ebenfalls von $f(N)$ unabhängigen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} V' &= v'_0 + \frac{2m''}{m'+m''}(v''_0 - v'_0)\,, \quad & V'' &= v''_0 - \frac{2m'}{m'+m''}(v''_0 - v'_0)\,, \\ &= \frac{(m'-m'')v'_0 + 2m''v''_0}{m'+m''}\,, & &= \frac{(m''-m')v''_0 + 2m'v'_0}{m'+m''}\,, \\ & & V' - V'' &= v''_0 - v'_0 \end{aligned}\right\} (181.$$

erhalten, von denen der letzte ausspricht, daß im jetzigen Falle die Differenz der Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes dem Unterschiede derselben am Anfange des Stoßes gleich, aber entgegengesetzt ist.

Unsere besondere Annahme entspricht allen vorher erörterten Verhältnissen in sehr einfacher Weise; denn man hat für $\gamma t = \pi$ die Werthe: $N = 0$; $v'' - v' = -(v''_0 - v'_0)$, $x' - x'' = x'_0 - x''_0$, u. s. f. und findet noch für die ganze Dauer τ_2 des elastischen Stoßes den Ausdruck:

$$\tau_2 = \pi \sqrt{\frac{k\,m'm''}{m'+m''}} = \pi \sqrt{\left(\frac{a'}{E'} + \frac{a''}{E''}\right)\frac{m'm''}{m'+m''}}\,,$$

welcher mit der halben Schwingungsdauer eines materiellen Punktes übereinkommt, an dem eine beschleunigende Kraft $\frac{R}{m} = \frac{E'}{m'a'} \cdot \frac{(m'+m'')a'E''}{m''(a'E''+a''E')}$ (Buch I, §. 82, u. f.) angreift.

Wenn die beiden Körper, oder auch nur einer, nicht vollkommen elastisch sind, so ist die Function $\varphi(t)$ nicht nur nicht symmetrisch in Bezug auf t vor und nach der Zeit τ_1, sie ist nicht einmal stetig, sondern erleidet bei τ_1 eine Aenderung der Form, oder es tritt hier für $\varphi(t)$ eine neue Function $\varphi_1(t)$ ein. Man muß daher in diesem Falle den ganzen Stoß als aus zwei gänzlich verschiedenen Zuständen zusammengesetzt betrachten; der erste Theil verläuft immer auf gleiche Weise, wie in den vorhergehenden Fällen, und endigt mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V, welche durch den Werth (180) ausgedrückt ist, und mit einem größten Werthe von $\varphi(t)$ oder N; der zweite Theil beginnt ebenso mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V, aber mit dem größten Werthe einer neuen Function: $\varphi_1(t) = N$, welcher

demjenigen der Function φ (t) gleich ist, und endigt mit N = 0, ohne daß die Differenz $x' - x''$ ihren ursprünglichen Werth $x'_0 - x''_0$ erreicht. Für diese am meisten vorkommenden Fälle wird daher $\Phi(\tau_2)$ nicht mehr gleich $2\Phi(\tau_1)$, sondern kleiner; die Geschwindigkeiten am Ende des Stoßes erreichen nur Mittelwerthe zwischen dem Werthe (180) und dem entsprechenden der Werthe (181), und man kann diese Endgeschwindigkeiten V' und V'' nicht berechnen, ohne die Function f (N) oder φ (t) wenigstens nach der Zeit τ_1 zu kennen, da es in allen diesen Fällen genügen wird, die Werthe von V' und V'' aus den Gleichungen (i) zwischen den Grenzen τ'_2 und τ'_1 zu bestimmen, ihnen also die Form zu geben:

$$\text{q.)}\quad V' = V + \frac{1}{m'}\int_{\tau'_1}^{\tau'_2} dt\,\varphi_2(t)\ ,\qquad V'' = V - \frac{1}{m''}\int_{\tau'_1}^{\tau'_2} dt\,\varphi_2(t)\ ,$$

worin τ'_1 und τ'_2 die dem Anfang und Ende der zweiten Hälfte des Stoßes entsprechenden Werthe von t vorstellen.

Nehmen wir z. B. für unsere besondere Voraussetzung an, daß einer von unsern Cylindern vollkommen elastisch, der andere vollkommen unelastisch sei, so wird der Werth (f) von N vor und nach der Zeit τ_1 dieselbe allgemeine Form behalten; aber es wird der Coeffizient k und in Folge dessen auch γ nach der Zeit τ_1 einen andern Werth annehmen, da man nur noch haben kann

$$\text{r.)}\qquad k_, = \frac{a'}{E'}\quad \text{oder} \quad = \frac{a''}{E''}\ ,$$

je nachdem der Cylinder A oder der Cylinder B als elastisch vorausgesetzt wird. Man muß demnach mit dem Anfang der zweiten Hälfte des Stoßes für N die Function:

$$N = F_{,}\cos\gamma_{,}t + G_{,}\sin\gamma_{,}t$$

nehmen, worin wieder $\gamma_,^2$ für $\frac{m'+m''}{k_, m' m''}$ gesetzt ist, und worin die Coeffizienten $F_,$ und $G_,$ so bestimmt werden, daß für den Anfang der zweiten Hälfte des Stoßes oder für $t = \tau'_1 = 0$ dieselben Werthe für N und $\frac{dN}{dt}$ zum Vorschein kommen, wie bei der Function:

$$N = \frac{v''_0 - v'_0}{\gamma k}\sin\gamma t$$

für $\gamma_{,}t = \frac{1}{2}\pi$; man findet dadurch für die zweite Hälfte des Stoßes

$$N = \frac{v''_0 - v'_0}{\gamma k} \cos \gamma_{,} t$$

und schließt daraus, daß derselbe endigt, wenn $\gamma_{,}t = \frac{1}{2}\pi$ geworden ist. Die Endgeschwindigkeiten sind demnach

$$V' = V + \int_0^{\frac{\pi}{2\gamma_{,}}} dt . \frac{v''_0 - v'_0}{m' \gamma k} \cos \gamma_{,} t = V + \frac{v''_0 - v'_0}{m' \gamma \gamma_{,} k},$$

$$V'' = V - \frac{v''_0 - v'_0}{m'' \gamma \gamma_{,} k}$$

und gehen mit Einführung der Werthe:

$$\gamma k = \sqrt{\frac{m' + m''}{m' m''} k} \quad \text{und} \quad \gamma_{,} = \sqrt{\frac{m' + m''}{m' m''} \frac{1}{k_{,}}}$$

in die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} V' &= V + \frac{m''}{m' + m''} (v''_0 - v'_0) \sqrt{\frac{k_{,}}{k}} \\ V'' &= V - \frac{m'}{m' + m''} (v''_0 - v'_0) \sqrt{\frac{k_{,}}{k}} \end{aligned} \right\} \quad (s.$$

über, von denen im Allgemeinen der eine kleiner, der andere größer ist, als der entsprechende der Werthe (181), weil $\frac{k_{,}}{k}$ ein ächter Bruch sein muß, und welche auf diese Werthe zurückkommen, wenn $k_{,} = k$ wird, dagegen auf den Werth (180), wenn $k_{,} = 0$, wenn also auch der zweite Körper als unelastisch vorausgesetzt wird.

Dieselbe Form (s) werden aber die Werthe der Endgeschwindigkeiten V' und V'' unter unserer besondern Voraussetzung auch behalten, wenn beide Körper nicht vollkommen elastisch sind, wenn die Eindrücke nicht ganz so bleiben, wie sie am Ende der ersten Hälfte des Stoßes waren, wenn aber am Ende der zweiten Hälfte noch Eindrücke übrig

bleiben. Man kann dann den Coeffizienten k aus zwei andern k_1 und k_2 zusammengesetzt denken von der Form:

$$k_1 = \frac{a'}{E'_1} + \frac{a''}{E''_1}\,, \qquad k_2 = \frac{a'}{E'_2} + \frac{a''}{E''_2}\,,$$

von denen der erste den bleibenden Eindrücken entspricht, welcher also gleichsam den nichtelastischen Widerstand beider Körper vorstellt und daher mit dem Anfange der zweiten Hälfte des Stoßes verschwindet, während k_2 den vollkommen elastischen Widerstand ausdrückt und daher unverändert bleibt bis an das Ende des Stoßes, und nach dem Vorhergehenden wird man sich leicht überzeugen, daß man mit den Werthen:

$$182.)\quad \begin{cases} V' = V + \dfrac{m''}{m'+m''}(v''_0 - v'_0)\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1+k_2}}\,, \\[2ex] V'' = V - \dfrac{m'}{m'+m''}(v''_0 - v'_0)\sqrt{\dfrac{k_2}{k_1+k_2}} \end{cases}$$

für unsere besondere Voraussetzung: $f(N) = kN$ alle Fälle des centralen Stoßes zweier Körper umfaßt.

Es handelt sich daher nur noch um die Bestimmung der Coeffizienten $k_1 + k_2$ oder k und k_2; der erstere ergibt sich aber unmittelbar dadurch, daß man prismatische Stäbe von demselben Stoffe und demselben Querschnitte wie die sich stoßenden Cylinder durch ein Gewicht Q staut, das Verhältniß der Verkürzung zur ursprünglichen Länge bestimmt und darnach die entsprechenden Elasticitätscoeffizienten berechnet; der Coeffizient k_2 wird dadurch gefunden, daß man untersucht, um wie viel sich die Stäbe unmittelbar nach der Wegnahme des Gewichtes Q wieder ausdehnen, und die Elasticitätscoeffizienten unter der Voraussetzung berechnet, als seien jene Stäbe durch das Gewicht Q nur um soviel gestaut worden, als sie sich nach Wegnahme desselben wieder ausgedehnt haben. Wären demnach die Körper vollkommen unelastisch, so müßte man sie für den Coeffizienten k_2 als gänzlich unzusammendrückbar betrachten und $E'_2 = E''_2 = \infty$, folglich $k_2 = 0$ nehmen, wodurch die Werthe (182) auf den von V in (180) zurückkommen; bei vollkommener Elasticität dagegen wird $E'_2 = E'$, $E''_2 = E''$, $k_2 = k$, $k_1 = 0$, und aus den Gleichungen (182) gehen wieder die Werthe (181) hervor. Ebenso wird man leicht das dem vorhergehenden Falle, nämlich dem Stoß eines vollkommen elastischen und eines nicht elastischen

Körpers entsprechende k_2 bestimmen und so alle Fälle unter den Gleichungen (182) vereinigen können.

§. 101.

Betrachten wir zunächst noch einige besondere einfache Fälle, und zwar zuerst den, wenn die beiden Massen m' und m'' der sich stoßenden Körper gleich sind. Es wird dann $V = \frac{1}{2}(v'_0 + v''_0)$, d. h. die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beim unelastischen Stoß ist das arithmetische Mittel aus den Anfangs-Geschwindigkeiten, und wenn daher $v'_0 = -v''_0$ ist, wenn sich also beide Körper mit gleichen Geschwindigkeiten begegnen, so wird $V = 0$. Zwei vollkommen unelastische Körper von gleichen Massen und mit gleichen, aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten begabt, müßten also nach dem Stoße, ohne sich wieder zu trennen, vollkommen in Ruhe bleiben. Für vollkommen elastische Körper hat man, wenn $m'' = m'$,

$$V' = \frac{1}{2}(v'_0 + v''_0) + \frac{1}{2}(v''_0 - v'_0) = v''_0 \,,$$

$$V'' = \frac{1}{2}(v'_0 + v''_0) - \frac{1}{2}(v''_0 - v'_0) = v'_0 \;;$$

in diesem Falle tauschen also beide Körper ihre Geschwindigkeiten, und die Wirkung des Stoßes ist dieselbe, als wenn beide Körper selbst an dem Orte ihres Zusammentreffens gegenseitig ausgetauscht würden. Begegnen sich daher beide Körper mit gleichen Geschwindigkeiten, so daß $v'_0 = -v''_0 = -v_0$, so wird $V' = +v_0$, $V'' = -v_0$; es wechselt dann jeder von ihnen den Sinn seiner Bewegung und kehrt mit gleicher Geschwindigkeit dahin zurück, woher er gekommen ist. Die Gleichungen (182) geben für $m'' = m'$ die Werthe:

$$V' = \frac{1}{2}(v'_0 + v''_0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_2}{k}}(v''_0 - v'_0) = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k_2}}{2\sqrt{k}} v''_0 + \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k_2}}{2\sqrt{k}} v'_0 \,,$$

$$V'' = \frac{1}{2}(v'_0 + v''_0) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k_2}{k}}(v''_0 - v'_0) = \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k_2}}{2\sqrt{k}} v'_0 + \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k_2}}{2\sqrt{k}} v''_0 \,,$$

und wenn $v' = -v''_0 = -v_0$ wird, hat man

$$V' = - V'' = \sqrt{\frac{k_2}{k}}\, v_0 ,$$

und dieser Ausdruck kann, auf entsprechende Versuche angewendet, dazu dienen, das Verhältniß $\sqrt{\frac{k_2}{k}}$ für verschiedene Stoffe zu bestimmen und zu untersuchen, ob dasselbe auch für andere Körperformen als Cylinder gültig ist, ob es nämlich für verschiedene v_0 constant bleibt.

Wenn ferner die Masse m' des gestoßenen Körpers A so groß ist, daß die Masse m'' in der Summe: $m' + m''$ vernachlässigt werden kann, so wird für vollkommen unelastische Körper $V = v'$; für vollkommen elastische Körper hat man $V' = v'_0$, $V'' = 2v'_0 - v''_0$, und für theilweise elastische wird $V' = v'_0$, $V'' = v'_0 \left(1 + \sqrt{\frac{k_2}{k}}\right) - v''_0 \sqrt{\frac{k_2}{k}}$; in allen Fällen bleibt also der äußere Zustand der Masse m' ungeändert, ist dabei aber von wesentlichem Einfluß auf den der Masse m''. Besonders beachtenswerth ist der Fall, wo die Masse m' in Ruhe, also $v'_0 = 0$ ist; man hat dann für nicht-elastische Körper $V = 0$, die Masse m'' verliert einfach ihre Bewegung; für vollkommen elastische Körper wird $V'' = - v''_0$, und der Körper B springt mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit v''_0 von der Masse m' zurück, während dieses Zurückspringen bei theilweise elastischen Körpern nur mit der Geschwindigkeit $\mu v''_0$ erfolgt, wenn der Coeffizient $\frac{k_2}{k}$ durch μ^2 ersetzt wird.

Läßt man z. B. eine Kugel von einer Höhe h_1 herab auf einen andern mit der Erde in fester Verbindung stehenden Körper fallen, so wird sie diesen ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes mit der Geschwindigkeit $v''_0 = \sqrt{2gh_1}$ treffen und daher mit der Geschwindigkeit $V'' = \sqrt{2g\mu h_1}$ wieder zurückspringen, folglich die Höhe $h_2 = \frac{k_2}{k} h_1$ erreichen. Von dieser zurückfallend erwirbt sie sich die Geschwindigkeit: $\sqrt{2g\mu^2 h_1}$ und tauscht diese durch den zweiten Stoß in die aufwärts-gerichtete Geschwindigkeit: $\sqrt{2g\mu^4 h_1}$ um, mit welcher sie die Höhe $h_3 = \mu^4 h_1$ erreicht, u. s. f. Die experimentelle Bestimmung dieser Steighöhen gäbe demnach ebenfalls ein Mittel zur Bestimmung des Coeffizienten μ^2.

§. 102.

Besonders charakteristisch für die Wirkung des Stoßes ist die während des Stoßes und durch ihn allein eintretende Aenderung der lebendigen Kraft der sich stoßenden Körper.

Diese Aenderung stellt sich allgemein in der Differenz:

$$m' v'^2_0 + m'' v''^2_0 - m' V'^2 - m'' V''^2$$

dar, welche mit Einführung der Werthe (182) für V' und V'' zunächst die Form:

$$m' v'^2_0 + m'' v''^2_0 - (m' + m'') V^2 - \frac{m' m''}{m' + m''} \mu^2 (v''_0 - v'_0)^2$$

annimmt und dann mit der Beachtung, daß man nach (180) hat

$$(m' + m'') V = m' v'_0 + m'' v''_0 ,$$

in den einfachen Ausdruck:

$$(1 - \mu^2) \frac{m' m''}{m' + m''} (v''_0 - v'_0)^2 \qquad (183.$$

übergeht. Dieser zeigt sogleich, daß die Aenderung der lebendigen Kraft während des Stoßes immer in einem Verluste an lebendiger Kraft besteht, weil μ^2 höchstens gleich 1 werden kann, und daß dieser Verlust um so kleiner wird, je mehr sich μ^2 der Einheit nähert, je mehr elastisch also die sich stoßenden Körper sind. Nur für vollkommen elastische Körper würde kein Verlust an lebendiger Kraft stattfinden.

Ebenso zeigt der vorhergehende Werth, daß der größte Verlust bei gänzlichem Mangel an Elasticität eintritt, und man wird sich dieß leicht daraus erklären, daß die verlorene Kraft für die Aenderung der Gestalt verwendet wurde und verloren bleibt, wenn diese Aenderung fortbesteht. Dieser größte Verlust ist nach dem obigen allgemeinen Werthe gleich

$$\frac{m' m''}{m' + m''} (v''_0 - v'_0)^2 ,$$

er läßt sich aber so nicht einfach in Worten ausdrücken; nimmt man dagegen den unmittelbaren Ausdruck:

$$m' v'^2_0 + m'' v''^2_0 - (m' + m'') V^2$$

und setzt noch die Größe:

$$2(m'+m'')V^2 - 2(m'v'_0+m''v''_0)V = 0$$

hinzu, so nimmt derselbe die Form an:

184.) $$m'(v'_0-V)^2 + m''(v''_0-V)^2$$

und spricht so aus, daß der Verlust an lebendiger Kraft bei dem einfachen centralen Stoß unelastischer Körper der Summe von lebendiger Kraft gleich ist, welche der Geschwindigkeitsänderung jedes einzelnen Körpers entspricht.

Nach diesem kann man dann auch dem allgemeinen Werthe (183) die ähnliche Form:

$$(1-\mu^2)\left[m'(v'_0-V)^2 + m''(v''_0-V)^2\right]$$

geben und sagen, der Verlust an lebendiger Kraft bei dem Stoße theilweise elastischer Körper verhält sich zu dem, wenn sie unelastisch wären, oder zu dem, welcher bis zum Ende der ersten Hälfte des Stoßes statt hatte, wie $1-\mu^2$ zu 1. Man hat aber auch nach (182)

$$\mu\frac{m'm''}{m'+m''}(v''_0-v'_0) = m'(V'-V) = m''(V-V''),$$

$$0 = m'V'+m''V''-(m'+m'')V;$$

es steht also die gemeinschaftliche Geschwindigkeit in der Mitte des Stoßes zu den Endgeschwindigkeiten V' und V'' in einer ähnlichen Beziehung, wie zu den Anfangsgeschwindigkeiten v'_0 und v''_0, und es ist damit auf demselben Wege wie vorher leicht abzuleiten, daß der Zuwachs an lebendiger Kraft während der zweiten Hälfte des Stoßes, für welchen sich oben der Werth:

$$\mu^2\frac{m'm''}{m'+m''}(v''_0-v'_0)^2$$

ergeben hat, in entsprechender Weise durch

185.) $$m'(V'-V)^2 + m''(V''-V)^2$$

ausgedrückt werden kann und demnach auch der Summe von lebendiger Kraft gleich ist, welche der Geschwindigkeitsänderung jedes einzelnen Körpers in der zweiten Hälfte des Stoßes entspricht.

Man wird daraus zunächst den einfachen Schluß ziehen, daß die ganze Aenderung an lebendiger Kraft bei theilweise elastischen Körpern auch durch

$$m'[(v'_0 - V)^2 - (V' - V)^2] + m''[(v''_0 - V)^2 + (V'' - V)^2] \quad (186.$$

ausgedrückt und darnach leicht noch in andern Formeln dargestellt werden kann. Man wird daraus aber noch ferner schließen, daß wenn ein System, dessen einzelne Theile alle eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit haben, während seiner Bewegung durch eine innere Kraft plötzlich in zwei Theile zersprengt wird, das ganze System einen Zuwachs an lebendiger Kraft gewinnt, welcher sich durch Summirung der den plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen beider Theile entsprechenden lebendigen Kräfte ausdrücken läßt. Es dürfte dabei indessen nicht überflüssig sein, sich daran zu erinnern, daß nach den Gesetzen der äußern Bewegung der Mittelpunkt der Masse des Systems nach dem Zerspringen desselben seine Bewegung gerade so fortsetzt, als wenn die Theilung nicht stattgefunden hätte, vorausgesetzt, daß sich durch diese Theilung nichts in der Intensität der äußern Kräfte ändert.

§. 103.

Gehen wir nun zu einem allgemeineren Falle über und setzen voraus, daß die Mittelpunkte A und B der sich stoßenden Körper bei der ersten Berührung beliebig gerichtete Geschwindigkeiten besitzen, welche jedoch mit der Bedingung, daß ein Stoß stattfindet, vereinbar sein müssen, daß aber noch wie vorher die Normale im ersten Berührungspunkte mit der Verbindungslinie der beiden Schwerpunkte zusammenfällt, daß die Körper beim Beginne des Stoßes keine drehende Bewegung besitzen, und daß für die Dauer des Stoßes von der Wirkung der äußern Kräfte, also von einer Aenderung der Größe und Richtung der Anfangsgeschwindigkeiten durch diese Kräfte ebenso wie von einer Aenderung der Lage Umgang genommen werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen darf offenbar angenommen werden, daß der Stoß nur in der Richtung der Normalen im Berührungspunkte der beiden Körper stattfindet, daß also nur die nach diesen Geraden gerichteten Geschwindigkeiten durch den Stoß, und zwar gemäß der vorhergehenden Untersuchung geändert werden, während die dazu senkrechten Componenten der Geschwindigkeiten ungeändert bleiben. Diese Annahme ist übrigens eine nothwendige Folge der auf die obigen Voraussetzungen gegründeten Gleichungen der

Bewegungen der beiden Mittelpunkte A und B während der sehr kurzen Dauer τ des Stoßes. Denn bezeichnet man die Geschwindigkeiten von A und B am Anfang des Stoßes mit v' und v'', ihre Componenten nach drei rechtwinkligen Coordinaten-Achsen mit u'_x, u'_y, u'_z und u''_x, u''_y, u''_z, dieselben Größen am Ende der zwischen 0 und τ liegenden Zeit t mit v' und v'', dann mit u'_x und u''_x, u. s. f., ferner die Winkel, welche die Normale im Berührungspunkte, also auch der Druck N mit den drei Achsen bildet, mit λ, μ, ν und zwar in der Art, daß diese Winkel insbesondere für den auf den Punkt A wirkenden Druck gelten, so werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung der Punkte A und B folgende:

$$\text{A.)}\quad \begin{cases} m'\dfrac{du'_x}{dt} - N\cos\lambda = 0\,, & m''\dfrac{du''_x}{dt} + N\cos\lambda = 0,\\[2ex] m'\dfrac{du'_y}{dt} - N\cos\mu = 0\,, & m''\dfrac{du''_y}{dt} + N\cos\mu = 0,\\[2ex] m'\dfrac{du'_z}{dt} - N\cos\nu = 0\,, & m''\dfrac{du''_z}{dt} + N\cos\nu = 0. \end{cases}$$

Multiplizirt man diese der Reihe nach mit $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ und summirt die Producte, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{B.)}\quad \begin{cases} m'\dfrac{d.(u'_x\cos\lambda + u'_y\cos\mu + u'_z\cos\nu)}{dt} = m'\dfrac{dw'_1}{dt} = +N,\\[2ex] m''\dfrac{d.(u''_x\cos\lambda + u''_y\cos\mu + u''_z\cos\nu)}{dt} = m''\dfrac{dw''_1}{dt} = -N, \end{cases}$$

welche, verglichen mit den Gleichungen (a) in §. 100, aussprechen, daß die nach den Normalen im Berührungspunkte gerichteten Componenten: $u'_x\cos\lambda + u'_y\cos\mu + u'_z\cos\nu = w'_1$ und $u''_x\cos\lambda + u''_y\cos\mu + u''_z\cos\nu = w''_1$ der Geschwindigkeiten v' und v'' sich in derselben Weise durch den Stoß ändern, wie die Geschwindigkeiten v' und v'' selbst bei dem in den vorhergehenden §§. untersuchten einfachen centralen Stoß.

Multiplizirt man dagegen die drei ersten der Gleichungen (A) mit $\cos p'$, $\cos q'$, $\cos r'$, die drei letzten mit $\cos p''$, $\cos q''$, $\cos r''$, summirt die Producte und stellt die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos p' \cos\lambda + \cos q' \cos\mu + \cos r' \cos\nu = 0 \,, \\ \cos p'' \cos\lambda + \cos q'' \cos\mu + \cos r'' \cos\nu = 0 \,, \end{aligned}\right\}$$

welche verlangen, daß die durch p′ (q′, r′) und p″, q″, r″ bestimmten Richtungen zu der Normalen im Berührungspunkte senkrecht seien, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,.(u'_x \cos p' + u'_y \cos q' + u'_z \cos r')}{dt} = 0 \,, \\ \frac{d\,.(u''_x \cos p'' + u''_y \cos q'' + u''_z \cos r'')}{dt} = 0 \,, \end{aligned}\right\} \quad (C.$$

und diese sprechen aus, daß alle zu jener Normalen senkrechte Componenten der Geschwindigkeiten v′ und v″ ungeändert bleiben. Dasselbe gilt insbesondere von den mit diesen Geschwindigkeiten und ihren normalen Componenten w'_1 oder w''_1 in einer Ebene liegenden tangentialen Componenten W'_2 und W''_2, für welche man hat

$$\begin{aligned} W'^2_2 &= V'^2 - W'^2_1 \\ &= (U'_x \cos\mu - U'_y \cos\lambda)^2 + (U'_z \cos\lambda - U'_x \cos\nu)^2 \\ &\qquad + (U'_y \cos\nu - U'_z \cos\mu)^2 \,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W''^2_2 &= V''^2 - W''^2_1 \\ &= (U''_x \cos\mu - U''_y \cos\lambda)^2 + (U''_z \cos\lambda - U''_x \cos\nu)^2 \\ &\qquad + (U''_y \cos\nu - U''_z \cos\mu)^2 \,, \end{aligned}$$

und deren Componenten nach den drei Achsen durch

$$W'_2 \cos p' = U'_x - W'_1 \cos\lambda \,, \quad W'_2 \cos q' = U'_y - W'_1 \cos\mu \,,$$
$$W'_2 \cos r' = U'_z - W'_1 \cos\nu \,,$$

$$W''_2 \cos p'' = U''_x - W''_1 \cos\lambda \,, \quad W''_2 \cos q'' = U''_y - W''_1 \cos\mu \,,$$
$$W''_2 \cos r'' = U''_z - W''_1 \cos\nu$$

ausgedrückt werden, wenn W'_1 und W''_1 die anfänglichen Werthe von w'_1 und w''_1 vorstellen.

Sind nun weiter V', U'_x, U'_y, U'_z, W'_1 und V'', U''_x, U''_y, U''_z, W''_1 die Werthe von v', u'_x, u'_y, u'_z, w'_1, v'', u''_x, u. s. f. am Ende des Stoßes, und lassen wir die Beziehungen (182) als allgemeine gelten, so haben wir

$$\text{D.)}\quad \begin{cases} W'_1 = w'_1 + (1+\mu)\,\dfrac{m''}{m'+m''}\,(w''_1 - w'_1)\,, \\[2ex] W''_1 = w''_1 - (1+\mu)\,\dfrac{m'}{m'+m''}\,(w''_1 - w'_1)\,, \end{cases}$$

und

$$187.)\quad \begin{cases} U'_x = W'_1 \cos\lambda + w'_2 \cos p' \\[1ex] \quad\;\; = u'_x + (1+\mu)\,\dfrac{m''}{m'+m''}\,(w''_1 - w'_1)\cos\lambda\,, \\[2ex] U'_y = u'_y + (1+\mu)\,\dfrac{m''}{m'+m''}\,(w''_1 - w'_1)\cos\mu\,, \\ \quad\text{u. s. f.} \\[2ex] U''_x = u''_x - (1+\mu)\,\dfrac{m'}{m'+m''}\,(w''_1 - w'_1)\cos\lambda\,, \\ \quad\text{u. s. f.} \end{cases}$$

und wenn in diesen Gleichungen noch

$$187^a.)\quad w''_1 - w'_1 = (u''_x - u'_x)\cos\lambda + (u''_y - u'_y)\cos\mu + (u''_z - u'_z)\cos\nu$$

eingeführt wird, so geben sie die Componenten der Endgeschwindigkeiten unmittelbar durch die Componenten der Anfangsgeschwindigkeiten und die Winkel λ, μ, ν ausgedrückt, und damit ist unsere Aufgabe gelöst, da sich aus diesen Geschwindigkeitscomponenten leicht die Endgeschwindigkeiten V' und V'' selbst, sowie ihre Richtungen ableiten, oder auch ohne diese mit jenen allein die Bewegungen der beiden Körper weiter verfolgen lassen.

Zwei einfache Fälle mögen als Beispiele genügen. Zuerst werde eine feste Wand AB Fig. 30, von einer Kugel C so getroffen, daß die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v'' der letzteren einen Winkel ϑ mit der Normalen MN im Berührungspunkte M der Wand bilde. Man hat dann, die Wand als den Körper A nehmend, $m' = \infty$ oder $\dfrac{m''}{m'} = 0$ und $v' = u'_x = u'_y = u'_z = w'_1 = 0$ zu setzen; ferner ist

$$w''_1 = u''_x \cos\lambda + u''_y \cos\mu + u''_z \cos\nu = v'' \cos\vartheta\,,$$

und damit wird

$$U'_x = 0 \;,\quad U'_y = 0 \;,\quad U'_z = 0 \;,$$

$$U''_x = u''_x - (1+\mu) v'' \cos\vartheta \cos\lambda \;,\quad U''_y = u''_y - (1+\mu) v'' \cos\vartheta \cos\mu \;,$$

$$U''_z = u''_z - (1+\mu) v'' \cos\vartheta \cos\nu \;.$$

Das Hauptgesetz dieses Stoßes ergibt sich indessen einfacher durch die Geschwindigkeit: $W''_1 = U''_x \cos\lambda + U''_y \cos\mu + U''_z \cos\nu$ und w''_2; denn für diese hat man

$$W''_1 = -\mu v'' \cos\vartheta \;,\qquad w''_2 = v'' \sin\vartheta \;,$$

und damit folgt, wenn $\vartheta_{,}$ den Winkel zwischen der Normalen im ersten Berührungspunkte und der Richtung der Endgeschwindigkeit V'' bezeichnet,

$$V'' = v'' \sqrt{\sin^2\vartheta + \mu^2 \cos^2\vartheta} \;,\qquad \tang\vartheta_{,} = -\frac{1}{\mu} \tang\vartheta \;,$$

und es leuchtet ein, daß die Geschwindigkeit V'' mit der Normalen und der Geschwindigkeit v'' in einer Ebene liegen muß, da sie nothwendig in einer Ebene mit den Geschwindigkeiten W''_1 und w''_2 liegt.

Für gänzlich unelastische Körper ist $\mu = 0$, also $V'' = v'' \sin\vartheta$, $\tang\vartheta_{,} = -\infty$, und demnach mit der Beachtung, daß das Minus-Zeichen vom Nenner herrührt und daß deßhalb $\vartheta_{,}$ nur von $\frac{1}{2}\pi$ bis π reichen kann, $\vartheta_{,} = \frac{1}{2}\pi$. Die Kugel gleitet also in diesem Falle mit ihrer tangentialen Geschwindigkeit w''_2 von der Wand ab, oder, wenn diese eben ist, längs derselben fort. Sind dagegen die Kugel sowohl als die Wand vollkommen elastisch, so hat man $\mu = 1$, $V'' = -v''$, $\vartheta_{,} = \pi - \vartheta$; die Kugel springt mit einer der Anfangsgeschwindigkeit gleichen Endgeschwindigkeit wieder von der Wand ab und zwar so, daß diese Geschwindigkeiten mit den beiden Hälften MN und MN′ der Normalen gleiche Winkel bilden und in einer Ebene mit ihr liegen. Im Allgemeinen ist $\mu < 1$, und daher auch $V'' < v''$, $\vartheta_{,} < \pi - \vartheta$, wie es Fig. 30 darstellt.

Als zweiter Fall seien zwei Kugeln von gleicher Masse gegeben, von denen die erste, im Zustand der Ruhe sich befindende von der zweiten wieder so getroffen werde, daß ihre Anfangsgeschwindigkeit v'' einen Winkel ϑ mit der Normalen im ersten Berührungspunkte bilde. Man hat dann wieder $v' = 0$, $w'_1 = 0$, $w'_2 = 0$, $w''_1 = v'' \cos\vartheta$, $w''_2 = v'' \sin\vartheta$, ferner

$$W'_1 = V' = \frac{1+\mu}{2}\, w''_1 = \frac{1+\mu}{2}\, v'' \cos\vartheta\,,$$

$$W''_1 = w''_1 - \frac{1+\mu}{2}\, w''_1 = \frac{1-\mu}{2}\, v'' \cos\vartheta\,;$$

$$V'' = v'' \sqrt{\sin^2\vartheta + \frac{(1-\mu)^2}{4}\cos^2\vartheta}\,, \quad \tang\vartheta_{,} = \frac{2}{1-\mu}\tang\vartheta\,.$$

Für $\mu = 0$ oder unelastische Kugeln würde daher $W'_1 = \frac{1}{2} v'' \cos\vartheta = W''_1$, $\tang\vartheta_{,} = 2 \tang\vartheta$, und für $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ folgen die Werthe: $\vartheta_{,} = \operatorname{arc\,tang} 2 = 63^\circ 26'$, $V'' = \frac{1}{4} v'' \sqrt{10} = 0{,}79..\, v''$, wie sie in Fig. 31[a] dargestellt sind. Für $\mu = 1$ dagegen und vollkommen elastische Kugeln ergibt sich $W'_1 = v'' \cos\vartheta$, $W''_1 = 0$, $V'' = v'' \sin\vartheta$, $\tang\vartheta_{,} = \infty$, $\vartheta_{,} = \frac{1}{2}\pi$, Fig. 31[b]; die gestoßene Kugel geht in der Richtung der Normalen mit der normalen Anfangsgeschwindigkeit der stoßenden Kugel fort, während diese am Ende des Stoßes sich nur noch mit der tangentialen Componenten w''_2 in einer dazu senkrechten Richtung zu bewegen fortfährt.

§. 104.

Um auch für den jetzigen allgemeineren Fall die durch den Stoß erzeugte Aenderung der lebendigen Kraft beider sich stoßenden Massen auszudrücken, sei am Ende der ersten Hälfte des Stoßes W die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der Mittelpunkte dieser Massen in der Richtung der Normalen im Berührungspunkte, so daß man hat

$$\text{E.)}\quad W = w'_1 + \frac{m''}{m'+m''}(w''_1 - w'_1) = w''_1 - \frac{m'}{m'+m''}(w''_1 - w'_1)\,;$$

so wie U'_x, U'_y, U'_z und U''_x, U''_y, U''_z die zu den Coordinatenachsen parallelen Componenten der Geschwindigkeiten V' und V'' jener Punkte in demselben Augenblicke vorstellen sollen. Für die Aenderung der lebendigen Kraft während der ersten Hälfte des Stoßes hat man dann den Ausdruck:

$$\text{F.)}\quad L_1 = m'(v'^2 - V'^2) + m''(v''^2 - V''^2)\,,$$

oder da $v'^2 = w'^2_1 + w'^2_2$, $V'^2 = W^2 + w'^2_2$, ebenso $v''^2 = w''^2_1 + w''^2_2$, $V''^2 = W^2 + w''^2_2$ ist,

$$L_1 = m'(\mathfrak{w}'^2_1 - \mathfrak{W}^2) + m''(\mathfrak{w}''^2_1 - \mathfrak{W}^2),$$

also auch nach (185) und (E)

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= m'(\mathfrak{w}'_1 - \mathfrak{W})^2 + m''(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{W})^2 \\ &= \frac{m'm''}{m'+m''}(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)^2 . \end{aligned}\right\} \quad (188.$$

Der Verlust an lebendiger Kraft während der ersten Hälfte des Stoßes ist demnach, wie übrigens aus den vorhergehenden Erörterungen schon von selbst folgt, gleich der Summe der lebendigen Kräfte, welche den Aenderungen der normalen Geschwindigkeiten entsprechen. Man hat aber auch nach den Gleichungen (187), wenn darin $\mu = 0$, und $\mathfrak{U}'_x$ für U'_x, $\mathfrak{U}'_y$ für U'_y, u. s. f. gesetzt wird,

$$m'[(\mathfrak{U}'_x - \mathfrak{u}'_x)^2 + (\mathfrak{U}'_y - \mathfrak{u}'_y)^2 + (\mathfrak{U}'_z - \mathfrak{u}'_z)^2] = \frac{m'm''^2}{(m'+m'')^2}(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)^2,$$

$$m''[(\mathfrak{u}''_x - \mathfrak{U}''_x)^2 + (\mathfrak{u}''_y - \mathfrak{U}''_y)^2 + (\mathfrak{u}''_z - \mathfrak{U}''_z)^2] = \frac{m'^2 m''}{(m'+m'')^2}(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)^2,$$

und die Summe dieser Werthe gibt mit (188) verglichen den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} L_1 = m'(\mathfrak{U}'_x - \mathfrak{u}'_x)^2 + m'(\mathfrak{U}'_y - \mathfrak{u}'_y)^2 + m'(\mathfrak{U}'_z - \mathfrak{u}'_z)^2 \\ + m''(\mathfrak{U}''_x - \mathfrak{u}''_x)^2 + m''(\mathfrak{U}''_y - \mathfrak{u}''_y)^2 + m''(\mathfrak{U}''_z - \mathfrak{u}''_z)^2 . \end{aligned}\right\} \quad (189.$$

Dieser Lehrsatz, welcher auch das Carnot'sche Princip genannt wird, spricht aus, daß der Verlust an lebendiger Kraft während der ersten Hälfte des Stoßes der Summe der lebendigen Kräfte gleich ist, welche den Aenderungen der Geschwindigkeiten parallel zu drei rechtwinkligen Coordinatenachsen entsprechen.

Für unelastische Körper ist dieser Verlust bleibend; für elastische tritt ein vollständiger oder theilweiser Ersatz ein, welcher in gleicher Weise durch

$$L_2 = m'(V'^2 - \mathfrak{V}'^2) + m''(V''^2 - \mathfrak{V}''^2)$$
$$= m'(W'^2_1 - \mathfrak{W}^2) + m''(W''^2_1 - \mathfrak{W}_2)$$
$$= \frac{m'm''}{m'+m''}(W'_1 - \mathfrak{W}''_1)^2 = \mu^2 \frac{m'm''}{m'+m''}(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)^2$$

und dann wieder mittels der Gleichungen (187) durch

$$L_2 = \mu^2 m' [(\mathfrak{U}'_x - \mathfrak{u}'_x)^2 + (\mathfrak{U}'_y - \mathfrak{u}'_y)^2 + (\mathfrak{U}'_z - \mathfrak{u}'_z)^2]$$
$$+ \mu^2 m'' [(\mathfrak{U}''_x - \mathfrak{u}''_x)^2 + (\mathfrak{U}''_y - \mathfrak{u}''_y)^2 + (\mathfrak{U}''_z - \mathfrak{u}''_z)^2]$$

oder

$$190.)\left\{\begin{array}{l} L_2 = m'(U'_x - \mathfrak{U}'_x)^2 + m'(U'_y - \mathfrak{U}'_y)^2 + m'(U'_z - \mathfrak{U}'_z)^2 \\ \quad + m''(U''_x - \mathfrak{U}''_x)^2 + m''(U''_y - \mathfrak{U}''_y)^2 + m''(U''_z - \mathfrak{U}''_z)^2 \end{array}\right.$$

ausgedrückt werden kann.

Die gänzliche Aenderung $L_1 - L_2$ der lebendigen Kraft beim centralen Stoß ergibt sich also durch den Ausdruck:

$$191^a.)\quad L_1 - L_2 = (1-\mu^2)\left\{\begin{array}{l} m'[(\mathfrak{U}'_x - \mathfrak{u}'_x)^2 + (\mathfrak{U}'_y - \mathfrak{u}'_y)^2 + (\mathfrak{U}'_z - \mathfrak{u}'_z)^2] \\ + m''[(\mathfrak{U}''_x - \mathfrak{u}''_x)^2 + (\mathfrak{U}''_y - \mathfrak{u}''_y)^2 + (\mathfrak{U}''_z - \mathfrak{u}''_z)^2] \end{array}\right\}$$

oder in der Form:

$$191^b.)\quad L_1 - L_2 = \left\{\begin{array}{l} m'[(\mathfrak{u}'_x - \mathfrak{U}'_x)^2 + (\mathfrak{u}'_y - \mathfrak{U}'_y)^2 + (\mathfrak{u}'_z - \mathfrak{U}'_z)^2] \\ - m'[(\mathfrak{U}'_x - U'_x)^2 + (\mathfrak{U}'_y - U'_y)^2 + (\mathfrak{U}'_z - U'_z)^2] \\ + m''[(\mathfrak{u}''_x - \mathfrak{U}''_x)^2 + (\mathfrak{u}''_y - \mathfrak{U}''_y)^2 + (\mathfrak{u}''_z - \mathfrak{U}''_z)^2] \\ - m''[(\mathfrak{U}''_x - U''_x)^2 + (\mathfrak{U}''_y - U''_y)^2 + (\mathfrak{U}''_z - U''_z)^2] \end{array}\right\}.$$

In beiden Ausdrücken ist die Aenderung der lebendigen Kraft von den Componenten der Geschwindigkeiten am Ende der ersten Hälfte des Stoßes abhängig; der erste macht aber augenfälliger, daß für vollkommen elastische Körper die Differenz: $L_1 - L_2$ Null wird, daß bei diesen also keine Aenderung der lebendigen Kraft statt hat.

§. 105.

Wir haben nun auch noch die drehende Wirkung des Stoßes oder seine Wirkung auf die drehende Bewegung zu betrachten, und dazu gehen wir ebenfalls von dem einfachsten Falle aus, indem wir einen freien Körper B auf einen um eine feste Achse sich bewegenden Körper A treffen lassen und voraussetzen, daß sowohl die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers B, als auch die Normale im ersten Berührungspunkte senkrecht zur Drehungsachse des Körpers A seien, und daß diese Normale durch den Schwerpunkt des Körpers B gehe.

Die Drehungsachse des Körpers A nehmen wir als Achse der z eines festen rechtwinkligen Coordinatensystems der x, y und z an und als ζ=Achse eines beweglichen Coordinatensystems der ξ, η und ζ, welches mit dem Körper A fest verbunden sei, und dessen ξ=Achse durch den Schwerpunkt desselben gehe, oder wenn dieser selbst in der Drehungsachse liegt, durch diesen und einen beliebigen andern ausgezeichneten Punkt; die drehende Bewegung dieses Körpers finde in positivem Sinne statt, φ'_0 und φ' seien die Winkelgeschwindigkeiten desselben im Augenblicke, wo der Stoß beginnt, und während des Stoßes, und $\mathfrak{M}'$ sein Massemoment, in Bezug auf die Drehungsachse genommen. Die Geschwindigkeit des Körpers B beim Beginne des Stoßes sei $\mathfrak{v}''$ und ihre Componenten nach den festen Achsen $\mathfrak{u}''_x$, $\mathfrak{u}''_y$, parallel zu den beweglichen $\mathfrak{u}''_\xi$ und $\mathfrak{u}''_\eta$, ebenso sei λ_x der von 0 bis 2π reichende Winkel, welchen die Richtung des auf den Körper A wirkenden Druckes N mit der festen x=Achse bildet, λ_ξ der zwischen 0 und π liegende Winkel, welcher dieselbe Richtung in Bezug auf die Achse der ξ bestimmt; ferner seien $\xi' \eta' \zeta'$ die Coordinaten des ersten Berührungspunktes oder des Angriffspunktes des Druckes N in Bezug auf die beweglichen Achsen, also $\xi' \sin \lambda_\xi - \eta' \cos \lambda_\xi = r'$ der kleinste Abstand zwischen der Normalen im Berührungspunkte und der Drehungsachse. Ist dann Fig. 32 der Zustand des Systems beim Beginne des Stoßes, C die Projection der Drehungsachse des Körpers A auf die xy=Ebene, O der Schwerpunkt desselben, also die verlängerte CO die ξ=Achse, MN die Normale im Berührungspunkte und Bv'' die Richtung und Größe der Geschwindigkeit des Körpers B: so können wir den jetzigen Fall auf den vorhergehenden zurückführen, wenn wir uns in dem Durchschnittspunkte S der Normalen MN mit der von C aus darauf gefällten Senkrechten eine Masse m' denken, welche durch den in M angreifenden Druck N oder die von ihm erzeugte drehende Wirkung Nr' dieselbe

Winkelbeschleunigung erhalten würde, wie der Körper A. Wir haben dann zunächst nach §. 158 u. f. des zweiten Buches die Beziehungen:

$$\text{G.)}\qquad \mathfrak{M}'\frac{d\varphi'}{dt} = m'r'^2\frac{d\varphi'}{dt} = Nr' \quad , \quad m' = \frac{\mathfrak{M}'}{r'^2}\ ;$$

die anfängliche Geschwindigkeit des Punktes S ist $v' = r'\varphi'_0$ und, weil parallel zur Normalen MN, auch gleich w'_1, folglich $w'_2 = 0$. Die Componenten w''_1 und w''_2 dagegen werden durch die aus dem vorhergehenden §. entnommenen Beziehungen:

$$w''_1 = u''_x \cos\lambda_x + u''_y \sin\lambda_x = u''_\xi \cos\lambda_\xi + u''_\eta \sin\lambda_\xi$$

$$w''_2 = u''_x \sin\lambda_x - u''_y \cos\lambda_x = u''_\xi \sin\lambda_\xi - u''_\eta \cos\lambda_\xi$$

bestimmt. Es ist dann wie im vorhergehenden Falle beim centralen Stoß

$$\left\{\begin{aligned} W'_1 &= w'_1 + (1+\mu)\frac{m''}{m'+m''}(w''_1 - w'_1) \\ &= r'\varphi'_0 + (1+\mu)\frac{m''r'^2}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(u''_\xi \cos\lambda_\xi + u''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0), \\ W''_1 &= w''_1 - (1+\mu)\frac{m'}{m'+m''}(w''_1 - w'_1) \\ &= u''_\xi \cos\lambda_\xi + u''_\eta \sin\lambda_\xi - \frac{(1+\mu)\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(u''_\xi \cos\lambda_\xi + u''_\eta \sin\lambda_\xi \\ &\qquad - r'\varphi'_0), \end{aligned}\right.$$

nur wird hier der Coeffizient μ in anderer Weise von der Gestalt des Körpers A abhängen, als bei dem centralen Stoß.

Die Geschwindigkeit V' des Punktes S nach dem Stoße ist offenbar gleich der Geschwindigkeit W'_1 und gleich $r'\Phi'$, wenn Φ' die Winkelgeschwindigkeit des Körpers A nach dem Stoße bezeichnet; es ergibt sich dadurch

$$\text{192.)}\quad \Phi' = \varphi'_0 + (1+\mu)\frac{m''r'}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(u''_\xi \cos\lambda_\xi + u''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0).$$

Für die Componenten U''_ξ und U''_η der Endgeschwindigkeit V'' des Körpers B parallel zu den beweglichen Achsen der ξ und η findet man wie früher die Werthe:

193.)

$$\left.\begin{aligned}U''_\xi &= \mathfrak{u}''_\xi - (1+\mu)\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(\mathfrak{u}''_\xi\cos\lambda_\xi + \mathfrak{u}''_\eta\sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0)\cos\lambda_\xi,\\ U''_\eta &= \mathfrak{u}''_\eta - (1+\mu)\frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(\mathfrak{u}''_\xi\cos\lambda_\xi + \mathfrak{u}''_\eta\sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0)\sin\lambda_\xi,\end{aligned}\right\}$$

aus welchen sich die Componenten U''_x und U''_y parallel zu den festen Achsen mittels des Winkels: $\lambda_x - \lambda_\xi$ zwischen der x=Achse und der ξ=Achse, welcher für den Anfang des Stoßes jedenfalls bekannt ist und sein muß, und der während des Stoßes als unveränderlich angenommen wird, ebenso berechnen lassen, wie umgekehrt die $\mathfrak{u}''_\xi$ und $\mathfrak{u}''_\eta$ für den Anfang des Stoßes aus den $\mathfrak{u}''_x$ und $\mathfrak{u}''_y$.

Für ganz unelastische Körper und $\lambda_\xi = \frac{\pi}{2}$ hat man einfach $r' = \xi'$ und daher nach (192) und (193)

$$\Phi' = \varphi'_0 + \frac{m''\xi'}{\mathfrak{M}'+m''\xi'^2}(\mathfrak{u}''_\eta - \xi'\varphi'_0) = \frac{\mathfrak{M}'\varphi'_0 + m''\xi'\mathfrak{u}''_\eta}{\mathfrak{M}'+m''\xi'^2},$$

$$U''_\eta = \mathfrak{u}''_\eta - \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}'+m''\xi'^2}(\mathfrak{u}''_\eta - \xi'\varphi'_0) = \xi'\frac{\mathfrak{M}'\varphi'_0 + m''\xi'\mathfrak{u}''_\eta}{\mathfrak{M}'+m''\xi'^2},$$

$$U''_\xi = \mathfrak{u}''_\xi,$$

und man wird leicht erkennen, daß die beiden ersten Werthe dem Werthe (180) beim einfachen centralen Stoß entsprechen.

Wenn die Richtung der Normalen durch die Achse geht und die Körper unelastisch sind, so wird $r' = 0$, und damit folgt

$$\left.\begin{aligned}\Phi' &= \varphi'_0,\\ U''_\xi &= (\mathfrak{u}''_\xi\sin\lambda_\xi - \mathfrak{u}''_\eta\cos\lambda_\xi)\sin\lambda_\xi = \mathfrak{w}''_2\sin\lambda_\xi,\\ U''_\eta &= (\mathfrak{u}''_\eta\cos\lambda_\xi - \mathfrak{u}''_\xi\sin\lambda_\xi)\cos\lambda_\xi = -\mathfrak{w}''_2\cos\lambda_\xi;\end{aligned}\right\}$$

die Winkelgeschwindigkeit des Körpers A bleibt also unverändert und der Körper B verhält sich, so, als ob die Masse m' von A unendlich groß und ihre anfängliche Geschwindigkeit Null wäre. Dasselbe Verhalten findet übrigens auch statt, wenn die beiden Körper theilweise

oder vollkommen elastisch sind; φ'_0 bleibt immer unverändert und der Körper B springt von A so zurück, als wenn dieser unbeweglich wäre, aber dieß nur unter der Voraussetzung, daß keine Reibung vorhanden ist.

Die Gleichungen (192) und (193) geben wieder ganz ähnliche Beziehungen für die Aenderung der lebendigen Kraft der beiden Körper A und B, wie die Gleichungen (182). Man findet hier für den Verlust an lebendiger Kraft während der ersten Hälfte des Stoßes zunächst den Werth:

$$\text{H.)} \qquad L_1 = \mathfrak{M}'(\varphi'^2_0 - \widehat{\varphi}'^2) + m''(\mathbf{v}''^2 - \widehat{\mathbf{v}}''^2) \; ;$$

wenn $\widehat{\varphi}'$ und $\widehat{v}''$ die Winkelgeschwindigkeit des Körpers A und die fördernde Geschwindigkeit des Körpers B am Ende der ersten Hälfte des Stoßes bezeichnen; die Gleichung (192) gibt, wenn darin $\mu = 0$ gesetzt wird,

$$\varphi'^2_0 - \widehat{\varphi}'^2 = -\frac{m''^2 r'^2}{(\mathfrak{M}' + m'' r'^2)^2}(\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0)^2$$
$$-\frac{2m''}{\mathfrak{M}' + m'' r'^2} r'\varphi'_0 (\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0),$$

und aus den Gleichungen (193) folgt mit der Beachtung, daß man hat

$$\mathbf{v}''^2 - \widehat{\mathbf{v}}''^2 = \mathbf{u}''^2_\xi + \mathbf{u}''^2_\eta - (\widehat{u}''^2_\xi + \widehat{u}''^2_\eta) \; ,$$

der Ausdruck:

$$\mathbf{v}''^2 - \widehat{\mathbf{v}}''^2 = -\frac{\mathfrak{M}'^2}{(\mathfrak{M}' + m'' r'^2)^2}(\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0)^2$$
$$+\frac{2\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}' + m'' r'^2}(\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi)(\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0) \; ;$$

wird dann dieser und der vorhergehende in die Gleichung (H) eingeführt, so ergibt sich

$$\text{194.)} \quad L_1 = \frac{\mathfrak{M}' m''}{\mathfrak{M}' + m'' r'^2}(\mathbf{u}''_\xi \cos\lambda_\xi + \mathbf{u}''_\eta \sin\lambda_\xi - r'\varphi'_0)^2 \, .$$

Nimmt man endlich noch die Werthe von $(\widehat{\varphi'}-\varphi'_0)^2$, $(\widehat{u''}_\xi-\mathfrak{u}''_\xi)^2$ und $(\widehat{u''}_\eta-\mathfrak{u}''_\eta)^2$ aus den Gleichungen (192) und (193) und vergleicht ihre Summe mit dem vorstehenden Ausdruck, so findet man wieder L_1 unter der Form:

$$L_1=\mathfrak{M}'(\widehat{\varphi'}-\varphi'_0)^2+m''[(\widehat{u''}_\xi-\mathfrak{u}''_\xi)^2+(\widehat{u''}_\eta-\mathfrak{u}''_\eta)^2]\,. \quad (195.$$

Auf demselben Wege wird man sich überzeugen, daß der Zuwachs L_2 an lebendiger Kraft während der zweiten Hälfte des Stoßes durch

$$L_2=\mu^2\frac{\mathfrak{M}'m''}{\mathfrak{M}'+m''r'^2}(\mathfrak{u}''_\xi\cos\lambda_\xi+\mathfrak{u}''_\eta\sin\lambda_\xi-r'\varphi'_0)^2=\mu^2L_1$$

und durch

$$L_2=\mathfrak{M}'(\Phi'-\widehat{\varphi'})^2+m''[(U''_\xi-\widehat{u''}_\xi)^2+(U''_\eta-\widehat{u''}_\eta)^2]$$

ausgedrückt werden kann, daß man also für die ganze Aenderung L der lebendigen Kraft wieder den Werth:

$$\left.\begin{aligned}L_1-L_2&=(1-\mu^2)L_1\\&=\mathfrak{M}'[(\varphi'_0-\widehat{\varphi'})^2-(\Phi'-\widehat{\varphi'})^2]\\&\quad+m''[(\mathfrak{u}''_\xi-\widehat{u''}_\xi)^2-(U''_\xi-\widehat{u''}_\xi)^2+(\mathfrak{u}''_\eta-\widehat{u''}_\eta)^2-(U''_\eta-\widehat{u''}_\eta)^2]\end{aligned}\right\}\quad(196.$$

erhält, welcher dem allgemeinen Ausdruck (191^b) entspricht.

Für den Stoß eines Körpers, welcher in einer Achsendrehung begriffen ist, muß insbesondere auch der Druck untersucht werden, welchen diese Achse durch den Stoß erleidet. Dazu werden uns die in §. 161 des zweiten Buches abgeleiteten Werthe dienen, wenn wir darin zuerst die äußern Kräfte ΣX, ΣY, durch die fördernden Componenten $N\cos\lambda_\xi$ und $N\sin\lambda_\xi$ des Druckes N zwischen beiden Körpern ersetzen, und diesen entsprechend jene Werthe auf die beweglichen Achsen der ξ und η beziehen. Wir finden so und mit der Beachtung, daß nach unseren Voraussetzungen $\Sigma.m\eta=0$ ist, für die entsprechenden Componenten N'_ξ und N'_η des fördernden Druckes auf die Achse die Beziehungen:

$$N'_\xi = N\cos\lambda_\xi + \varphi^2 \Sigma . m\xi \;, \quad N'_\eta = N\sin\lambda_\xi - \frac{d\varphi'}{dt} \Sigma . m\xi \;,$$

und wenn man in der zweiten für $\frac{d\varphi'}{dt}$ seinen Werth aus der ersten Gleichung (G) und $M'\xi_,$ für $\Sigma . m\xi$ einführt, so daß M' die Masse des Körpers A und $\xi_,$ den Abstand CO seines Schwerpunktes O, Fig. 32, von der Drehungsachse bezeichnet, so geht diese über in

$$N'_\eta = N\sin\lambda_\xi - N r' \frac{M'\xi_,}{\mathfrak{M}'} .$$

Soll demnach die Achse durch den Stoß keinen Druck zu erleiden haben, so muß einmal $N\cos\lambda_\xi = 0$, $\lambda_\xi = \frac{1}{2}\pi$ werden, die Normale im Berührungspunkte also senkrecht zur Linie CO sein, und damit wird sodann $N'_\eta = 0$, wenn noch die Bedingung:

$$1 - r' \frac{M'\xi_,}{\mathfrak{M}'} = 0 \qquad \text{oder} \qquad r' = \xi' = \frac{\mathfrak{M}'}{M'\xi_,}$$

erfüllt wird, d. h. wenn die Normale im Berührungspunkt durch den auf CO liegenden Schwingungsmittelpunkt geht, weßhalb dieser letztere auch Mittelpunkt des Stoßes genannt wird.

Die drehenden Wirkungen des Druckes N in Bezug auf die Achsen der ξ und η sind $-N\zeta'\sin\lambda_\xi$ und $N\zeta'\cos\lambda_\xi$, und damit ergeben sich für die entsprechenden drehenden Wirkungen, welche während des Stoßes auf die Drehungsachse ausgeübt werden, die Ausdrücke:

$$\text{J.)} \begin{cases} N' n'_\xi = - N\zeta'\sin\lambda_\xi + \varphi^2 \Sigma . m\eta\zeta - \frac{d\varphi'}{dt} \Sigma . m\xi\zeta \;, \\ N' n'_\eta = + N\zeta'\cos\lambda_\xi + \varphi^2 \Sigma . m\xi\zeta - \frac{d\varphi'}{dt} \Sigma . m\eta\zeta \;, \end{cases}$$

welche mit einstweiliger Uebergehung des dynamischen Druckes und mit Einführung des Werthes für $\frac{d\varphi'}{dt}$ die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} N'n'_\xi &= -N\left(\zeta' \sin\lambda_\xi + r'\frac{\Sigma . m\xi\zeta}{\mathfrak{M}'}\right), \\ N'n'_\eta &= +N\left(\zeta' \cos\lambda_\xi + r'\frac{\Sigma . m\eta\zeta}{\mathfrak{M}'}\right). \end{aligned}\right\}$$

Die auf die Drehungsachse des Körpers A ausgeübten drehenden Wirkungen des Stoßes werden also Null werden, wenn die Bedingungen:

$$\mathfrak{M}'\zeta' \sin\lambda_\xi + r'\Sigma . m\xi\zeta = 0 \ , \quad \mathfrak{M}'\zeta' \cos\lambda_\xi + r'\Sigma . m\eta\zeta = 0 \quad \text{(K.}$$

erfüllt sind, woraus sich die beiden Größen ζ' und λ_ξ bestimmen lassen. Man erkennt jedoch die Bedeutung der letzten Gleichungen besser, wenn man sich durch den Berührungspunkt M eine Ebene senkrecht zur Drehungsachse gelegt denkt und den Durchschnitt dieser Achse als neuen Anfangspunkt der $\zeta_{\prime\prime}$, die Durchschnitte mit den Ebenen der $\xi\zeta$ und $\eta\zeta$ als Achsen der $\xi_{\prime\prime}$ und $\eta_{\prime\prime}$ nimmt; in Bezug auf diese werden dann die drehenden Wirkungen von N Null, die Bedingungen (K) kommen auf

$$\Sigma . m\xi_{\prime\prime}\zeta_{\prime\prime} = 0 \ , \quad \Sigma . m\eta_{\prime\prime}\zeta_{\prime\prime} = 0 \quad \text{(L.}$$

zurück und sprechen so aus, daß die Drehungsachse für den neuen Anfangspunkt eine Hauptachse sein muß, oder daß die Normale im Berührungspunkte in der Ebene zweier Hauptachsen, zu denen die Drehungsachse als dritte Hauptachse gehört, liegen muß, wenn der Stoß keine drehende Wirkung auf die Drehungsachse ausüben soll, und mit dieser Bedingung fallen dann auch die drehenden Wirkungen des dynamischen Druckes in den Gleichungen (J) hinweg.

Durch die vorhergehende Verlegung des Anfangspunktes ändert sich Nichts in den Bedingungen für das Nullwerden des fördernden Druckes auf die Drehungsachse; man kann daher diese und die letzten Bedingungen in folgender Weise zusammenfassen:

Wenn auf die Drehungsachse während des Stoßes weder ein fördernder noch ein drehender Druck ausgeübt werden soll und von dem fördernden dynamischen Drucke Umgang genommen wird, so muß die Normale im ersten Berührungspunkte der sich stoßenden Körper 1) normal zu der durch die Drehungsachse und den Schwerpunkt des sich drehenden Körpers gelegten Ebene sein, 2) diese in einem Abstand

gleich dem des Schwingungsmittelpunktes von der Drehungsachse durchschneiden, und 3) in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene liegen, welche die zu dieser Drehungsachse als der einen Hauptachse gehörigen beiden andern Hauptachsen enthält.

Wenn die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Körpers A selbst geht, so kann der fördernde Druck auf dieselbe nicht mehr Null werden; dieser kommt vielmehr auf die Componenten $N \cos \lambda_\xi$ und $N \sin \lambda_\xi$ zurück, wie in dem Falle, wo die Richtung der Normalen im Berührungspunkte die Achse selbst schneidet.

§. 106.

Der ganz allgemeine Fall des Stoßes zweier freien Körper von beliebiger Form, welche beliebig gerichtete fördernde und drehende Geschwindigkeiten besitzen, führt zunächst, was die fortschreitende Bewegung ihrer Mittelpunkte betrifft, nach dem allgemeinen Gesetze für die Bewegung des Mittelpunktes der Masse eines festen oder eines veränderlichen Systems und unter der früheren Voraussetzung über die sehr kurze Dauer des Stoßes und der damit gestatteten Vernachlässigung der äußern Kräfte auf die Gleichungen (A) in §. 103, und demnach auch auf die zunächst daraus abgeleiteten Gleichungen (B) und (C) nebst den daraus gezogenen Folgerungen. Da wir aber im jetzigen Falle auch die drehende Bewegung zu berücksichtigen haben, so wollen wir in jedem der beiden sich stoßenden Körper A und B ein Coordinatensystem der ξ, η und ζ annehmen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse sei, und dessen Achsen mit den drei Hauptachsen in diesem Punkte zusammenfallen. Die Lage dieser Achsen in Bezug auf drei feste Achsen der x, y und z wird in jedem der beiden Körper am Anfang des Stoßes bekannt sein, da die drehende Bewegung derselben vor dem Stoße als bekannt vorausgesetzt werden muß, es werden also für diesen Augenblick die Winkel ϑ', ω', ψ' und ϑ'', ω'', ψ'' gegeben sein, durch welche die Lage jener beweglichen Achsen in Bezug auf die festen bestimmt wird (Bd. II, §. 187), und wir werden mit gleicher Annäherung wie früher annehmen dürfen, daß diese Winkel während der sehr kurzen Dauer des Stoßes unverändert bleiben. Wir können daher auch die fortschreitende Bewegung oder vielmehr die Aenderung der fördernden Geschwindigkeiten während des Stoßes auf die Achsen der ξ, η und ζ beziehen und erhalten so unter Anwendung einer ähnlichen Bezeichnung, wie in den vorhergehenden §§. die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} M' \frac{du'_\xi}{dt} - N\cos\widehat{N\xi'} = 0\,, & M'' \frac{du''_\xi}{dt} + N\cos\widehat{N\xi''} = 0\,, \\ M' \frac{du'_\eta}{dt} - N\cos\widehat{N\eta'} = 0\,, & M'' \frac{du''_\eta}{dt} + N\cos\widehat{N\eta''} = 0\,, \\ M' \frac{du'_\zeta}{dt} - N\cos\widehat{N\zeta'} = 0\,, & M'' \frac{du''_\zeta}{dt} + N\cos\widehat{N\zeta''} = 0\,, \end{array}\right\} \quad (\alpha.$$

aus welchen sich wieder die den Gleichungen (B) und (C) in §. 103 entsprechenden Beziehungen ableiten lassen. Von diesen nehmen die ersteren nun die Form:

$$M' \frac{dw'_1}{dt} = +N \quad ; \qquad M'' \frac{dw''_1}{dt} = -N$$

an und führen dann auf die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} W'_1 = w'_1 + \frac{1}{M'}\int_0^\tau dt\,.\,N = w'_1 + \frac{1}{M'}\,\Phi(\tau)\,, \\ W''_1 = w''_1 + \frac{1}{M''}\,\Phi(\tau)\,, \end{array}\right\} \quad (\beta.$$

welche den dortigen Gleichungen (D) entsprechen, worin aber die Function: $\Phi(\tau)$ nicht nur von den fördernden Geschwindigkeiten w'_1 und w'_2 abhängt, sondern auch von den Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper um ihre augenblicklichen Drehungsachsen.

Wir müssen demnach zuvor die Gleichungen für die Aenderung der drehenden Bewegungen beider Körper aufstellen. Dazu bezeichnen wir, wie in §. 14 oder in §. 185 u. f. des zweiten Buches, die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers A in Bezug auf die drei Hauptachsen der ξ, η und ζ und für das Ende der zwischen 0 und τ liegenden Zeit t mit $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$, für den Anfang des Stoßes mit $\mathfrak{p}'_0$, $\mathfrak{q}'_0$, $\mathfrak{r}'_0$, und geben diesen Buchstaben für den Körper B zwei Accente; mit diesen Größen sind zugleich (Bd. II, §. 185) die Winkel λ', μ', ν' und λ'', μ'', ν'' gegeben, welche die Lage der augenblicklichen Drehungsachse in jedem der beiden Körper bestimmen, sowie die Winkelgeschwindigkeiten φ' und φ'' oder φ'_0 und φ''_0 um diese Achsen; denn man hat

$\varphi'^2 = \mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2 + \mathfrak{r}'^2$, $\cos\lambda' = \frac{\mathfrak{p}'}{\varphi'}$, $\cos\mu' = \frac{\mathfrak{q}'}{\varphi'}$, $\cos\nu' = \frac{\mathfrak{r}'}{\varphi'}$,
u. s. f.

Sind dann ferner $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Massemomente des Körpers A in Bezug auf seine drei Hauptachsen, und p′, q′, r′ die Hebelarme der drehenden Wirkungen des Druckes N um dieselben Achsen, so daß man hat

$$p' = \eta' \cos\widehat{N\zeta'} - \zeta' \cos\widehat{N\eta'} \quad , \quad q' = \zeta' \cos\widehat{N\xi'} - \xi' \cos\widehat{N\zeta'} ,$$

$$r' = \xi' \cos\widehat{N\eta'} - \eta' \cos\widehat{N\xi'} ,$$

wenn ξ', η', ζ' die Coordinaten des ersten Berührungspunktes in Bezug auf die betreffenden Achsen vorstellen, so hätten wir eigentlich die allgemeinen Gleichungen (18) in §. 14 des gegenwärtigen Buches in Anwendung zu bringen und darin für $\Sigma.\mathfrak{M}_{\Xi}$, $\Sigma.\mathfrak{M}_H$ und $\Sigma.\mathfrak{M}_Z$ die Momente Np′, Nq′, Nr′ oder — Np″ u. s. f. einzusetzen; wir können indessen hier die kleinen Formänderungen oder innern Bewegungen der beiden Körper während des Stoßes ohne fühlbaren Fehler vernachlässigen, also beide Körper als unveränderliche betrachten und uns daher nach §. 203 des zweiten Buches auf das System der Gleichungen:

$$\gamma.)\ \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}'\frac{d\mathfrak{p}'}{dt} = (\mathfrak{B}'-\mathfrak{C}')\mathfrak{q}'\mathfrak{r}' + Np', \\ \mathfrak{B}'\frac{d\mathfrak{q}'}{dt} = (\mathfrak{C}'-\mathfrak{A}')\mathfrak{p}'\mathfrak{r}' + Nq', \\ \mathfrak{C}'\frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = (\mathfrak{A}'-\mathfrak{B}')\mathfrak{p}'\mathfrak{q}' + Nr', \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}''\frac{d\mathfrak{p}''}{dt} = (\mathfrak{B}''-\mathfrak{C}'')\mathfrak{q}''\mathfrak{r}'' - Np'' \\ \mathfrak{B}''\frac{d\mathfrak{q}''}{dt} = (\mathfrak{C}''-\mathfrak{A}'')\mathfrak{p}''\mathfrak{r}'' - Nq'' \\ \mathfrak{C}''\frac{d\mathfrak{r}''}{dt} = (\mathfrak{A}''-\mathfrak{B}'')\mathfrak{p}''\mathfrak{q}'' - Nr'' \end{array}\right.$$

beschränken, worin p′, q′, r′ sowie p″, q″, r″ als unveränderlich anzunehmen sind, um die Aenderungen der Winkelgeschwindigkeiten und der Lage der augenblicklichen Drehungsachsen während des Stoßes abzuleiten. Allein auch diese Gleichungen können im Allgemeinen weder einzeln integrirt, noch so verbunden werden, daß ihre Integration in Bezug auf t zwischen 0 und τ möglich würde, wenn auch die Function: $\Phi(\tau)$ als bekannt vorausgesetzt wird; es läßt sich auch aus denselben nicht ein ähnlicher einfacher Schluß in Bezug auf die Winkel-

geschwindigkeiten ziehen, wie wir ihn durch die Gleichungen (B) und (C) in §. 103 für die fördernden Geschwindigkeiten erhalten haben. Denn setzt man

$$\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2 + \mathfrak{r}'^2 = \mathfrak{n}'^2 \,, \quad \mathfrak{p}' = \mathfrak{n}' \cos \mathrm{h}' \,, \quad \mathfrak{q}' = \mathfrak{n}' \cos \mathrm{k}' \,, \quad \mathfrak{r}' = \mathfrak{n}' \cos \mathrm{l}' \,,$$

wonach h′, k′ und l′ die Winkel sein werden, welche die Achse des resultirenden Momentes N n′ mit den Coordinatenachsen der ξ, η und ζ einschließt, und multiplizirt dann die drei ersten der Gleichungen (γ) der Reihe nach mit $\cos$ h′, $\cos$ k′, $\cos$ l′, so gibt ihre Summe

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}' \cos \mathrm{h}' \frac{d\mathfrak{p}'}{dt} + \mathfrak{B}' \cos \mathrm{k}' \frac{d\mathfrak{q}'}{dt} + \mathfrak{C}' \cos \mathrm{l}' \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = \mathrm{N}\mathfrak{n}' \\ + \mathfrak{A}'\mathfrak{p}'(\mathfrak{q}' \cos \mathrm{l}' - \mathfrak{r}' \cos \mathrm{k}') + \mathfrak{B}'\mathfrak{q}'(\mathfrak{r}' \cos \mathrm{h}' - \mathfrak{p}' \cos \mathrm{l}') \\ + \mathfrak{C}'\mathfrak{r}'(\mathfrak{p}' \cos \mathrm{k}' - \mathfrak{q}' \cos \mathrm{h}') \,. \end{aligned}\right\} (\delta.$$

Es ist also hier die Aenderung des auf die Achse des Momentes N n′ projicirten Momentes der Bewegungsgrößen: $\mathfrak{A}'\mathfrak{p}' \cos \mathrm{h}' + \mathfrak{B}'\mathfrak{q}' \cos \mathrm{k}' + \mathfrak{C}'\mathfrak{r}' \cos \mathrm{l}'$ (II. Buch, §. 131) nicht nur von dem Moment N n′ abhängig, sondern noch von den drei letzten Gliedern der Gleichung (δ), und wenn man beachtet, daß $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ auch als die Coordinaten eines Punktes auf der augenblicklichen Drehungsachse betrachtet werden können, und wenn man

$$(\mathfrak{p}' \cos \mathrm{k}' - \mathfrak{q}' \cos \mathrm{h}')^2 + (\mathfrak{r}' \cos \mathrm{h}' - \mathfrak{p}' \cos \mathrm{l}')^2 + (\mathfrak{q}' \cos \mathrm{l}' - \mathfrak{r}' \cos \mathrm{k}')^2 = \mathfrak{f}^2$$

setzt, so wird man nach §. 21 der Einleitung einsehen, daß

$$\frac{\mathfrak{q}' \cos \mathrm{l}' - \mathfrak{r}' \cos \mathrm{k}'}{\mathfrak{f}} \,, \quad \frac{\mathfrak{r}' \cos \mathrm{h}' - \mathfrak{p}' \cos \mathrm{l}'}{\mathfrak{f}} \,, \quad \frac{\mathfrak{p}' \cos \mathrm{k}' - \mathfrak{q}' \cos \mathrm{h}'}{\mathfrak{f}}$$

die Cosinus der Winkel vorstellen, welche die zur Drehungsachse und zur Achse des Momentes N n′ normale Gerade mit den drei Hauptachsen bildet, und daß die Summe der drei letzten Glieder der Gleichung (δ) die mit $\mathfrak{f}$ multiplizirte Projection oder Componente des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen auf die ebengenannte Normale ausdrückt, welche im Allgemeinen nicht Null ist. Ebenso wird man sich überzeugen, daß das Aenderungsgesetz der Componenten des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen nach einer Normalen zur Achse des Momentes N n′ nicht Null ist, sondern gleich der Componente

desselben resultirenden Momentes auf eine Senkrechte zu dieser Normalen und zur augenblicklichen Drehungsachse, daß also auch jene Componente nicht constant bleiben kann. *)

Die eben erwähnten, im Allgemeinen nicht statthabenden Analogien zwischen der Winkelgeschwindigkeit oder den Componenten des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen in Bezug auf die Achse des Momentes Nn' oder in Bezug auf eine Senkrechte zu derselben und der fördernden Geschwindigkeit, parallel zur Richtung des Druckes N oder senkrecht dazu genommen, können nur in zwei Fällen eintreten, nämlich

1) wenn die drei Massemomente $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ gleich werden, oder wenn alle Achsen im Mittelpunkte Hauptachsen sind, was aus den Gleichungen (γ) auf einen Blick folgt, weil nun die Glieder mit den Producten $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, u. s. f. wegfallen, die drei ersten der Gleichungen (γ) auf die einfachen:

$$\varepsilon.)\quad \mathfrak{A}'\frac{d\mathfrak{p}'}{dt} = Np' \quad,\quad \mathfrak{A}'\frac{d\mathfrak{q}'}{dt} = Nq' \quad,\quad \mathfrak{A}'\frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = Nr'$$

zurückkommen, und die Gleichung (δ) auf

$$\mathfrak{A}'\frac{d(\mathfrak{p}'\cos h' + \mathfrak{q}'\cos k' + \mathfrak{r}'\cos l')}{dt} = \mathfrak{A}'\frac{d.\varphi'\cos\vartheta'}{dt} = Nn',$$

worin ϑ' den Winkel bedeutet, welchen die augenblickliche Drehungsachse mit der Achse des resultirenden Momentes Nn' macht. Diese Gleichung spricht demnach aus, daß sich im jetzigen Falle die Componente der Winkelgeschwindigkeit φ' nach der Achse des Momentes Nn' durch den Stoß so ändert, wie im vorhergehenden §. bei der Bewegung um eine feste Achse die Winkelgeschwindigkeit selbst, und daraus folgt auch, daß

*) Poisson kommt in seiner Traité de mécanique, II, §. 470 zu dem falschen Schluß, daß das Moment der Bewegungsgrößen in Bezug auf die Normale im Berührungspunkte während des Stoßes constant sei, indem er seiner Untersuchung das auf die Bewegungsgrößen, welche während der Zeit τ des Stoßes verloren werden, ausgedehnte d'Alembert'sche Princip zu Grunde legt. Das Obige ist eine genügende, wenn auch indirecte Widerlegung dieser unrechtmäßigen Ausdehnung des d'Alembert'schen Princips. Uebrigens würde jener Schluß, wenn er richtig wäre, für alle Senkrechten zur Achse des Momentes Nn' gelten, nicht bloß für die Normale im Berührungspunkt oder für die Richtung der Kraft N.

die Componente: $\varphi' \sin \vartheta'$ constant sein muß. Man kann aber im jetzigen Falle, da alle Achsen im Mittelpunkte Hauptachsen sind, die Betrachtung dadurch wesentlich vereinfachen, daß man die Achse des Momentes $N n'$ als eine der Coordinatenachsen, z. B. als die der ζ nimmt; es wird dann $p' = q' = 0$, und die Gleichungen (ε), welche auf

$$\frac{d\mathfrak{p}'}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathfrak{q}'}{dt} = 0 \quad , \quad \mathfrak{A}' \frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = N r' = N n' \qquad (\zeta.$$

zurückkommen, machen nun die betreffenden Gesetze für die Aenderung der Componente $\mathfrak{r}'$ und für die Unveränderlichkeit der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ augenfällig.

2) Finden jene Analogien statt, wenn beim Beginne des Stoßes die Achse des Momentes $N n'$ mit einer Hauptachse zusammenfällt, dabei aber die Richtung der Normalen im Berührungspunkte oder die des Druckes N in der Ebene der beiden andern Hauptachsen liegt, und die Massemomente in Bezug auf diese letztern gleich sind, wenn also jede in ihrer Ebene liegende und durch den Mittelpunkt gehende Gerade eine Hauptachse ist.

Denn nehmen wir an, daß beim Beginne des Stoßes die Achse des Momentes $N n'$ mit der Hauptachse der ζ' zusammenfalle und die Richtung der Kraft N selbst in der Ebene der $\xi' \eta'$ liege, und daß die Massemomente $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ einander gleich seien, so haben wir statt der drei ersten Gleichungen (γ) die folgenden:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{A}' \dfrac{d\mathfrak{p}'}{dt} = (\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}')\, \mathfrak{q}' \mathfrak{r}' \quad , \quad \mathfrak{A}' \dfrac{d\mathfrak{q}'}{dt} = (\mathfrak{C}' - \mathfrak{A}')\, \mathfrak{p}' \mathfrak{r}', \\ \mathfrak{C}' \dfrac{d\mathfrak{r}'}{dt} = N r' = N n' . \end{array}\right\} \quad (\eta.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen kann man dann dadurch, daß man sie mit $\mathfrak{p}'$ und $\mathfrak{q}'$ multiplizirt und ihre Summe nimmt, die neue Gleichung:

$$\frac{d \,.\, (\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2)}{dt} = 0$$

und aus dieser den Schluß ziehen, daß die in die Ebene der $\xi \eta$ fallende Componente: $\varphi' \sin \vartheta' = \sqrt{\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2}$ der Winkelgeschwindigkeit während des Stoßes unverändert bleibt. Daraus folgt aber nicht, daß

𝔭′ und 𝔮′ einzeln constant sind, oder daß jene Componente $\varphi' \sin \vartheta'$ auch eine constante Richtung behält; man findet vielmehr, wenn die beiden ersten Gleichungen (η) nacheinander mit 𝔮′ und 𝔭′ multiplizirt und subtrahirt werden, durch die sich ergebende Gleichung:

$$\mathfrak{A}' \left(\mathfrak{q}' \frac{d\mathfrak{p}'}{dt} - \mathfrak{p}' \frac{d\mathfrak{q}'}{dt} \right) = (\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}')(\mathfrak{p}'^2 + \mathfrak{q}'^2)\,\mathfrak{r}'$$

oder in eine andere Form gebracht:

$$\frac{\mathfrak{q}'}{\varphi' \sin \vartheta'} \frac{d\frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{q}'}}{dt} = \frac{\mathfrak{A}' - \mathfrak{C}'}{\mathfrak{A}'}\,\mathfrak{r}' = \frac{d\varepsilon'}{dt},$$

daß der Winkel ε', welchen die Componente $\varphi' \sin \vartheta'$ mit der ξ'=Achse bildet, sich mit 𝔯′ und t ändert, so lange 𝔄′ und ℭ′ verschieden sind; daß aber diese Aenderung und mit ihr die Aenderung von 𝔭′ und 𝔮′ nur bestimmt werden kann, wenn 𝔯′ in Function von t gegeben ist.

Nach diesen Erörterungen müssen wir unsere Untersuchungen über die Wirkungen des Stoßes im Allgemeinen nothwendig auch auf die beiden vorherbetrachteten Fälle beschränken und für den zweiten den unter 2) ausgesprochenen Bedingungen noch die weitere beifügen, daß die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}'_0$ und $\mathfrak{q}'_0$ Null seien, daß also beim Beginne des Stoßes die Achse des Momentes N n′ zugleich die Hauptachse des Massemomentes ℭ′ und die augenblickliche Drehungsachse sei. Unter dieser Voraussetzung bleiben 𝔭′ und 𝔮′ während des Stoßes Null, die genannte Achse wird also für diese Zeit eine dauernde Drehungsachse, und man hat in beiden Fällen für den Stoß nur die Aenderung der Winkelgeschwindigkeit 𝔯′ mittels der letzten der Gleichungen (η) oder (ζ) zu bestimmen.

Ganz gleiche Erörterungen und Beziehungen ergeben sich natürlich auch für den Körper B, und es können darnach die beiden für jeden Körper durchführbaren Fälle in verschiedener Weise verbunden werden; es können die Voraussetzungen unter 1) oder unter 2) für beide Körper angenommen werden, oder die unter 1) für den ersten, die unter 2) für den zweiten Körper oder umgekehrt. Diese Verbindungen unterscheiden sich aber in der Behandlung so wenig, daß es genügen wird, die Auflösung für eine derselben durchzuführen, wozu wir die erste der zuletzt genannten wählen, d. h. voraussetzen wollen, daß bei dem Körper A alle Achsen im Mittelpunkte Hauptachsen sind und die Achse des

Momentes $N n'$ als Achse der ζ' genommen werde, und daß bei dem Körper (B) alle Achsen in der Ebene der $\xi \eta$ Hauptachsen sind, die Richtung des Druckes N in dieser Ebene liegt und die Achse der ζ, die eine besondere Hauptachse, auch die Drehungsachse für den Beginn des Stoßes ist. Bezeichnen wir dann die Werthe von $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{q}'$, $\mathfrak{r}'$ am Ende des Stoßes mit $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$, ebenso die von $\mathfrak{r}''$ mit $\mathfrak{R}''$, so haben wir für die Aenderung der drehenden Bewegung des Körpers A die Beziehungen:

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'_0 \,, \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}'_0 \,, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{r}'_0 + \frac{r'}{\mathfrak{N}'} \, \Phi(\tau) \,, \quad (\vartheta.$$

für die des Körpers B die einzige Gleichung:

$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{r}''_0 - \frac{r''}{\mathfrak{C}''} \, \Phi(\tau) \,, \qquad (\varkappa.$$

und es hängt die Auflösung zuletzt noch von der Bestimmung der Function $\Phi(\tau)$ ab.

Um diese Function unseren früheren Ableitungen entsprechend mittels der anfänglichen Geschwindigkeiten und der Massen und Massemomente der beiden Körper auszudrücken, gehen wir von einem ähnlichen Satze aus, wie er in §. 100 zur Ableitung der Gleichung (m) gedient hat. Wir denken uns nämlich zuerst wieder wie in dem vorhergehenden §. auf der Normalen im Berührungspunkte und zwar in den Fußpunkten der von den Mittelpunkten der Körper A und B darauf gefällten Senkrechten die Massen dieser Körper vereinigt und stützen uns dann darauf, daß für *unelastische Körper der ganze Stoß, für theilweis elastische dessen erste Hälfte zu Ende ist, wenn diese Punkte in der Richtung des Druckes N oder der Normalen im ersten Berührungspunkte gleiche Geschwindigkeiten erlangt haben.* Die Geschwindigkeit eines außerhalb des Mittelpunktes der Masse liegenden Punktes besteht aber aus der gemeinschaftlichen fördernden Geschwindigkeit dieses Mittelpunktes und aus der Geschwindigkeit um diesen Mittelpunkt in Folge der drehenden Bewegung; am Anfange des Stoßes hat man daher, unter Beachtung der Lage der Achsen für die bezeichneten Punkte auf der Normalen und in ihrer Richtung genommen, die zusammengesetzten Geschwindigkeiten:

für den Körper A die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}'_1 + r' \mathfrak{r}'_0$,

für den Körper B die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}''_1 + r'' \mathfrak{r}''_0$.

Bezeichnen wir dann für das Ende der ersten Hälfte des Stoßes, dessen Dauer wieder τ_1 sei, die veränderlichen Größen mit $\widehat{\mathfrak{w}}'_1$, $\widehat{\mathfrak{w}}''_1$, $\widehat{\mathfrak{r}}'$, $\widehat{\mathfrak{r}}''$, u. s. f., so erhalten wir aus den Gleichungen (β) die Werthe:

$$\widehat{\mathfrak{w}}'_1 = \mathfrak{w}'_1 + \frac{1}{M'}\,\Phi(\tau_1)\;,\quad \widehat{\mathfrak{w}}''_1 = \mathfrak{w}''_1 - \frac{1}{M''}\,\Phi(\tau_1),$$

ebenso aus den Gleichungen (ϑ) und ($\varkappa$) die Werthe:

$$\widehat{\mathfrak{r}}' = \mathfrak{r}'_0 + \frac{r'}{\mathfrak{A}'}\,\Phi(\tau_1)\;,\quad \widehat{\mathfrak{r}}'' = \mathfrak{r}''_0 - \frac{r''}{\mathfrak{C}''}\,\Phi(\tau_1)\;,$$

und diese, in die Bedingungsgleichung:

$$\widehat{\mathfrak{w}}'_1 + r'\,\widehat{\mathfrak{r}}' = \widehat{\mathfrak{w}}''_1 + r''\,\widehat{\mathfrak{r}}''$$

eingesetzt, führen für die Function $\Phi(\tau_1)$ auf den Ausdruck:

$$\lambda.)\;\left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{C}''}\right)\Phi(\tau_1) = \mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1 + r''\,\mathfrak{r}''_0 - r'\,\mathfrak{r}'_0.$$

Läßt man demnach den weitern Satz zu, daß für alle Körperformen

$$\Phi(\tau) = (1+\mu)\;\Phi(\tau_1)$$

genommen werden kann, worin der Coeffizient μ nur von der Elasticität und Form der beiden Körper, also keinesweges von den anfänglichen Geschwindigkeiten abhängig sei, so wird man aus dem vorhergehenden Ausdruck (λ) die gesuchte Function:

$$197.)\quad \Phi(\tau) = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1 + r''\,\mathfrak{r}''_0 - r'\,\mathfrak{r}'_0}{\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{C}''}}$$

erhalten, in welchem noch die $\mathfrak{w}''_1$ und $\mathfrak{w}'_1$ durch ihre Werthe in $\mathfrak{u}'_\xi$, u. s. f. zu ersetzen sind, und welcher dann in das System der direct aus (α) oder rückwärts aus (β) abgeleiteten Gleichungen für die fördernden Wirkungen des Stoßes, nämlich:

$$198.)\;\begin{cases} U'_\xi = \mathfrak{u}'_\xi + \frac{\cos\widehat{N\xi'}}{M'}\,\Phi(\tau)\;, & U''_\xi = \mathfrak{u}''_\xi - \frac{\cos\widehat{N\xi''}}{M''}\,\Phi(\tau), \\ \text{u. s. f.} & \text{u. s. f.} \end{cases}$$

sowie in die unter (ϑ) und ($\varkappa$) aufgeführten Gleichungen für die drehenden Wirkungen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'_0 \;, \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}'_0 \;, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{r}'_0 + \frac{r'}{\mathfrak{A}'}\,\Phi(\tau) \\ \mathfrak{R}'' = \mathfrak{r}''_0 - \frac{r''}{\mathfrak{C}''}\,\Phi(\tau) \end{array}\right\}, \quad (199.$$

einzuführen ist, um die Lösung unserer Aufgabe für unsere aus 1) und 2) zusammengesetzten Fälle zu erhalten.

Gehen wir zur Vergleichung wieder auf die schon betrachteten einfachen Fälle zurück, so finden wir für die Voraussetzung, daß die Richtung des Druckes N durch die Mittelpunkte beider Körper geht, für welche r′ und r″ Null werden,

$$\Phi(\tau) = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1}{\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''}} \;,$$

und damit ergibt sich aus (198) wie oben

$$U'_\xi = \mathfrak{u}'_\xi + (1+\mu)\,\frac{M''}{M'+M''}\,(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)\cos\widehat{N\xi'} \;, \quad \text{u. s. f.}$$

$$U''_\xi = \mathfrak{u}''_\xi - (1+\mu)\,\frac{M'}{M'+M''}\,(\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1)\cos\widehat{N\xi''} \;, \quad \text{u. s. f.}$$

und ferner noch die Werthe:

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'_0 \;, \quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}'_0 \;, \quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{r}'_0 \;, \quad \mathfrak{R}'' = \mathfrak{r}''_0 \;,$$

welche andeuten, daß bei dem centralen Stoß die Winkelgeschwindigkeiten beider Körper ungeändert bleiben.

Ist dagegen der Stoß für den zweiten Körper ein centraler, für den ersten nicht, also nur r″ = 0, so wird

$$\Phi(\tau) = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{w}''_1 - \mathfrak{w}'_1 - r'\,\mathfrak{r}'_0}{\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'}} \;,$$

und dieser Ausdruck kömmt auf den einfachen Werth:

$$\Phi(\tau) = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{w}''_1 - r'\mathfrak{r}'_0}{\frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'}} = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{A}'M''}{\mathfrak{A}'+M''r'^2}(\mathfrak{w}''_1 - r'\mathfrak{r}'_0)$$

zurück, wenn der Mittelpunkt des Körpers A als unbeweglich angenommen wird, was darauf hinausgeht, $\mathfrak{w}'_1 = \mathfrak{u}'_\xi = \mathfrak{u}'_\eta = \mathfrak{u}'_\zeta = 0$ und $M' = \infty$ zu setzen; mit diesem letzten Werth von $\Phi(\tau)$ folgen sofort aus (198) und (199) die Beziehungen:

$$U'_\xi = U'_\eta = U'_\zeta = 0\,,\quad U''_\xi = \mathfrak{u}''_\xi - (1+\mu)\frac{\mathfrak{A}'\cos\widehat{N\xi''}}{\mathfrak{A}'+M''r'^2}(\mathfrak{w}''_1 - r'\mathfrak{r}'_0)$$

u. s. f.

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'_0\,,\quad \mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}'_0\,,\quad \mathfrak{R}' = \mathfrak{r}'_0 + (1+\mu)\frac{M''r'}{\mathfrak{A}'+M''r'^2}(\mathfrak{w}''_1 - r'\mathfrak{r}'_0)\,,$$
$$\mathfrak{R}'' = \mathfrak{r}''_0\,,$$

welche ganz mit den im vorhergehenden §. gefundenen Gleichungen (192) und (193) übereinstimmen, wenn man darin $\mathfrak{A}'$ durch $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{r}'_0$ durch φ'_0 ersetzt und die Achse der ζ' des Körpers A selbst als Drehungsachse annimmt, wodurch $\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'_0$ und $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{q}'_0$ Null werden, und $\mathfrak{R}'$ in Φ' übergeht.

Ebenso wird man für den weiteren Fall, in welchem sich beide Körper um feste Achsen drehen und zusammenstoßen, in welchem also $\mathfrak{w}''_1$ und $\mathfrak{w}'_1$, $\frac{1}{M'}$ und $\frac{1}{M''}$ Null werden, den Werth:

$$\Phi(\tau) = (1+\mu)\,\frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{C}''}{\mathfrak{A}'r''^2 + \mathfrak{C}''r'^2}(r''\mathfrak{r}''_0 - r'\mathfrak{r}'_0)$$

ableiten und damit die entsprechenden Werthe von $\mathfrak{R}''$ und $\mathfrak{R}'$ erhalten, da alle U Null bleiben.

Endlich wird man sich auf dem früheren Wege leicht überzeugen, daß auch für den jetzigen allgemeineren Fall, natürlich in seiner Beschränkung durch die unter 1) und 2) gestellten Bedingungen, das Carnot'sche Princip gültig ist, d. h. daß man für den Verlust L_1 an lebendiger Kraft während der ersten Hälfte des Stoßes den Ausdruck hat:

$$\left.\begin{aligned} L_1 = M'\,[(\widehat{u}'_\xi - \mathfrak{u}'_\xi)^2 + (\widehat{u}'_\eta - \mathfrak{u}'_\eta)^2 + (\widehat{u}'_\zeta - \mathfrak{u}'_\zeta)^2] \\ + M''\,[(\widehat{u}''_\xi - \mathfrak{u}''_\xi)^2 + (\widehat{u}''_\eta - \mathfrak{u}''_\eta)^2 + (\widehat{u}''_\zeta - \mathfrak{u}''_\zeta)^2] \\ + \mathfrak{A}'\,(\widehat{\mathfrak{r}}' - \mathfrak{r}'_0)^2 + \mathfrak{E}''\,(\widehat{\mathfrak{r}}'' - \mathfrak{r}''_0)^2\,, \end{aligned}\right\} \text{(200}^a.$$

und für den Zuwachs L_2 an lebendiger Kraft während der zweiten Hälfte den Werth:

$$\left.\begin{aligned} L_2 = M'\,[(U'_\xi - \widehat{u}'_\xi)^2 + (U'_\eta - \widehat{u}'_\eta)^2 + (U'_\zeta - \widehat{u}'_\zeta)^2] \\ + M''\,[(U''_\xi - \widehat{u}''_\xi)^2 + (U''_\eta - \widehat{u}''_\eta)^2 + (U''_\zeta - \widehat{u}''_\zeta)^2] \\ + \mathfrak{A}'\,(\mathfrak{R}' - \widehat{\mathfrak{r}}')^2 + \mathfrak{E}''\,(\mathfrak{R}'' - \widehat{\mathfrak{r}}'')^2\,. \end{aligned}\right\} \text{(200}^b.$$

Denn mittels der Gleichungen (198) und (199) nimmt der ursprüngliche Werth von L_1, nämlich

$$\begin{aligned} L_1 = M'\,(\mathfrak{u}'^2_\xi - \widehat{u}'^2_\xi + \mathfrak{u}'^2_\eta - \widehat{u}'^2_\eta + \mathfrak{u}'^2_\zeta - \widehat{u}'^2_\zeta) + \mathfrak{A}'\,(\mathfrak{r}'^2_0 - \widehat{\mathfrak{r}}'^2) \\ + M''\,(\mathfrak{u}''^2_\xi - \widehat{u}''^2_\xi + \mathfrak{u}''^2_\eta - \widehat{u}''^2_\eta + \mathfrak{u}''^2_\zeta - \widehat{u}''^2_\zeta) + \mathfrak{E}''\,(\mathfrak{r}''^2_0 - \widehat{\mathfrak{r}}''^2)\,, \end{aligned}$$

zuerst die Form an:

$$L_1 = 2(\mathfrak{W}''_1 - \mathfrak{W}'_1 + r''\mathfrak{r}''_0 - r'\mathfrak{r}'_0)\Phi(\tau) - \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{E}''}\right)[\Phi(\tau)]^2$$

und reduzirt sich durch den Ausdruck (197) auf die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} L_1 = \left(\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{E}''}\right)[\Phi(\tau)]^2 \\ = \frac{(\mathfrak{W}''_1 - \mathfrak{W}'_1 + r''\mathfrak{r}''_0 - r'\mathfrak{r}'_0)^2}{\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{E}''}}\,, \end{aligned}\right\} \text{(201.}$$

von denen der erstere durch die Gleichungen (198) und (199) unmittelbar auf den Ausdruck (200ª) führt, während der zweite an und für sich zu beachten ist. Ebenso findet man wieder $L_2 = \mu^2 L_1$ und damit den Werth (200ᵇ) und zuletzt für den noch übrig bleibenden Verlust L am Ende des ganzen Stoßes den Ausdruck:

$$202.)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= L_1 - L_2 = (1-\mu^2)\, L_1 \\ &= (1-\mu^2)\, \frac{(w''_1 - w'_1 + r''\mathfrak{r}''_0 - r'\mathfrak{r}'_0)^2}{\frac{1}{M'} + \frac{1}{M''} + \frac{r'^2}{\mathfrak{A}'} + \frac{r''^2}{\mathfrak{E}''}}, \end{aligned} \right.$$

von welchem die Werthe (183), (191) und (196) nur besondere Fälle bilden.

§. 107.

Bei den vorhergehenden Untersuchungen wurden die sich stoßenden Körper als ganz frei betrachtet, oder bloß der Beschränkung unterworfen, sich nur um eine feste Achse drehen zu können, und dann wurde von der Reibung Umgang genommen; wir haben daher auch auf diesen Umstand noch Rücksicht zu nehmen und dem Stoße bei sonstiger beschränkter Bewegung eine Bemerkung zu widmen.

Die festen Hindernisse, welche die Bewegung eines Körpers beschränken, sind selbst Körper und daher für den Stoß veränderlich, wenigstens an der Stelle, auf welche der Stoß zunächst wirkt; nur ist die Masse eines solchen Hindernisses als unendlich groß zu betrachten, wie in dem Falle, wo ein zuerst freier Körper in seiner Bewegung auf einen solchen äußerlich unbeweglichen Körper trifft. Die Untersuchung des Stoßes bei beschränkter Bewegung des gestoßenen oder beider sich stoßenden Körper kann also im Allgemeinen so geführt werden, daß man sich die beiden Körper zuerst als ganz frei denkt und die Wirkung ihres gegenseitigen Stoßes bestimmt, und dann von der Vorstellung ausgeht, die betreffenden Körper seien nun erst mit den durch diesen Stoß erhaltenen neuen Geschwindigkeiten auf die ihre Bewegung beschränkenden Hindernisse gestoßen. Auf diesen zweiten Stoß wird dann ein dritter und selbst vierter, u. s. f. folgen, bis die Körper sich trennen oder der Stoß, durch die unvollkommene Elasticität immer schwächer werdend, aufhört.

Nehmen wir als einfaches Beispiel eine vollkommen elastische Kugel A, Fig. 33, welche auf einer horizontalen Ebene MY in Ruhe ist

und von einer andern ebenfalls elastischen Kugel B von gleicher Masse getroffen wird; die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''$ dieser letztern sei unter einem Winkel ϑ gegen die aufwärts gerichtete Normale MX zur Ebene geneigt, und der zum Berührungspunkte beider Kugeln vom Mittelpunkte der stoßenden Kugel B gezogene Halbmesser bilde den Winkel λ mit derselben Normalen und liege in der Ebene, welche diese Normale und die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}''$ enthält. Es sind dann nach §. 103 die Geschwindigkeiten vor dem Stoße:

$$\mathfrak{u}'_x = 0\,, \quad \mathfrak{u}'_y = 0\,, \quad \mathfrak{u}''_x = \mathfrak{v}''\cos\vartheta\,, \quad \mathfrak{u}''_y = \mathfrak{v}''\sin\vartheta\,,$$

$$\mathfrak{w}'_1 = 0\,, \quad \mathfrak{w}''_1 = \mathfrak{v}''(\cos\vartheta\cos\lambda + \sin\vartheta\sin\lambda) = \mathfrak{v}''\cos(\vartheta-\lambda)\,;$$

also hat man, da $\mu = 1$, $m'' = m'$ ist, nach dem Stoße die Geschwindigkeiten:

$$U'_x = \mathfrak{v}''\cos(\vartheta-\lambda)\cos\lambda\,, \qquad U'_y = \mathfrak{v}''\cos(\vartheta-\lambda)\sin\lambda\,,$$

$$U''_x = \mathfrak{v}''[\cos\vartheta - \cos(\vartheta-\lambda)\cos\lambda]\,, \quad U''_y = \mathfrak{v}''[\sin\vartheta - \cos(\vartheta-\lambda)\sin\lambda]\,,$$

$$= -\mathfrak{v}''\sin\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\,, \qquad = \mathfrak{v}''\cos\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\,.$$

Mit der Geschwindigkeit U'_x stößt nun die Kugel A gegen die feste Ebene MY, springt, wenn diese auch einen vollkommen elastischen Körper begrenzt, von ihr mit gleicher Geschwindigkeit, aber im Sinne der Normalen MX zurück und stößt nun ihrerseits auf die Kugel B, welche mit den Geschwindigkeiten U''_x und U''_y begabt ist.

Für diesen dritten Stoß haben wir dann den Sinn der Normalen AB zu tauschen, so daß nun $\pi + \lambda$ der Winkel ist, welchen diese Normale mit der Achse MX bildet. Am Anfang dieses Stoßes haben wir daher für den Körper B die Geschwindigkeiten:

$$\mathfrak{u}''_x = -\mathfrak{v}''\sin\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\,, \quad \mathfrak{u}''_y = \mathfrak{v}''\cos\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\,,$$

$$\mathfrak{w}''_1 = -\mathfrak{v}''\sin\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\cos(\pi+\lambda)$$
$$+ \mathfrak{v}''\cos\lambda\sin(\vartheta-\lambda)\sin(\pi+\lambda) = 0\,,$$

für den Körper A dagegen die Geschwindigkeiten:

$$\mathfrak{u}'_x = -\mathfrak{v}''\cos\vartheta\cos(\vartheta-\lambda)\,, \quad \mathfrak{u}'_y = \mathfrak{v}''\sin\lambda\cos(\vartheta-\lambda)\,,$$

$$\mathfrak{w}'_1 = \mathfrak{v}''\cos(\vartheta-\lambda)\cos 2\lambda\,.$$

Am Ende dieses dritten und letzten Stoßes bleiben also für B noch die Geschwindigkeiten:

$$U''_x = - v'' [\sin\lambda \sin(\vartheta-\lambda) + \cos(\vartheta-\lambda) \cos 2\lambda \cos\lambda],$$
$$= v'' [\cos\vartheta - 2\cos^3\lambda \cos(\vartheta-\lambda)],$$

$$U''_y = v'' [\cos\lambda \sin(\vartheta-\lambda) - \cos(\vartheta-\lambda) \cos 2\lambda \sin\lambda],$$
$$= v'' [\sin\vartheta - 2\sin\lambda \cos^2\lambda \cos(\vartheta-\lambda)];$$

und für A die Geschwindigkeiten:

$$U'_x = - v'' [\cos\lambda \cos(\vartheta-\lambda) - \cos(\vartheta-\lambda) \cos 2\lambda \cos\lambda],$$
$$= - 2v'' \cos\lambda \sin^2\lambda \cos(\vartheta-\lambda),$$

$$U'_y = v'' [\sin\lambda \cos(\vartheta-\lambda) + \cos(\vartheta-\lambda) \cos 2\lambda \sin\lambda],$$
$$= 2v'' \sin\lambda \cos^2\lambda \cos(\vartheta-\lambda).$$

Der Mittelpunkt der Kugel A bewegt sich also nach diesem letzten Stoße mit der Geschwindigkeit: $V' = \pm v'' \sin 2\lambda \cos(\vartheta-\lambda)$ in einer Richtung, welche den Winkel: $\alpha = arc\,tang \frac{\cos\lambda}{-\sin\lambda} = \frac{1}{2}\pi + \lambda$ mit der Geraden MX bildet, während die Kugel B mit der Geschwindigkeit: $V'' = v'' \sqrt{[\cos\vartheta - 2\cos^3\lambda \cos(\vartheta-\lambda)]^2 + [\sin\vartheta - 2\sin\lambda\cos^2\lambda\cos(\vartheta-\lambda)]^2}$ $= v'' \sqrt{1 - \sin^2 2\lambda \cos^2(\vartheta-\lambda)}$ fortgeht und zwar in einer Richtung, welche durch den Winkel: $\beta = arc\,tang \frac{\sin\vartheta - 2\sin\lambda\cos^2\lambda\cos(\vartheta-\lambda)}{\cos\vartheta - 2\cos^3\lambda\cos(\vartheta-\lambda)}$ gegen die x=Achse bestimmt wird.

Wenn z. B. die Kugel B in der Richtung der Normalen MX auffällt, so hat man $\vartheta = \lambda = \pi$, folglich wird $V' = 0$, $V'' = v''$, $\beta = 0$; die Kugel A bleibt am Ende des Stoßes ohne Bewegung, und die Kugel B springt mit ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit nach der MX zurück, als wenn die Kugel A selbst unbeweglich wäre. Trifft sie dagegen diese letztere in einem Punkte P, Fig. 33, so, daß $\lambda = \frac{3}{4}\pi$ ist, und wie vorher $\vartheta = \pi$, so wird $V' = v'' \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $V'' = v'' \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\beta = arc\,tang \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi$; die

Kugel A springt demnach mit der Geschwindigkeit 0,7... v″ und unter einem Winkel von 45° von der Ebene ab, während sich B unter demselben Winkel und mit derselben Geschwindigkeit gegen die Ebene fortbewegt. Wäre endlich noch $\vartheta = \lambda = \frac{1}{4}\pi$, so ergäbe sich $V' = v''$, $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ und $V'' = 0$; die Kugel B würde ihre Geschwindigkeit ganz verlieren und die Kugel A wie vorher unter einem Winkel von 45°, aber mit der ganzen Geschwindigkeit v″ von der Ebene abspringen.

Aehnliche einfache Fälle wird man leicht mehrere finden, um die für sie aus dem Vorhergehenden folgenden Ergebnisse mit der Erfahrung zu vergleichen.

§. 108.

In ganz gleicher Weise kann der Stoß mehrerer mit einander in Berührung stehender Körper und der gleichzeitige Stoß dreier und mehrerer Körper behandelt werden, weßwegen wir hier sogleich einige Beispiele solcher Fälle anfügen wollen.

Das bekannte Experiment mit einer geradlinigen Reihe elastischer Kugeln von gleicher Masse zeigt, daß der Stoß von einer Kugel zur andern fast unverändert fortgepflanzt wird. Stößt eine derselben auf die übrigen, welche in Ruhe sind, nach der Richtung ihrer Mittelpunkte, so würde sie bei vollkommener Elasticität ihre Geschwindigkeit an die erste der ruhenden abgeben, diese an die zweite, u. s. f., die vorletzte an die letzte; diese würde also mit derselben Geschwindigkeit fortgehen, und alle übrigen in Ruhe bleiben; weil aber immer μ^2 etwas kleiner als 1 ist, so gibt jede einzelne Kugel nicht ihre ganze Geschwindigkeit an die folgende ab, die Geschwindigkeit wird mit der Zahl der Kugeln immer kleiner und alle Kugeln bleiben in Bewegung. Läßt man zwei Kugeln hintereinander auf die übrigen ruhenden stoßen, so kann man jene beiden nicht als eine Kugel von doppelter Masse betrachten, sondern muß ihre Wirkung als einen doppelten Stoß auffassen; die vordere zuerst anstoßende gibt ihre Geschwindigkeit an die ruhenden ab und erhält dann selbst von der zweiten, welche einen Augenblick später in ihrem Laufe aufgehalten wird, einen Stoß von gleicher Stärke, welcher wie der erste allen folgenden Kugeln mitgetheilt wird; es folgt daher auch der bereits weggegangenen letzten Kugel einen Augenblick später mit gleicher Geschwindigkeit die vorletzte, alle übrigen verlieren ihre Geschwindigkeit fast ganz. Läßt man drei Kugeln in derselben Richtung hintereinander auf die übrigen stoßen, so springen auch drei Kugeln ab, weil nun ein dreifacher Stoß eintritt, u. s. f.

Wenn drei elastische Kugeln A, B, C von gleicher Größe und Masse in gleichsinniger Berührung stehen und so, daß ihre Mittelpunkte in einer horizontalen Ebene liegen, und wenn dann eine derselben z. B. A von einer vierten gleichen Kugel parallel zu dieser Ebene gestoßen wird, so zerlegt sich die Geschwindigkeit, welche ihr durch diesen Stoß mitgetheilt wurde, nach den beiden Verbindungslinien ihres Mittelpunktes und der Mittelpunkte der beiden andern Kugeln B und C oder eigentlich nach den Normalen in den beiden Berührungspunkten (vorausgesetzt, daß ihre Richtung zwischen diese Normalen fällt), und es treten nun mit diesen Componenten gleichzeitig zwei neue Stöße zwischen A und B und zwischen A und C ein; die beiden Kugeln B und C gehen also in unserm Falle mit diesen Geschwindigkeiten selbst und in der Richtung derselben aus einander, die Kugel A bleibt an ihrem Orte in Ruhe.

Wesentlich anders aber wird die Erscheinung, wenn die Kugeln nicht alle drei in unmittelbarer Berührung stehen, sondern z. B. nur A mit B, und B mit C, so daß zwischen A und C ein wenn auch noch so kleiner Zwischenraum bleibt. In diesem Falle zerlegt sich die Geschwindigkeit v, welche der Kugel A mitgetheilt worden, nach der Verbindungslinie oder Normalen AB und senkrecht dazu in die Componenten v_1 und v_2; die Kugel B geht mit der Geschwindigkeit v_1 in der Richtung AB fort, und A will mit v_2 in der Richtung dieser Componenten weiter gehen; sie trifft nun aber auf C, ihre Geschwindigkeit v_2 zerlegt sich von neuem in v'_2 und v''_2 nach der Normalen AC und senkrecht dazu, die Kugel C geht daher jetzt mit der Geschwindigkeit v'_2 in der Richtung der AC fort und A bleibt nicht in Ruhe, sondern behält die Geschwindigkeit v''_2. In dem einfachsten Falle z. B., wo die Richtung der Geschwindigkeit v, welche der Kugel A mitgetheilt worden, den Winkel BAC, Fig. 34, halbirt, werden die Kugeln B und C, wenn sie beide in unmittelbarer Berührung mit A stehen, die gleichen Geschwindigkeiten $v_1 = v_2 = \frac{v}{2\cos\frac{1}{6}\pi} = \frac{1}{3} v \sqrt{3} = 0{,}577\ldots v$ annehmen, und A wird in Ruhe bleiben. Berührt dagegen A nur die B unmittelbar, so erhält diese die Geschwindigkeit $v_1 = v\cos\frac{1}{6}\pi = 0{,}866\ldots v$, und A stößt mit der Geschwindigkeit $v_2 = v\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} v$ auf C; bei diesem Stoße zerlegt sich dann v_2 in $v'_2 = v_2\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4} v \sqrt{3} = 0{,}433\ldots v$, mit welcher C in der Richtung AC fortgeht, und in $v''_2 = v_2\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4} v$, mit welcher A in der Richtung AD unter einem Winkel von 150° gegen die AB rückwärts läuft. Man wird sich darnach leicht die verschiedenen Bewegungen erklären,

welche eine größere Anzahl von Kugeln annehmen kann, wenn diese theils in unmittelbarer Berührung stehen, theils durch sehr kleine Zwischenräume getrennt sind.

Ganz auf dieselbe Weise, wie bei dem vorhergehenden Falle, wird das Ergebniß des Stoßes gefunden, je nachdem eine Kugel gleichzeitig auf zwei andere trifft (was übrigens noch schwerer zu erreichen ist, als daß eine Kugel mit zwei andern in gleich inniger Berührung steht), oder nur sehr nahe an der einen vorbeigeht und auf die daneben liegende trifft.

Stoßen umgekehrt zwei oder mehrere Kugeln gleichzeitig auf eine andere in Ruhe oder in Bewegung befindliche, so müssen alle Stöße einzeln betrachtet und die aus denselben für die gestoßene Kugel hervorgehenden Geschwindigkeiten zu einer resultirenden Geschwindigkeit vereinigt werden.

Die vorhergehenden Betrachtungen könnten leicht auf allgemeinere Fälle und andere Körperformen ausgedehnt werden; diese bieten indessen bei ihrer seltenen Anwendung nicht genügende Veranlassung, um weiter darauf einzugehen.

§. 109.

Was zuletzt den Einfluß der **Reibung** auf das Ergebniß des Stoßes betrifft, so darf man diesen nicht darin suchen, daß der Reibungswiderstand während der kurzen Dauer des Stoßes als negativ fördernde Kraft unmittelbar die Bewegungen der Mittelpunkte der Massen ändere. Denn diese Annahme widerstreitet der allgemein zugelassenen Voraussetzung, daß der äußere Zustand der Körper während des Stoßes ungeändert bleibt, weil es für einen solchen ungeänderten Zustand keine Reibung im eigentlichen Sinne der gleitenden Reibung gibt; diese tritt erst auf, wenn eine gleitende Bewegung eintreten will, also erst wenn der Stoß zu Ende ist; die Reibung kann daher als Kraft erst für die mit dem Ende des Stoßes beginnende Bewegung in Rechnung gebracht werden. In einem andern Sinne aber hat die Reibung einen wesentlichen Einfluß auf das Ergebniß des Stoßes, nämlich insofern als durch den von ihr herrührenden Widerstand die Achse für die drehende Bewegung, welche ursprünglich durch den Mittelpunkt der Masse ging, in den Berührungspunkt verlegt, und dadurch dem Mittelpunkte eine neue Geschwindigkeit ertheilt werden kann, welche sich mit der aus dem Stoß unmittelbar sich ergebenden Geschwindigkeit verbindet und dadurch ein anderes Ergebniß liefert, als wenn von der Reibung Umgang

genommen wird. Es geht daraus hervor, daß die Reibung nur für denjenigen Körper in Betracht kommen kann, welcher eine drehende Bewegung besitzt, und bei welchem die Normale im Berührungspunkte durch den Mittelpunkt der Masse geht, bei dem also ohne stattfindende Reibung der Stoß keinen Einfluß auf die drehende Bewegung hätte, und daß der Einfluß der Reibung auf das Ergebniß des Stoßes hauptsächlich oder vielmehr fast allein von der Aenderung dieser drehenden Bewegung während der kurzen Dauer des Stoßes und daher mit dieser von der gleitenden Bewegung der Berührungspunkte abhängt, wie bei der gezwungenen Bewegung fester Körper (Buch II, §. 215), nur mit dem Unterschiede, daß für unsern jetzigen Fall die äußern fördernden Kräfte ΣX, ΣY, ΣZ ohne Einfluß bleiben.

Betrachten wir übrigens nur den einfachsten Fall, nämlich den, wo der Druck N während des Stoßes und der Reibungscoeffizient f groß genug ist, um die gleitende Bewegung der Berührungspunkte während der Zeit τ ganz aufzuheben, so läßt sich die Wirkung des Stoßes am einfachsten mittels der allgemeinen Gleichungen (198) und (199) ausdrücken, wenn man sich statt der Reibung vorstellt, die betreffenden Körper hätten noch nach der Richtung der Normalen im Berührungspunkte unelastische Vorsprünge oder Zähne, mit welchen sie sich zum zweitenmal und zwar nur tangential oder in Bezug auf die drehende Bewegung desjenigen stoßen, bei welchem die Normale durch den Mittelpunkt geht, wobei man also die drehende Bewegung des andern Körpers, bei dem dieser Umstand nicht stattfindet, sowie die anfänglichen fördernden Geschwindigkeiten als Null anzunehmen hat. Finden dieselben Umstände bei beiden sich stoßenden Körpern statt, so hat man auch für beide den gegenseitigen tangentialen Stoß in Bezug auf die drehende Bewegung derselben zu untersuchen. Zwei Beispiele werden genügen, um diese Erörterung einleuchtend zu machen, und zwar wollen wir dazu die schon in §. 103 angewendeten wählen, nur mit der Abänderung, daß die Kugeln nun drehende Bewegungen besitzen und der Einfluß der unserer Voraussetzung gemäß hinreichend großen Reibung zu berücksichtigen ist.

Dazu geben wir in der Vorstellung der Kugel C, Fig. 35, einen Vorsprung Mm, mit welchem dieselbe bei ihrer drehenden Bewegung, deren Winkelgeschwindigkeit φ''_0 und deren Achse senkrecht zu der Figur sei, an einen entsprechenden Vorsprung der ebenen Wand AB anstößt. Wir haben dann für diesen Stoß in den genannten Gleichungen $M' = M'' = \infty$, $W''_1 = W'_1 = \varphi'_0 = 0$ zu setzen und r'' als Halbmesser der Kugel zu nehmen. Damit wird

$$\Phi(\tau) = \frac{r'' \varphi''_0}{\frac{1}{M''} + \frac{r''^2}{\mathfrak{E}''}} = \frac{M'' \mathfrak{E}''}{M'' r''^2 + \mathfrak{E}''} r'' \varphi''_0 ,$$

und für die diesem Stoße entsprechende, senkrecht zu MN gerichtete Endgeschwindigkeit W″ des Mittelpunktes der Kugel hat man, $\mu = 0$ gesetzt,

$$W'' = -\frac{1}{M''} \Phi(\tau) = -\frac{\mathfrak{E}''}{M'' r''^2 + \mathfrak{E}''} r'' \varphi''_0 ,$$

oder da $\mathfrak{E}'' = \frac{2}{5} M'' r''^2$ ist,

$$W'' = -\frac{2}{7} r'' \varphi''_0 .$$

Als Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{N}''$ am Ende des Stoßes ergibt sich

$$\mathfrak{N}'' = \varphi''_0 - \frac{M'' r''^2}{M'' r''^2 + \mathfrak{E}''} \varphi''_0 = \frac{2}{7} \varphi''_0 ,$$

und mit dieser fährt die Kugel nach dem Stoße fort, sich um ihre Achse zu drehen, während die Geschwindigkeit W″ sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}''_2 = \mathfrak{v}'' \sin \vartheta$, §. 103, zu der tangentialen Componenten $\mathfrak{v}'' \sin \vartheta - \frac{2}{7} r'' \varphi''_0$ vereinigt, und nun als Ergebniß des vollkommen elastischen Stoßes für den Mittelpunkt die Geschwindigkeit:

$$V'' = \sqrt{\mathfrak{v}''^2 \cos^2 \vartheta + \left(\mathfrak{v}'' \sin \vartheta - \frac{2}{7} r'' \varphi''_0\right)^2}$$

gibt, deren Richtung durch den Winkel: $\vartheta'' = arc\,tang \frac{\mathfrak{v}'' \sin \vartheta - \frac{2}{7} r'' \varphi''_0}{-\mathfrak{v}'' \cos \vartheta}$ bestimmt wird. Dreht sich demnach die Kugel im Sinne eines Uhrzeigers oder im positiven Sinne, so wird dieser Winkel ϑ'' größer sein als ϑ' in §. 103, die Kugel wird also unter einem kleinern Winkel als ϑ gegen die Normale MN′ zurückspringen; die Richtung der Geschwindigkeit V″ wird sich dagegen mehr der Tangente MB zur Wand nähern, wenn φ''_0 negativ ist, oder die Kugel sich im entgegengesetzten Sinne eines Uhrzeigers dreht.

Wenn die Drehungsachse der Kugel nicht senkrecht ist zur Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit, aber senkrecht zur Normalen MN, so liegen die Geschwindigkeiten $\mathfrak{w}''_2 = \mathfrak{v}'' \sin \vartheta$ und $W'' = -\frac{2}{7} r'' \varphi''_0$ noch in einer zur AB parallelen Ebene, bilden aber einen Winkel ψ

mit einander, der kleiner ist als π, und die aus ihnen resultirende Geschwindigkeit U'', für welche man hat

$$U''^2 = v''^2 \sin^2 \vartheta + \frac{4}{49} r''^2 \varphi''_0{}^2 + \frac{4}{7} v'' r'' \varphi''_0 \sin \vartheta \cos \psi ,$$

wird unter einem Winkel ω gegen die Ebene der Figur geneigt sein, der durch die Beziehung: $U'' \sin \omega = \frac{2}{7} r'' \varphi'' \sin \psi$ gegeben wird. Die fördernde Geschwindigkeit V'', welche die Kugel am Ende des Stoßes besitzt, ist demnach ausgedrückt durch $\sqrt{U''^2 + v''^2 \cos^2 \vartheta}$; sie liegt offenbar in der Ebene der Geschwindigkeit U'' und der Normalen CM und bildet also auch den Winkel ω mit der Ebene der Figur, d. i. mit der Ebene der Normalen zur Wand und der anfänglichen Geschwindigkeit.

Ist endlich die Drehungsachse der Kugel beim Beginn des Stoßes sowohl gegen die Normale MN wie gegen die anfängliche Geschwindigkeit geneigt, so legt man durch CN und die Drehungsachse eine Ebene und errichtet auf der CN eine Senkrechte; diese wird dann die Achse des Momentes der Reibung sein und unserer ζ=Achse in §. 106 entsprechen, die Normale CM selbst der ξ=Achse. Bezeichnen wir daher den Winkel zwischen der erstern und der Drehungsachse mit ν, so haben wir für den der Reibung entsprechenden Stoß $\mathfrak{r}''_0 = \varphi''_0 \cos \nu$, $\mathfrak{p}''_0 = \varphi''_0 \sin \nu$, $\mathfrak{q}''_0 = 0$; es entspringt daraus eine fördernde Geschwindigkeit: $W'' = -\frac{2}{7} r'' \mathfrak{r}''_0 = -\frac{2}{7} r'' \varphi''_0 \cos \nu$ in der Richtung der η=Achse, und eine Winkelgeschwindigkeit: $\mathfrak{N}'' = \frac{2}{7} \mathfrak{r}''_0 = \frac{2}{7} \varphi''_0 \cos \nu$ um die ζ=Achse, und diese letztere verbindet sich mit $\mathfrak{p}''_0$ zu einer resultirenden Winkelgeschwindigkeit: $\Phi'' = \varphi''_0 \sqrt{\sin^2 \nu + \frac{4}{49} \cos^2 \nu}$ deren Achse leicht zu bestimmen ist. Ebenso wird man leicht die resultirende fördernde Geschwindigkeit V'' der Größe und Richtung nach aus dem Vorhergehenden ableiten und damit die vollständige Lösung der Aufgabe erreicht haben.

Als zweite Anwendung wollen wir den Fall nehmen, daß eine ruhende Kugel von einer andern von gleicher Masse und Größe, welche wieder neben der fortschreitenden Bewegung auch eine drehende Bewegung besitzt, getroffen werde, und daß beide Kugeln vollkommen elastisch seien. Für diesen Fall denkt man sich, wie in dem zuletzt vorhergehenden, durch die Normale im Berührungspunkte und die Drehungsachse der stoßenden Kugel eine Ebene gelegt, und darin auf jene Normale eine Senkrechte gefällt, welche wieder die Achse des Momentes Nn für den aus der Reibung hervorgehenden Stoß sein wird. Man hat dann für

diesen Stoß im jetzigen Falle, und wenn wieder ν den Winkel zwischen der Drehungsachse und der ζ-Achse bezeichnet, die Werthe:

$$r' = r'' \,,\; M'' = M' \,,\; \mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}' = \frac{2}{5} M r^2 \,,\; \mathfrak{w}'_1 = \mathfrak{w}''_1 = 0 ,\; \varphi'_0 = 0 ,$$

$$\mathfrak{r}''_0 = \varphi''_0 \cos\nu \,,\; \mathfrak{p}''_0 = \varphi''_0 \sin\nu \,,\; \mathfrak{q}'' = 0 \,,\; \mu = 0$$

in die Gleichungen (197) und (199) einzusetzen, um daraus die Geschwindigkeiten für das Ende des Stoßes abzuleiten, nämlich

$$W' = \frac{1}{7} r \varphi_0 \cos\nu \,,\qquad \mathfrak{N}' = \frac{5}{14} \varphi_0 \cos\nu \,,$$

$$W'' = -\frac{1}{7} r \varphi_0 \cos\nu \,,\qquad \mathfrak{N}'' = -\frac{9}{14} \varphi_0 \cos\nu \,,$$

von denen die fördernden Componenten W' und W'' senkrecht zur Ebene der $\xi\zeta$, oder zur Normalen im Berührungspunkte und zur Drehungsachse sind, während die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{N}'$ und $\mathfrak{N}''$ um die ζ-Achse und eine dazu parallele Achse in der ursprünglich ruhenden Kugel statthaben. Werden nun die erstern mit den früher für den directen Stoß der beiden Kugeln abgeleiteten fördernden Geschwindigkeiten verbunden, und die $\mathfrak{N}''$ noch mit der unverändert gebliebenen $\mathfrak{p}''_0$, so ist der Bewegungszustand einer jeden der beiden Kugeln nach dem Stoße und mit Rücksicht auf den Reibungswiderstand vollkommen bekannt.

Für den einfachsten Fall, z. B. wo sich der Mittelpunkt der zweiten Kugel in einer durch den Mittelpunkt der ersten gehenden Geraden bewegt, und die Drehungsachse derselben zu dieser Geraden senkrecht ist, hat man $\nu = 0$, $W' = +\frac{1}{7} r \varphi_0$, $W'' = -\frac{1}{7} r \varphi_0$.

Ist also wie früher (§. 103) $\mathfrak{v}''$ die Geschwindigkeit der zweiten Kugel am Anfange des Stoßes, und demnach, weil $\vartheta = 0$ ist,

$$W'_1 = \frac{1+\mu}{2} \mathfrak{v}'' \,,\qquad W''_1 = \frac{1-\mu}{2} \mathfrak{v}'' \,,$$

so erhält man für die fördernden Geschwindigkeiten V' und V'' der Mittelpunkte beider Kugeln die Werthe:

$$V' = \sqrt{\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2 \mathfrak{v}''^2 + \frac{1}{49} r^2 \varphi_0^2} \,,$$

$$V'' = \sqrt{\left(\frac{1-\mu}{2}\right)^2 \mathfrak{v}''^2 + \frac{1}{49} r^2 \varphi_0^2} \,;$$

die Richtungen dieser Geschwindigkeiten liegen in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene, welche die Geschwindigkeit $\mathbf{V}''$ enthält; die V' bildet mit der letztern einen Winkel:

$$\vartheta' = arc\ tang\ \frac{2}{7}\ \frac{r\varphi_0}{(1+\mu)\mathbf{V}''},$$

die V'' dagegen einen Winkel:

$$\vartheta'' = arc\ tang\left(-\frac{2}{7}\ \frac{r\varphi_0}{(1-\mu)\mathbf{V}''}\right).$$

Für $\mu = 1$ oder vollkommene Elasticität werden diese Ausdrücke einfacher

$$V' = \sqrt{\mathbf{V}''^2 + \frac{1}{49}\, r^2\varphi_0{}^2}\ , \quad V'' = \frac{1}{7}\, r\varphi_0\ ,$$

$$\vartheta' = arc\ tang\ \frac{r\varphi_0}{7\mathbf{V}''}\ , \quad \vartheta'' = \frac{3}{2}\,\pi\ .$$

In beiden Fällen drehen sich die Kugeln mit den obigen Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ um ihre Mittelpunkte und zwar um eine Achse, welche zu der ursprünglichen Drehungsachse der zweiten Kugel parallel ist.

Die vorhergehende Auflösung stützt sich, wie bemerkt wurde, auf die unter den gewöhnlich vorkommenden Verhältnissen meistens stattfindende Voraussetzung, daß der Druck N während des Stoßes und der Reibungscoeffizient groß genug seien, um die gleitende Bewegung der Berührungspunkte aufzuheben, und dieß wird immer der Fall sein, wenn der Unterschied der aus den Umdrehungsgeschwindigkeiten entspringenden Bewegungsgrößen zu der Differenz der den fördernden Geschwindigkeiten der Mittelpunkte entsprechenden Bewegungsgrößen in einem kleinern Verhältnisse steht als der Reibungscoeffizient zur Einheit.

Strenge genommen sollte aber die betreffende Untersuchung ganz in ähnlicher Weise geführt werden, wie die der gezwungenen Bewegung fester Körper, wenn die Reibung berücksichtigt wird (II. Buch, §. 215 u. f.); dazu wäre jedoch die Kenntniß der Function $f(N)$ in §. 100 nothwendig, und außerdem ist die Vergleichung der Theorie mit der Erfahrung wegen der dazu erforderlichen genauen Kenntniß der fördernden und drehenden Geschwindigkeiten so schwierig, daß es für jetzt zwecklos sein dürfte, weiter auf diese Untersuchung einzugehen.

Dritter Abschnitt.

Aeußere und innere Zustände eines veränderlichen Systems in Verbindung.

§. 110.

Die beiden vorhergehenden Abschnitte enthalten an allgemeinen Lehrsätzen Alles, was zur gründlichen Untersuchung der örtlichen Zustände eines veränderlichen Systems von materiellen Punkten nothwendig ist und für die Anwendung meistens am einfachsten und sichersten zum Ziele führt. Es gibt aber noch zwei allgemeinere und darum wenigstens theoretisch wichtige Lehrsätze, welche die innern und äußern Zustände eines beliebigen Systems von materiellen Punkten zusammen umfassen, nämlich das Princip von den virtuellen Geschwindigkeiten und den Lehrsatz von der Aenderung der vollständigen, innern und äußern lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems. Von diesen beiden Lehrsätzen ist der erstere eigentlich nur ein besonderer Fall des letztern, wie man sich bereits für den materiellen Punkt und unveränderliche Systeme durch das erste und zweite Buch überzeugt haben wird, und wie in §. 10 des gegenwärtigen ausgesprochen wurde, indem er nur die Bedingung ausdrückt, daß die von einem gewissen Zustande anfangende Aenderung der lebendigen Kraft für jede denkbare und mit den Beschränkungen, denen das System in seiner Bewegung etwa unterworfen ist, vereinbare sehr kleine Bewegung Null sein muß; nach dem bisherigen Gange in der Mechanik hat man jedoch diesen besondern Fall zuerst zu beweisen gesucht, um mittels seiner und des auf beliebige Systeme ausgedehnten d'Alembert'schen

Princips (Buch II, §. 202) den allgemeineren Lehrsatz von der Aenderung der lebendigen Kraft zu begründen, und insofern man die Zustände des Gleichgewichtes und der Bewegung getrennt und unabhängig von einander betrachten will, kann man auch jene beiden Lehrsätze trennen und jeden für sich beweisen, wie wir es in den beiden vorhergehenden Büchern und im ersten Abschnitt des gegenwärtigen gethan haben.

Nach der bisherigen Betrachtungsweise hat man aber die genannten Lehrsätze viel zu beschränkt aufgefaßt und nur für besondere Systeme von materiellen Punkten aufgestellt, nämlich für solche, deren Punkte oder Theile nach gewissen geometrischen Bedingungen in Verbindung stehen, welche die Bewegung der einen in Bezug auf die andern beschränken und mit Hülfe fester Curven und Flächen ausgedrückt werden können; alle übrigen Systeme und selbst die ebengenannten, wenn bei denselben die zwischen einzelnen Theilen stattfindenden Reibungswiderstände in Rechnung kommen, waren von jenen Lehrsätzen ausgeschlossen, und zwar deßhalb, weil man in den Ausspruch derselben nur die äußern Kräfte aufgenommen und die innern Kräfte ganz und gar umgangen hat, weil man sich namentlich bei der Begründung des Lehrsatzes von der lebendigen Kraft auf das d'Alembert'sche Princip stützt, welches sich nur auf den äußern Zustand eines Systems bezieht und den innern ganz unberücksichtigt läßt*), und dazu das selbst schon auf die obengenannten Systeme beschränkte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zu Hülfe nahm, wobei es dahingestellt sein mag, ob die mühseligen Beweise oder Begründungen desselben für die betreffenden Systeme auch nur gelungen sind, wobei man sich aber jener Beschränkung dieses Princips nicht mehr erinnerte und deßhalb zu einem Schlusse seine Zuflucht nehmen mußte, von dem ich nicht begreifen kann, wie er sich so lange in der Mechanik erhalten konnte, nämlich zu dem Schlusse, daß die in dem Zeitelement dt wirklich stattfindende

*) Demohngeachtet hat man mittels des d'Alembert'schen Princips auch die Gesetze für die innere Bewegung eines veränderlichen Systems abzuleiten gesucht, indem man dasselbe, obgleich es nur für ein ganzes System von materiellen Punkten bewiesen wird und gültig ist, auch auf den Zustand eines einzelnen Punktes in einem solchen System angewendet hat, oder vielmehr anzuwenden geglaubt hat; denn im Grunde hat man den betreffenden Punkt unter Einführung der äußern und innern Kräfte als ganz frei betrachtet und von dem d'Alembert'schen Princip nur die Form geborgt, wie wir es bei der gezwungenen Bewegung des materiellen Punktes in §. 94 des ersten Buches gethan haben. Man vergleiche darüber *Poisson*, Traité de mécanique, II, §. 482 und *Duhamel*, Cours de mécanique, II, §. 181.

Veränderung in der Lage der einzelnen Punkte des Systems nicht als eine mit den Bedingungen für die Verbindung dieser Punkte vereinbare virtuelle Verrückung angenommen werden dürfe, wenn diese Bedingungen, analytisch ausgedrückt, die Zeit t explicite enthalten, daß daher der Lehrsatz von der Aenderung der lebendigen Kraft auf solche Systeme nicht anwendbar sei. Abgesehen davon, daß das nur einen besondern Fall betreffende Princip der virtuellen Geschwindigkeiten offenbar in seiner Anwendung auf dieselben Systeme beschränkt ist, wie der allgemeinere Lehrsatz von der Aenderung der lebendigen Kraft, so ist es einleuchtend, daß wenn die Bewegung des Systems vollständig bekannt wäre, wenn also die Coordinaten der einzelnen Punkte als Functionen der Zeit t ausgedrückt wären, oder wenn dieß nur für einen oder den andern Punkt der Fall wäre, mittels dieser Functionen die Veränderliche t, welche in den obenerwähnten Bedingungen für die Verbindung der einzelnen Punkte oder Theile des Systems explicite enthalten ist, eliminirt und damit das Hinderniß für die Anwendbarkeit des Lehrsatzes der lebendigen Kraft beseitigt werden könnte, so wie man umgekehrt auf demselben Wege in jede derartige Bedingungsgleichung die Veränderliche t einführen kann. Nach jenem Schlusse wäre daher diese Anwendbarkeit nicht von der innern Beschaffenheit des Systems, sondern bloß von der analytischen Form dieser Beschaffenheit abhängig, und es würde sich je nach erfolgter Aenderung dieser Form jener Lehrsatz auf alle veränderliche Systeme erstrecken oder für keines gültig sein! Daß sich diese einseitige und unrichtige Auffassung und Begründung des genannten Lehrsatzes so lange erhalten konnte, ist um so auffallender, als man bei der Anwendung desselben auf die Theorie der Maschinen schon lange eingesehen hat, daß man bei der Berechnung der lebendigen Kraft einer Maschine nicht bloß die äußern Reibungswiderstände zwischen Maschinentheilen und festen Stützpunkten oder Flächen in Rechnung zu bringen habe, sondern auch die zwischen den einzelnen Maschinentheilen selbst, z. B. die Reibung an den Räderzähnen, welche offenbar eine innere Kraft ist und nach der bisherigen Begründung des Lehrsatzes von der lebendigen Kraft ebenso wenig in jene Berechnung einzugehen hätte, wie der Druck, welchen zwei solche Zähne aufeinander ausüben, und ebenso wenig als dieser Reibungswiderstand in die allgemeinen Lehrsätze (9) und (10) oder (12) und (14) über die äußern Zustände eines veränderlichen Systems (Erster Abschnitt, §. 11, u. f.) eingreift, welche doch auch aus dem d'Alembert'schen Princip abgeleitet werden, und wovon die in §. 98 behandelte Aufgabe ein sehr einfaches aber evidentes Beispiel ist.

Wir wollen nun unbeirrt durch die herrschende Meinung, als sei das d'Alembert'sche Princip der unentbehrliche Nothanker für die Mechanik veränderlicher Systeme, jene beiden Lehrsätze nach unserer Anschauungsweise allgemeiner darstellen und begründen und dann die Fälle näher beleuchten, für welche die bisherige, nur auf die äußern Kräfte beschränkte analytische Form jener Lehrsätze gültig ist, oder die Bedingungen, unter welchen dieselbe gültig ist.

§. 111.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten drückt, ganz allgemein aufgefaßt, die Bedingung für das vollständige Gleichgewicht aller Punkte oder Theile eines veränderlichen Systems aus, es begreift also sowohl das äußere als innere Gleichgewicht desselben und kann daher auch ganz allgemein nur mit Hülfe der äußern und innern Kräfte eines solchen Systems dargestellt werden. Der analytische Ausdruck dieses Princips wird aber der innern Kräfte wegen wieder verschieden sein, je nachdem das System ein stetiges oder ein nicht stetiges ist.

Betrachten wir zunächst die nicht stetigen Systeme und gehen von der in §. 30 angewendeten Bezeichnung aus, so haben wir für die drei Hauptcomponenten der auf einen beliebigen Punkt M_i des Systems ausgeübten Gesammtwirkung die Werthe:

$$\text{a.)}\quad \left\{ \begin{aligned} & X_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \,, \\ & Y_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \,, \\ & Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} \,, \end{aligned} \right.$$

und wir können diesen Punkt M_i unter dem Einflusse dieser Kräfte als ganz für sich bestehend betrachten. Sind demnach x_i, y_i, z_i die Coordinaten des Ortes, an welchem der gedachte Punkt im Gleichgewicht bleiben soll, in Bezug auf feste Achsen genommen, Δs_i der kleine Weg, welchen derselbe vermöge einer beliebigen sehr kleinen neuen Kraft, die den obigen beigefügt wird, zurücklegt, und Δx_i, Δy_i, Δz_i die Projectionen dieses Weges auf die drei Coordinatenachsen, so drückt nach §. 33 des ersten Buches die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} X_i \frac{\delta x_i}{\delta s_i} + Y_i \frac{\delta y_i}{\delta s_i} + Z_i \frac{\delta z_i}{\delta s_i} \\ - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s_i} \cos\alpha_{h,i} + \frac{\delta y_i}{\delta s_i} \cos\beta_{h,i} + \frac{\delta z_i}{\delta s_i} \cos\gamma_{h,i}\right) \\ + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s_i} \cos\alpha_{i,k} + \frac{\delta y_i}{\delta s_i} \cos\beta_{i,k} + \frac{\delta z_i}{\delta s_i} \cos\gamma_{i,k}\right) \end{array}\right\} = 0 \quad \text{(b.}$$

die nothwendige und genügende Bedingung für das Gleichgewicht des Punktes M_i aus, sowohl wenn er frei ist, als auch wenn er in seiner Bewegung durch äußere Hindernisse beschränkt wird.

Bezeichnet dann noch Δs die virtuelle Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes im System, und multiplizirt man die vorhergehende Gleichung mit dem willkürlichen Anfangswerth: $\frac{\delta s_i}{\delta s}$, so gibt die Summe aller Gleichungen (b) von $i = 1$ bis $i = n$ die Bedingung für das vollständige Gleichgewicht des ganzen Systems und den allgemeinsten Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten. Man findet so zunächst den Ausdruck:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{i=n} . \left(X_i \frac{\delta x_i}{\delta s_i} + Y_i \frac{\delta y_i}{\delta s_i} + Z_i \frac{\delta z_i}{\delta s_i}\right) \frac{\delta s_i}{\delta s} \\ - \sum\limits_{i=1}^{i=n} . \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s_i} \cos\alpha_{h,i} + \frac{\delta y_i}{\delta s_i} \cos\beta_{h,i} + \frac{\delta z_i}{\delta s_i} \cos\gamma_{h,i}\right) \frac{\delta s_i}{\delta s} \\ + \sum\limits_{i=1}^{i=n} . \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \left(\frac{\delta x_i}{\delta s_i} \cos\alpha_{i,k} + \frac{\delta y_i}{\delta s_i} \cos\beta_{i,k} + \frac{\delta z_i}{\delta s_i} \cos\gamma_{i,k}\right) \frac{\delta s_i}{\delta s} \end{array}\right\} = 0 .$$

Sind dann p und q zwei Zahlenwerthe zwischen 1 und n und so beschaffen, daß p kleiner ist als q, so werden unter den Gliedern der beiden letzten Doppelsummen auch die beiden folgenden vorkommen:

$$- J_{p,q} \left(\frac{\delta x_q}{\delta s_q} \cos\alpha_{p,q} + \frac{\delta y_q}{\delta s_q} \cos\beta_{p,q} + \frac{\delta z_q}{\delta s_q} \cos\gamma_{p,q}\right) \frac{\delta s_q}{\delta s} ,$$

$$+ J_{p,q} \left(\frac{\delta x_p}{\delta s_p} \cos\alpha_{p,q} + \frac{\delta y_p}{\delta s_p} \cos\beta_{p,q} + \frac{\delta z_p}{\delta s_p} \cos\gamma_{p,q}\right) \frac{\delta s_p}{\delta s} ,$$

von denen das erste erscheint, wenn $h = p$, $i = q$ wird, und das zweite, wenn $i = p$, $k = q$ wird. Man kann demnach die vorher=

gehende Gleichung unter die beiden folgenden Formen bringen, entweder unter die Form:

203ª.)
$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{i=n}.\left(X_i\frac{\delta x_i}{\delta s_i}+Y_i\frac{\delta y_i}{\delta s_i}+Z_i\frac{\delta z_i}{\delta s_i}\right)\frac{\delta s_i}{\delta s}\\ +\sum\limits_{h=1}^{h=n}.\sum\limits_{k=h+1}^{k=n}.J_{h,k}\left[\left(\frac{\delta x_h}{\delta s_h}\cos\alpha_{h,k}+\frac{\delta y_h}{\delta s_h}\cos\beta_{h,k}+\frac{\delta z_h}{\delta s_h}\cos\gamma_{h,k}\right)\frac{\delta s_h}{\delta s}\right.\\ \quad\left.-\left(\frac{\delta x_k}{\delta s_k}\cos\alpha_{h,k}+\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cos\beta_{h,k}+\frac{\delta z_k}{\delta s_k}\cos\gamma_{h,k}\right)\frac{\delta s_k}{\delta s}\right]\end{array}\right\}=0$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$J_{h,k}\cos\alpha_{h,k}=F_{h,k}\ ,\quad J_{h,k}\cos\beta_{h,k}=G_{h,k}\ ,\quad J_{h,k}\cos\gamma_{h,k}=H_{h,k}$$

setzt und alle Variationen in Bezug auf die Veränderliche s nimmt, unter die Form:

203ᵇ.)
$$\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{i=1}^{i=n}.\left(X_i\frac{\delta x_i}{\delta s}+Y_i\frac{\delta y_i}{\delta s}+Z_i\frac{\delta z_i}{\delta s}\right)\\ +\sum\limits_{h=1}^{h=n}.\sum\limits_{k=h+1}^{k=n}.\left[F_{h,k}\left(\frac{\delta x_h}{\delta s}-\frac{\delta x^k}{\delta s}\right)+G_{h,k}\left(\frac{\delta y_h}{\delta s}-\frac{\delta y_k}{\delta s}\right)\right.\\ \qquad\left.+H_{h,k}\left(\frac{\delta z_h}{\delta s}-\frac{\delta z_k}{\delta s}\right)\right]\end{array}\right\}=0.$$

Man wird daraus den Schluß ziehen, daß die innere Kraft $J_{h,k}$, welche zwischen den Punkten M_h und M_k des Systems thätig ist, aus der Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht desselben hinausfällt,

1) wenn man hat

$$\frac{\delta x_h}{\delta s_h}\cos\alpha_{h,k}+\frac{\delta y_h}{\delta s_h}\cos\beta_{h,k}+\frac{\delta z_h}{\delta s_h}\cos\gamma_{h,k}=0$$

und

$$\frac{\delta x_k}{\delta s_k}\cos\alpha_{h,k}+\frac{\delta y_k}{\delta s_k}\cos\beta_{h,k}+\frac{\delta z_k}{\delta s_k}\cos\gamma_{h,k}=0\ ,$$

wenn also das System so beschaffen ist, daß die virtuellen Geschwindigkeiten $\varDelta s_h$ und $\varDelta s_k$ der Punkte M_h und M_k immer normal zu der Verbindungslinie $M_h M_k$ sein müssen (Buch I, §. 33.),

2) wenn man hat

$$\left(\frac{\delta x_h}{\delta s_h} \cos\alpha_{h,k} + \frac{\delta y_h}{\delta s_h} \cos\beta_{h,k} + \frac{\delta z_h}{\delta s_h} \cos\gamma_{h,k}\right) \frac{\delta s_h}{\delta s}$$

$$- \left(\frac{\delta x_k}{\delta s_k} \cos\alpha_{h,k} + \frac{\delta y_k}{\delta s_k} \cos\beta_{h,k} + \frac{\delta z_k}{\delta s_k} \cos\gamma_{h,k}\right) \frac{\delta s_k}{\delta s} = 0 \; ,$$

d. h. wenn die beiden Punkte M_h und M_k immer in derselben Entfernung von einander bleiben müssen oder die Endpunkte einer unveränderlichen Geraden sind [Buch II, §. 140, (a)],

3) wenn man hat

$$\frac{\delta x_h}{\delta s} = \frac{\delta x_k}{\delta s} \; , \quad \frac{\delta y_h}{\delta s} = \frac{\delta y_k}{\delta s} \; , \quad \frac{\delta z_h}{\delta s} = \frac{\delta z_k}{\delta s}$$

oder

$$x_h = x_k + a \; , \quad y_h = y_k + b \; , \quad z_h = z_k + c \; ,$$

worin a, b und c unveränderliche Größen bedeuten, welche auch Null sein können, also wenn die Punkte M_h und M_k bei ihrer virtuellen Bewegung immer in derselben Lage gegen einander bleiben und zwar so, daß M_h in Bezug auf drei durch M_k gelegte Coordinatenachsen unverrückbar ist, oder $a = b = c = 0$ gesetzt, wenn beide Punkte fortwährend in einen zusammenfallen.

Wenn demnach die innere Beschaffenheit des Systems von der Art ist, daß für jede innere Kraft einer der vorhergehenden Fälle stattfindet, so kommt die Bedingungsgleichung (203) auf die einfache Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\delta x_i}{\delta s} + Y_i \frac{\delta y_i}{\delta s} + Z_i \frac{\delta z_i}{\delta s}\right) = 0 \qquad (204.$$

zurück, unter welcher man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bisher dargestellt hat, und man wird sich leicht überzeugen, daß die Systeme, welche man dabei im Auge hatte, nämlich die einfachen und zusammengesetzten Maschinen den vorhergehenden Bedingungen meistens Genüge leisten, wenn von der Reibung abgesehen wird, und wenn darin keine elastische Federn, welche nach einer oder zwei Richtungen hin auf bewegliche Theile drücken, vorkommen, oder wenn überhaupt von der Elasticität oder Biegsamkeit der einzelnen Maschinentheile Umgang genommen wird, weil dann die innern Kräfte nur in Spannungen bestehen, welche entweder normal zu den Flächen oder Curven sind, auf

denen sich die Angriffspunkte derselben bewegen können, oder welche auf die Endpunkte unveränderlicher Geraden ausgeübt werden, oder deren Angriffspunkte in den constanten Schnittpunkt zweier solcher Geraden fallen. Für die Reibung aber wird keine der obigen Bedingungen erfüllt, da die virtuelle Verrückung immer mit der Richtung der Reibung selbst zusammenfällt, und die Angriffspunkte über einander weggleiten, so daß man hat

$$x_h = x_k + u \quad , \quad y_h = y_k + v \quad , \quad z_h = z_k + w \quad ,$$

worin u, v und w veränderliche Größen sind, ebensowenig für eine Federkraft, welche ihre beiden Angriffspunkte zu nähern oder zu entfernen strebt oder dieselben bis zu einem gewissen Abstande von einander sich entfernen läßt, u. s. f. Die auf die äußern Kräfte beschränkte Bedingungsgleichung (204) ist demnach weit entfernt, für alle veränderliche Systeme zu gelten, namentlich wenn diese in dem ausgedehnten Sinne genommen werden, wie wir es gethan haben, wonach selbst irgend zwei oder mehrere materielle Punkte oder Körper, welche weiter nichts mit einander zu thun haben und ganz unabhängige Bewegungen besitzen, zusammen als ein veränderliches System betrachtet werden können, für welches alle in den beiden vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten Gesetze gültig sind. Man hilft sich in der Anwendung freilich dadurch, daß man auch die innern Kräfte, wie die gegenseitige Anziehung oder Abstoßung und die Reibung für die X, Y und Z einführt, obgleich man bei der Begründung des Princips gar nicht daran gedacht hat *).

§. 112.

Wenn für mehrere oder alle innern Kräfte die vorhergenannten Bedingungen oder Eigenschaften statt haben, und diese Kräfte, welche

---

*) Man vergleiche *Poisson*, Traité de mécanique I, §. 346 mit §. 333 bis 335, wo die Kräfte zwischen zwei Punkten des Systems ganz besonders mit [m, m′], [m′, m″], u. s. f. bezeichnet sind. Poisson macht übrigens am Ende des §. 335 doch eine Ausnahme, indem er sagt: „Concluons donc, que cette équation [unsere Gleichung (204)] a aussi lieu pour tous les mouvemens infiniment petits que peut prendre un système de points ou d'anneaux liés par des fils flexibles, *pourvu que ces fils restent droits ou tendus*. Quand cette condition n'est pas remplie, les tensions ne disparaissent pas toutes dans l'équation (a) [welche unserer Gleichung (203) entspricht], et conséquemment, l'équation (b) [oder (204)] n'a plus lieu.

dann meistens in unbekannten Spannungen bestehen, in die allgemeine Gleichung (203) nicht eingehen, so werden sie durch Bedingungsgleichungen ersetzt, welche für die Art und Weise der Verbindung des Systems gegeben sein müssen, und aus welchen mittels der Gleichung (203) oder (204) einerseits die unbekannten äußern und innern Kräfte, und anderseits die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der einzelnen Punkte oder Theile des Systems abgeleitet werden können. Stellt man nämlich jene Bedingungsgleichung für die Verbindung der Punkte oder Theile des Systems durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} f_1\,(x_1,\, y_1,\, z_1,\;\; x_2,\, y_2,\, z_2,\, \ldots\ldots\, x_i,\, y_i,\, z_i,\, \ldots\ldots) = 0\,, \\ f_2\,(x_1,\, y_1,\, z_1,\;\; x_2,\, y_2,\, z_2,\, \ldots\ldots\, x_i,\, y_i,\, z_i,\, \ldots\ldots) = 0\,, \\ \quad \text{u. s. f.} \\ f_i\,(x_1,\, y_1,\, z_1,\;\; x_2,\, y_2,\, z_2,\, \ldots\ldots\, x_i,\, y_i,\, z_i,\, \ldots\ldots) = 0\,, \\ \quad \text{u. s. f.} \end{array}\right\}\text{(c.}$$

vor, worin indessen immer nur ein Theil der 3 n Coordinaten aller n Punkte des Systems mit Abwechselung enthalten sein können, so müssen alle virtuellen Verrückungen des Systems diesen Gleichungen genügen, es müssen also für alle diesen virtuellen Bewegungen entsprechenden Uebergangsgesetze die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{df_1}{dx_1}\frac{\delta x_1}{\delta s} + \frac{df_1}{dy_1}\frac{\delta y_1}{\delta s} + \frac{df_1}{dz_1}\frac{\delta z_1}{\delta s} + \ldots\ldots \frac{df_1}{dx_i}\frac{\delta x_i}{\delta s} + \text{etc.} = 0\,, \\ \frac{df_2}{dx_1}\frac{\delta x_1}{\delta s} + \frac{df_2}{dy_1}\frac{\delta y_1}{\delta s} + \frac{df_2}{dz_1}\frac{\delta z_1}{\delta s} + \ldots\ldots \frac{df_2}{dx_i}\frac{\delta x_i}{\delta s} + \text{etc.} = 0\,, \\ \text{u. s. f.} \\ \frac{df_i}{dx_1}\frac{\delta x_1}{\delta s} + \frac{df_i}{dy_1}\frac{\delta y_1}{\delta s} + \frac{df_i}{dz_1}\frac{\delta z_1}{\delta s} + \ldots\ldots \frac{df_i}{dx_i}\frac{\delta x_i}{\delta s} + \text{etc.} = 0\,, \\ \text{u. s. f.,} \end{array}\right\}\text{(d.}$$

denen zunächst die strengere Form:

$$\left(\frac{df_i}{dx_1}\frac{\delta x_1}{\delta s_1} + \frac{df_i}{dy_1}\frac{\delta y_1}{\delta s_1} + \frac{df_i}{dz_1}\frac{\delta z_1}{\delta s_1}\right)\frac{\delta s_1}{\delta s} + \text{etc.}$$

$$+ \left(\frac{df_i}{dx_i}\frac{\delta x_i}{\delta s_i} + \frac{df_i}{dy_i}\frac{\delta y_i}{\delta s_i} + \frac{df_i}{dz_i}\frac{\delta z_i}{\delta s_i}\right)\frac{\delta s_i}{\delta s} + \text{etc.} = 0$$

zukommt, gleichzeitig mit der Gleichung (203) oder (204) befriedigt werden. Man kann daher aus den letztern mittels der erstern so viele Uebergangsgesetze $\frac{\delta x_i}{\delta s}$, $\frac{\delta y_i}{\delta s}$, u. s. f. eliminiren, als Gleichungen (c) gegeben sind; die noch übrig bleibenden sind dann ganz unabhängig und willkürlich, und die Gleichung (203) kann allgemein nur befriedigt werden, wenn die Factoren dieser unabhängigen Uebergangsgesetze einzeln Null sind (Buch II, §. 145). Auf diese Weise ergeben sich $3n-m$ Bedingungsgleichungen für die n Punkte des Systems, wenn die Zahl der eliminirten Uebergangsgesetze oder die der Bedingungen (c) gleich m ist. Mit diesen Bedingungen hat man also die erforderliche Anzahl von Gleichungen, um die $3n$ Coordinaten aller Punkte des Systems für den völligen Gleichgewichtszustand bestimmen zu können, oder die Beziehungen zwischen den äußern und innern Kräften, vermöge welcher das System in einer gegebenen Gestalt im Gleichgewicht bleiben kann.

Man wird sich indessen leicht überzeugen, daß man auf diese Weise durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nur auf einem längeren Wege zu denselben Bedingungsgleichungen kommt, welche aus den Gleichungen (45) in §. 30 hervorgehen, wenn bei diesen auch äußeres Gleichgewicht vorausgesetzt, also $\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0$ genommen wird. Man kommt sogar auf diese Gleichungen (45) selbst, wenn man die eben angegebene Elimination in der Art ausführt, daß man die Gleichungen (d) der Reihe nach mit unbestimmten Factoren k_1, k_2, k_i, u. s. f. multiplizirt, alle Producte zu der Gleichung (203) addirt und dann die Factoren der Uebergangsgesetze $\frac{\delta x_i}{\delta s}$, $\frac{\delta y_i}{\delta s}$, u. s. f. einzeln Null setzt. Denn es ergeben sich auf diese Weise für den Punkt M_i die Bedingungsgleichungen:

$$\text{e.)}\quad \begin{cases} X_i + \Sigma . F_i + k_1 \dfrac{d f_1}{d x_i} + k_2 \dfrac{d f_2}{d x_i} + \text{etc.} + k_i \dfrac{d f_i}{d x_i} + \text{etc.} = 0\,, \\[2ex] Y_i + \Sigma . G_i + k_1 \dfrac{d f_1}{d y_i} + k_2 \dfrac{d f_2}{d y_i} + \text{etc.} + k_i \dfrac{d f_i}{d y_i} + \text{etc.} = 0\,, \\[2ex] Z_i + \Sigma . H_i + k_1 \dfrac{d f_1}{d z_i} + k_2 \dfrac{d f_2}{d z_i} + \text{etc.} + k_i \dfrac{d f_i}{d z_i} + \text{etc.} = 0\,, \end{cases}$$

in denen ΣF_i, ΣG_i, ΣH_i die Componenten derjenigen innern Kräfte bezeichnen, welche in der Gleichung (203) noch vorhanden sind, und

es handelt sich nur noch darum, zu zeigen, daß die Glieder $k_i \frac{d f_i}{d x_i}$, $k_i \frac{d f_i}{d y_i}$, $k_i \frac{d f_i}{d z_i}$ nichts anderes sind, als die Componenten unserer Kräfte $J_{i,k}$ oder $J_{h,i}$, welche den Bedingungen am Ende des vorhergehenden §. zufolge aus der Gleichung (203) hinausfallen mußten.

Dazu kann man sich alle Punkte des Systems außer M_i in ihren Gleichgewichtslagen befestigt denken, und diesen allein als beweglich. Vermöge der Gleichung: $f_1 (x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots.) = 0$ wird derselbe aber in seiner Bewegung auf eine gewisse Fläche beschränkt sein, welche durch diese Gleichung vorgestellt wird, wenn man darin nur x_i, y_i, z_i als veränderlich annimmt; man kann also jene Gleichung auch durch den unbekannten Widerstand N_1 dieser Fläche ersetzt denken, dessen Richtungswinkel λ_1, μ_1, ν_1 zu den drei Coordinatenachsen durch die Gleichungen (Einl. §. 34):

$$\cos \lambda_1 = V_1 \frac{d f_1}{d x_i}, \quad \cos \mu_1 = V_1 \frac{d f_1}{d y_i},$$

$$\cos \nu_1 = \frac{\frac{d f_1}{d z_i}}{\pm \sqrt{\left(\frac{d f_1}{d x_i}\right)^2 + \left(\frac{d f_1}{d y_i}\right)^2 + \left(\frac{d f_1}{d z_i}\right)^2}} = V_1 \frac{d f_1}{d z_i}$$

gegeben sind, für dessen Componenten nach diesen Achsen man also die Werthe:

$$N_1 V_1 \frac{d f_1}{d x_i}, \quad N_1 V_1 \frac{d f_1}{d y_i}, \quad N_1 V_1 \frac{d f_1}{d z_i}$$

erhält. Ebenso kann man die Bedingungsgleichungen: $f_2 = 0$, $f_i = 0$, u. s. f. durch die Widerstände N_2, N_i, u. s. f. von festen Flächen ersetzen, welche durch die Gleichungen $f_2 = 0$, $f_i = 0$, u. s. f. vorgestellt werden, wenn man darin immer nur x_i, y_i, z_i als Veränderliche betrachtet, und diese Widerstände geben die Componenten:

$$N_2 V_2 \frac{d f_2}{d x_i}, \quad N_2 V_2 \frac{d f_2}{d y_i}, \quad N_2 V_2 \frac{d f_2}{d z_i},$$

$$N_i V_i \frac{d f_i}{d x_i}, \quad N_i V_i \frac{d f_i}{d y_i}, \quad N_i V_i \frac{d f_i}{d z_i},$$

u. s. f., wenn zur Abkürzung

$$V_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df_2}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{df_2}{dz_i}\right)^2}},$$

$$V_i = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{df_i}{dx_i}\right)^2 + \left(\frac{df_i}{dy_i}\right)^2 + \left(\frac{df_i}{dz_i}\right)^2}},$$

u. s. f. gesetzt wird.

Drückt man dann die Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes M_i mittels der Kräfte X_i, F_i, u. s. f. und dieser Widerstände aus, so werden diese

$$\text{f.)} \begin{cases} X_i + \Sigma F_i + N_1 V_1 \frac{df_1}{dx_i} + N_2 V_2 \frac{df_2}{dx_i} + \text{etc.} + N_i V_i \frac{df_i}{dx_i} + \text{etc.} = 0 \\ Y_i + \Sigma G_i + N_1 V_1 \frac{df_1}{dy_i} + N_2 V_2 \frac{df_2}{dy_i} + \text{etc.} + N_i V_i \frac{df_i}{dy_i} + \text{etc.} = 0 \\ Z_i + \Sigma H_i + N_1 V_1 \frac{df_1}{dz_i} + N_2 V_2 \frac{df_2}{dz_i} + \text{etc.} + N_i V_i \frac{df_i}{dz_i} + \text{etc.} = 0 \end{cases}$$

und zeigen durch ihre Vergleichung mit den Gleichungen (e), daß man haben muß

$$\text{g.)} \begin{cases} N_1 = \frac{k_1}{V_1}, \quad N_2 = \frac{k_2}{V_2}, \quad N_i = \frac{k_i}{V_i}, \text{ u. s. f.} \\ \text{oder} \\ k_1 \frac{df_1}{dx_i} = N_1 \cos\lambda_1, \quad k_2 \frac{df_2}{dx_i} = N_2 \cos\lambda_2, \quad k_i \frac{df_i}{dx_i} = N_i \cos\lambda_i, \\ k_1 \frac{df_1}{dy_i} = N_1 \cos\mu_1, \quad k_2 \frac{df_2}{dy_i} = N_2 \cos\mu_2, \quad k_i \frac{df_i}{dy_i} = N_i \cos\mu_i, \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

Man sieht aus diesen Werthen, wie die unbekannten innern Kräfte N_i aus den Coeffizienten k_i mittels der Gleichungen (c) gefunden werden können, und wird sich durch dieselben überzeugen, nicht nur daß die Gleichungen (e) wie (f) ganz identisch sind mit unsern Gleichungen (45), wenn darin äußeres Gleichgewicht vorausgesetzt wird, sondern auch daß die Componenten $N_i \cos\lambda_i$ oder $J_{h,i} \cos\alpha_{h,i}$, u. s. f. und mit diesen die Kräfte N_i oder $J_{h,i}$ aus diesen letzten Gleichungen

einfacher gefunden werden, als wenn man zuerst aus den vorhergehenden Gleichungen (e) die Coeffizienten k_i bestimmt und darnach mittels der Beziehungen (g) die N_i ableitet.

Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten hat demnach für die Anwendung im Allgemeinen vor unsern früheren Gleichungen und Methoden nicht den geringsten Vorzug voraus und steht hinter diesen, was Evidenz und Anschaulichkeit betrifft, weit zurück. Nur in einigen besondern Fällen, für welche die Gleichung (204) genügt, namentlich bei einfachen Maschinen, wenn die Reibung vernachlässigt wird und dabei nur wenige äußere Kräfte in Beziehung zu bringen sind, führt das genannte Princip schneller zu der Bedingungsgleichung zwischen den äußern Kräften und gewährt eine klare Einsicht in diese Beziehungen, weil dann die virtuellen Wege der Kräfte für deren Beziehungen allein entscheidend und leicht zu finden sind oder vielmehr vor Augen liegen. So wird man bei dem Knie und der Roberval'schen Wage die Beziehungen (f) in §. 51 und (g) in §. 52 mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten schneller ableiten, als wir es in den genannten §§. gethan haben, und man wird sich, namentlich für die einfacheren Annahmen, daß das Knie ein gleichschenkliches sei, und daß an der Wage nur parallele Kräfte angreifen sollen, mittels des genannten Princips über diese Beziehungen viel leichter Rechenschaft geben, als durch die Betrachtung des Gleichgewichts der einzelnen Theile. Wenn es sich aber auch um die Kenntniß der innern Kräfte handelt, und insbesondere wenn auch die Reibung berücksichtigt werden soll, wozu die Kenntniß der innern Kräfte unumgänglich nothwendig ist, so bietet das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten keinen besondern Vortheil mehr. Eine speziell eingehende Vergleichung dieser Methoden würde hier übrigens zu weit führen, und ich muß mich darauf beschränken, dem Leser anzuempfehlen, die in den §§. 47 bis 52 behandelten Aufgaben mittels des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten aufzulösen und noch die folgende sehr einfache Aufgabe nach beiden Methoden zu behandeln:

Es sind die Bedingungen für das Gleichgewicht zweier Kräfte P und Q abzuleiten, von denen die eine an dem freien Ende eines am andern Ende befestigten vollkommen biegsamen Fadens angreift und gegen einen festen Punkt gerichtet ist, während der Angriffspunkt der zweiten Kraft in dem Mittelpunkte eines schweren Kreises (der Achse einer Rolle) liegt, welcher mit dem Umfange und so, daß seine Ebene mit der des Fadens zusammenfällt, auf diesem Faden ruht und auf demselben nicht gleiten kann.

§. 113.

Für ein stetiges System von materiellen Punkten muß man von den Gleichungen (75) in §. 38 ausgehen, um in ähnlicher Weise wie vorher die das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten darstellende Bedingungsgleichung des innern und äußern Gleichgewichtes abzuleiten. Man multiplizirt dazu diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ und integrirt die Summe:

$$0 = q\left(X\frac{\delta x}{\delta s} + Y\frac{\delta y}{\delta s} + Z\frac{\delta z}{\delta s}\right) + \frac{\delta T_x^{(x)}}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta T_y^{(x)}}{\delta x}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{\delta T_z^{(x)}}{\delta x}\frac{\delta z}{\delta s}$$
$$+ \frac{\delta T_x^{(y)}}{\delta y}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta T_y^{(y)}}{\delta y}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{\delta T_z^{(y)}}{\delta y}\frac{\delta z}{\delta s}$$
$$+ \frac{\delta T_x^{(z)}}{\delta z}\frac{\delta x}{\delta s} + \frac{\delta T_y^{(z)}}{\delta z}\frac{\delta y}{\delta s} + \frac{\delta T_z^{(z)}}{\delta z}\frac{\delta z}{\delta s}$$

derselben nacheinander in Bezug auf die drei Veränderlichen x, y, z zwischen den Grenzen des ganzen Systems, oder zwischen drei rechtwinkligen Schnitten in einem beliebigen Punkte und drei solchen Schnitten in dem Punkte dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 sind. Beachtet man dann, daß man hat

$$\frac{\delta T_x^{(x)}}{\delta x}\frac{\delta x}{\delta s} = \frac{\delta . T_x^{(x)}\frac{\delta x}{\delta s}}{\delta x}, \quad \frac{\delta T_y^{(x)}}{\delta x}\frac{\delta y}{\delta s} = \frac{\delta . T_y^{(x)}\frac{\delta y}{\delta s}}{\delta x}, \text{ etc.},$$

weil die Aenderungsgesetze: $\frac{\delta \frac{\delta x}{\delta s}}{\delta x} = \frac{\delta \frac{\delta x}{\delta x}}{\delta s}$, $\frac{\delta \frac{\delta y}{\delta s}}{\delta x} = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x}}{\delta s}$, u. s. f. wegen der Unabhängigkeit der Veränderlichen x, y, z Null werden, so nimmt die vorhergehende Gleichung auch die Form an:

$$0 = q\left(X\frac{\delta x}{\delta s} + Y\frac{\delta y}{\delta s} + Z\frac{\delta z}{\delta s}\right) + \frac{\delta . \left(T_x^{(x)}\frac{\delta x}{\delta s} + T_y^{(x)}\frac{\delta y}{\delta s} + T_z^{(x)}\frac{\delta z}{\delta s}\right)}{\delta x}$$
$$+ \frac{\delta . \left(T_x^{(y)}\frac{\delta x}{\delta s} + T_y^{(y)}\frac{\delta y}{\delta s} + T_z^{(y)}\frac{\delta z}{\delta s}\right)}{\delta y} + \frac{\delta . \left(T_x^{(z)}\frac{\delta x}{\delta s} + T_y^{(z)}\frac{\delta y}{\delta s} + T_z^{(z)}\frac{\delta z}{\delta s}\right)}{\delta z},$$

und das dreifache Integral derselben in Bezug auf x, y und z gibt übereinstimmend mit den Gleichungen (143) und (147) und mit einer ähnlichen Bezeichnung wie dort, folgenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\left(T_x^{(x)}\frac{\partial x}{\partial s}+T_y^{(x)}\frac{\partial y}{\partial s}+T_z^{(x)}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\\
&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\left(T_x^{(y)}\frac{\partial x}{\partial s}+T_y^{(y)}\frac{\partial y}{\partial s}+T_z^{(y)}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\\
&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\left(T_x^{(z)}\frac{\partial x}{\partial s}+T_y^{(z)}\frac{\partial y}{\partial s}+T_z^{(z)}\frac{\partial z}{\partial s}\right)\\
&=\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\left(T_{0x}^{(x)}\frac{\partial x_0}{\partial s}+T_{0y}^{(x)}\frac{\partial y_0}{\partial s}+T_{0z}^{(x)}\frac{\partial z_0}{\partial s}\right)\\
&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\left(T_{0x}^{(y)}\frac{\partial x_0}{\partial s}+T_{0y}^{(y)}\frac{\partial y_0}{\partial s}+T_{0z}^{(y)}\frac{\partial z_0}{\partial s}\right)\\
&+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\left(T_{0x}^{(z)}\frac{\partial x_0}{\partial s}+T_{0y}^{(z)}\frac{\partial y_0}{\partial s}+T_{0z}^{(z)}\frac{\partial z_0}{\partial s}\right)\\
&-\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.q\left(X\frac{\partial x}{\partial s}+Y\frac{\partial y}{\partial s}+Z\frac{\partial z}{\partial s}\right),
\end{aligned}\right\}\ (205.$$

welcher die für das Gleichgewicht nothwendig stattfindende Beziehung zwischen der von den äußern Kräften auf das ganze System ausgeübten Wirkung und den an der äußern Begrenzung desselben stattfindenden Spannungen darstellt, welcher aber für die Anwendung, selbst in den einfachsten Fällen, nicht leichter zum Ziele führt, als die vorgenannten Gleichungen.

Dieser Ausdruck erleidet ferner für ein System, welches als eine materielle Fläche oder Linie betrachtet werden kann, ähnliche Umwandlungen, wie die Gleichungen (75). Für das letztere z. B., d. h. wenn sich das System auf eine materielle Linie zurückführen läßt, nimmt

derselbe mit den am Anfang des §. 63 gemachten Bemerkungen zunächst die Form an:

$$206.)\quad \left\{\begin{array}{l} T_x \frac{\delta x}{\delta s} + T_y \frac{\delta y}{\delta s} + T_z \frac{\delta z}{\delta s} = \underset{0}{T_x} \frac{\delta x_0}{\delta s} + \underset{0}{T_y} \frac{\delta y_0}{\delta s} + \underset{0}{T_z} \frac{\delta z_0}{\delta s} \\ \qquad - \int_{s_0}^{s} ds \,.\, q \left(X \frac{\delta x}{\delta s} + Y \frac{\delta y}{\delta s} + Z \frac{\delta z}{\delta s} \right). \end{array}\right.$$

Wenn man dann für T_x, T_y, T_z die dortigen Werthe $T \frac{dx}{ds}$, $T \frac{dy}{ds}$, $T \frac{dz}{ds}$, ebenso für $\underset{0}{T_x}$, $\underset{0}{T_y}$, $\underset{0}{T_z}$ die Werthe $T_0 \frac{dx_0}{ds}$, $T_0 \frac{dy_0}{ds}$ und $T_0 \frac{dz_0}{ds}$ einführt und die virtuellen Verrückungen längs der Linie selbst stattfinden läßt, so daß $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ in $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ übergehen, so geht aus dieser Gleichung die Beziehung (106) in §. 63 hervor. Man erhält dagegen die dortigen Beziehungen (104), wenn man sich das ganze System parallel mit sich verrückt denkt, so daß $\frac{\delta x_0}{\delta s} = \frac{\delta x}{\delta s}$, u. s. f. also $\frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y}{\delta s}$, $\frac{\delta z}{\delta s}$ in Bezug auf die Ausdehnung des Systems oder das Integral $\int_{s_0}^{s} ds$. constant werden, und nun die Summe der Factoren von jeder dieser willkürlichen und unabhängigen Größen getrennt Null setzt.

Wenn das System ein festes werden soll, so muß immer $\frac{\delta x_0}{\delta s} = \frac{\delta x}{\delta s}$, $\frac{\delta y_0}{\delta s} = \frac{\delta y}{\delta s}$, u. s. f., und $T^{(x)}_{0x} = T^{(x)}_{x}$, $T^{(y)}_{0y} = T^{(y)}_{y}$, u. s. f. sein, und die Gleichung (205) kommt auf die Bedingung (108) in §. 146 des zweiten Buches zurück.

§. 114.

Auf dieselbe Weise, wie wir die analytischen Ausdrücke für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten aus den Gleichungen (45) und (75) abgeleitet haben, ergeben sich auch die Beziehungen für die Aende-

rung der lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems mittels der Gleichungen (46), wenn die Glieder $\frac{m_i}{\Sigma m}\Sigma X$, $\frac{m_i}{\Sigma m}\Sigma Y$, $\frac{m_i}{\Sigma m}\Sigma Z$ darin weggelassen werden, für ein nicht stetiges System und mittels der Gleichungen (78) für ein stetiges System.

Multiplizirt man nämlich die Gleichungen (46) der Reihe nach mit $\frac{d x_i}{d s_i}$, $\frac{d y_i}{d s_i}$, $\frac{d z_i}{d s_i}$, nimmt ihre Summe und beachtet, daß man hat

$$m_i\left(\frac{d x_i}{d s_i}\frac{d^2 x_i}{d t^2_i}+\frac{d y_i}{d s_i}\frac{d^2 y_i}{d t^2}+\frac{d z_i}{d s_i}\frac{d^2 z_i}{d t^2}\right)$$

$$= m_i\left(\frac{d x_i}{d t}\frac{d.\frac{d x_i}{d t}}{d s_i}+\frac{d y_i}{d t}\frac{d.\frac{d y_i}{d t}}{d s_i}+\frac{d z_i}{d t}\frac{d.\frac{d z_i}{d t}}{d s_i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}m_i\frac{d.\left[\left(\frac{d x_i}{d t}\right)^2+\left(\frac{d y_i}{d t}\right)^2+\left(\frac{d z_i}{d t}\right)^2\right]}{d s_i} = \frac{1}{2}m_i\frac{d.v_i^2}{d s_i},$$

so erhält man als Integral nach s_i den Ausdruck:

$$m_i(v_i^2 - \underset{0}{v_i}^2) = \left\{\begin{array}{l} 2\int_{\underset{0}{s_i}}^{s_i} d s_i\left(X_i\frac{d x_i}{d s_i}+Y_i\frac{d y_i}{d s_i}+Z_i\frac{d z_i}{d s_i}\right) \\ -2\sum_{h=1}^{h=i-1}.\int_{\underset{0}{s_i}}^{s_i} d s_i . J_{h,i}\left(\frac{d x_i}{d s_i}\cos\alpha_{h,i}+\frac{d y_i}{d s_i}\cos\beta_{h,i}+\frac{d z_i}{d s_i}\cos\gamma_{h,i}\right) \\ +2\sum_{k=i+1}^{k=n}.\int_{\underset{0}{s_i}}^{s_i} d s_i . J_{i,k}\left(\frac{d x_i}{d s_i}\cos\alpha_{i,k}+\frac{d y_i}{d s_i}\cos\beta_{i,k}+\frac{d z_i}{d s_i}\cos\gamma_{i,k}\right)\end{array}\right\}$$

für die Aenderung der lebendigen Kraft des Punktes M_i im System durch die Arbeit aller an diesem Punkte angreifenden äußern und innern Kräfte. Um also die Aenderung der lebendigen Kraft aller Punkte des Systems zu erhalten, darf man nur die allen diesen Punkten zukommenden entsprechenden Werthe summiren; man findet so das allgemeinste und vollständige Gesetz:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . m_i(v_i^2 - v_{i\,0}^2) = \left\{ \begin{array}{l} 2\sum\limits_{i=1}^{i=n} . \int_{s_{i_0}}^{s_i} d s_i \left(X_i \frac{d x_i}{d s_i} + Y_i \frac{d y_i}{d s_i} + Z_i \frac{d z_i}{d s_i} \right) \\ -2\sum\limits_{i=1}^{i=n} . \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \int_{s_{i_0}}^{s_i} d s_i . J_{h,i} \left(\frac{d x_i}{d s_i} \cos\alpha_{h,i} + \frac{d y_i}{d s_i} \cos\beta_{h,i} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d z_i}{d s_i} \cos\gamma_{h,i} \right) \\ +2\sum\limits_{i=1}^{i=n} . \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \int_{s_{i_0}}^{s_i} d s_i . J_{i,k} \left(\frac{d x_i}{d s_i} \cos\alpha_{i,k} + \frac{d y_i}{d s_i} \cos\beta_{i,k} \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{d z_i}{d s_i} \cos\gamma_{i,k} \right) \end{array} \right\} .$$

Beachtet man dann ferner, daß man unter den Integralzeichen die s_i gegen jede andere Veränderliche s vertauschen kann, und daß in der ganzen Summe alle J zweimal vorkommen, so wird man diesem Ausdruck wie dem des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten (203) die Form geben:

$$207^a.) \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{i=n} . m_i(v_i^2 - v_{i\,0}^2) = \\ = 2\sum\limits_{i=1}^{i=n} \int_{s_0}^{s} d s \left(X_i \frac{d x_i}{d s_i} + Y_i \frac{d y_i}{d s_i} + Z_i \frac{d z_i}{d s_i} \right) \frac{d s_i}{d s} \\ +2\sum\limits_{h=1}^{h=n} . \sum\limits_{k=h+1}^{k=n} . \int_{s_0}^{s} d s . J_{k,h} \left[\frac{d s_h}{d s} \left(\frac{d x_h}{d s_h} \cos\alpha_{h,k} + \frac{d y_h}{d s_h} \cos\beta_{h,k} + \frac{d z_h}{d s_h} \cos\gamma_{h,k} \right) \right. \\ \qquad \left. - \frac{d s_k}{d s} \left(\frac{d x_k}{d s_k} \cos\alpha_{i,k} + \frac{d y_k}{d s_k} \cos\beta_{i,k} + \frac{d z_k}{d s_k} \cos\gamma_{i,k} \right) \right] \end{array} \right.$$

oder

$$207^b.) \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{i=n} . m_i(v_i^2 - v_{i\,0}^2) = 2\sum\limits_{i=1}^{i=n} . \int_{s_0}^{s} d s \left(X_i \frac{d x_i}{d s_i} + Y_i \frac{d y_i}{d s_i} + Z_i \frac{d z_i}{d s_i} \right) \frac{d s_i}{d s} \\ +2\sum\limits_{h=1}^{h=n} . \sum\limits_{k=h+1}^{k=n} \int_{s_0}^{s} d s . J_{h,k} \left[\left(\frac{d x_h}{d s} - \frac{d x_k}{d s} \right) \cos\alpha_{h,k} + \left(\frac{d y_h}{d s} - \frac{d y_k}{d s} \right) \cos\beta_{h,k} \right. \\ \qquad \left. + \left(\frac{d z_h}{d s} - \frac{d z_k}{d s} \right) \cos\gamma_{h,k} \right] . \end{array} \right.$$

Dieses Gesetz gilt für alle denkbaren Verbindungen materieller Punkte und unterliegt in dieser Form keiner Beschränkung; es wird aber wie das Princip (203) in besonderen Fällen eine einfachere Form annehmen, indem ein großer Theil und selbst alle inneren Kräfte J daraus verschwinden können, nämlich diejenigen J, welche entweder immer normal zu der Bewegung ihrer Angriffspunkte bleiben, oder deren Angriffspunkte immer dieselbe gegenseitige Entfernung behalten. Haben alle innern Kräfte eine dieser Eigenschaften, wie es z. B. bei den unveränderlichen Systemen in Betreff der zweiten der Fall ist, so kommt das vorhergehende Gesetz für die Änderung der lebendigen Kraft mit Weglassung des Index i auf den einfachen Ausdruck:

$$\Sigma . m (v^2 - v_0^2) = 2 \Sigma \int_{s_0}^{s_1} ds \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right) \qquad (208.$$

zurück, welcher nur von den äußern Kräften abhängt und der für feste Systeme in dieser Form schon im letzten Kapitel des zweiten Buches auf einem andern Wege gefunden worden ist.

Wir ersehen aus unserer Ableitung der vorhergehenden Gleichungen, daß es für die Anwendbarkeit und Gültigkeit derselben ganz gleichgültig ist, ob die Bedingungen für die Verbindung des Systems, denen dasselbe während seiner Bewegung unterworfen bleibt, die Zeit t explicite enthalten oder nicht, daß aber alle innern Kräfte, deren beide Angriffspunkte den vorhergenannten und in §. 111 entwickelten Bedingungen nicht Genüge leisten, in den rechtsseitigen Ausdruck für die Arbeit der Kräfte mit aufgenommen werden müssen, und wir werden daraus schließen, daß diese Bedingungen im jetzigen Falle die ausgeschlossenen innern Kräfte als solche kennzeichnen, welche keine Arbeit leisten.

Ein einfaches Beispiel bietet uns der in §. 98 behandelte Fall dar, wenn wir voraussetzen, daß das Gewicht Q groß genug ist, um dem untern Parallelepiped eine größere Beschleunigung als dem obern zu ertheilen. Wir haben dann die drei Massen $\frac{P_1}{g}$, $\frac{P_2}{g}$, $\frac{Q}{g}$ mit den Geschwindigkeiten v_1, v_2, v_3, deren anfängliche Werthe Null sind, und mit den vertikal abwärts gerichteten Kräften P_1, P_2, Q, für welche man hat $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = P_1$; $X_2 = Y_2 = 0$, $Z_2 = P_2$; $X_3 = Y_3 = 0$, $Z_3 = Q$, dann mit der an P_1 angreifenden Reibung $f_1 N_1$, welche zur x-Achse parallel ist. Die Bedingungen, denen das System äußerlich unterworfen ist, sind

$$z_1 = k_1 \; , \quad \frac{d z_1}{d s} = 0 \; , \quad x_3 = k_3 \; , \quad y_1 = y_2 = y_3 = 0 \; ;$$

als Bedingungen für den innern Zustand hat man einmal $\frac{d x_1}{d t} = \frac{d x_3}{d t}$ oder $v_3 = v_1$, ferner $z_2 = z_1 + k_2$, und dann die zwischen den beiden Parallelepipeden stattfindende Reibung $f_2 N_2$, aus welcher eine Beziehung zwischen x_1 und x_2 nicht unmittelbar erhalten werden kann. Wir können nur $x_1 = x_2 + u$ setzen und daraus für das Aenderungsgesetz der Arbeit dieser innern Kraft den Werth:

$$f_2 N_2 \left(\frac{d x_1}{d s} - \frac{d x_2}{d s}\right) = f_2 N_2 \frac{d u}{d s}$$

ableiten, da sowohl die Componente von $f_2 N_2$ nach der z-Achse, als $\frac{d z_1}{d s} - \frac{d z_2}{d s}$ Null ist.

Für diesen gegebenen Fall nimmt demnach unsere Gleichung (207) zunächst die Form an:

a.)

$$P_1 v_1^2 + P_2 v_2^2 + Q v_3^2 = 2g \left(\int_{s_0}^{s} ds . Q \frac{d z_3}{d s} - \int_{s_0}^{s} ds . f_1 N_1 \frac{d x_1}{d s} - \int_{s_0}^{s} ds . f_2 N_2 \frac{d u}{d s} \right)$$

oder, wenn man noch $v_2 = v_1 - \frac{d u}{d t}$, $v_3 = v_1$ einführt und die Veränderlichen unter den Integralzeichen vertauscht, die Form:

b.)

$$\left\{ \begin{aligned} & (P_1 + P_2 + Q)\, v_1^2 + P_2 \left(\frac{d u}{d t}\right)^2 - 2 P_2 v_1 \frac{d u}{d t} \\ & \qquad = 2g \left(\int_{z_{3_0}}^{z_3} d z_3 . Q - \int_{0}^{x_1} d x_1 . f_1 N_1 - \int_{0}^{u} d u . f_2 N_2 \right) . \end{aligned} \right.$$

Gibt man dann auch noch zu, was übrigens strenge nur aus den Gleichungen 1) bis 5) in §. 98 geschlossen werden kann, daß N_1 und N_2 constant und gleich $P_1 + P_2$ und P_2 sind, so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung die weitere:

$$\left.\begin{array}{l}(P_1 + P_2 + Q)\, v_1^2 + P_2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - 2 P_2 v_1 \frac{du}{dt} \\ \quad = 2g\, [Q(z_3 - \underset{0}{z_3}) - f_1 (P_1 + P_2)\, x_1 - f_2 P_2 u]\,,\end{array}\right\} \quad (c.$$

und diese Gleichung kann nun den Werth von v_1 geben, wenn u in Function von x_1 oder t gegeben ist, d. h. wenn die Gleichung 9) in §. 98, oder diese und die Gleichung 12) aufgelöst sind. Aus der ersten zieht man

$$\frac{du}{dt} = g t \,\frac{Q(1-f_2) - (f_1+f_2)(P_1+P_2)}{P_1 + Q}\,,$$

$$u = \frac{1}{2}\, g t^2 \,\frac{Q(1-f_2) - (f_1+f_2)(P_1+P_2)}{P_1 + Q}\,; \qquad (d.$$

aus der letzten

$$x_1 = \frac{1}{2}\, g t^2 \,\frac{Q - f_1 (P_1+P_2) - f_2 P_2}{P_1 + Q}\,, \qquad (e.$$

und die Elimination von t führt auf die Beziehung:

$$u = x_1 \,\frac{Q(1-f_2) - (f_1+f_2)(P_1+P_2)}{Q - f_1 (P_1+P_2) - f_2 P_2}\,, \qquad (f.$$

welche als die, die Veränderliche t nicht explicite enthaltende Bedingungsgleichung für die Verbindung der Körper P_1 und P_2 zu betrachten ist, während der vorhergehende Werth (d) von u dieselbe Bedingung in Function von t ausdrückt, ohne daß in der Gültigkeit der Gleichung (a) oder (c) etwas geändert würde.

Die Gleichung (f) gibt noch

$$\frac{du}{dt} = v_1 \,\frac{Q(1-f_2) - (f_1+f_2)(P_1+P_2)}{Q - f_1 (P_1+P_2) - f_2 P_2}\,,$$

und damit, mit dem Werth (f) selbst und mit der Beachtung, daß aus der Bedingung: $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dz_3}{dt}$ auch $z_3 - \underset{0}{z_3} = x_1$ folgt, geht die Gleichung (c) nach den erforderlichen Reductionen in

$$(P_1 + Q)\, v_1^2 = 2g\, x_1\, [Q - f_1 (P_1 + P_2) - f_2 P_2]$$

über und kommt dadurch mit der Gleichung 12) in §. 98 überein, wenn in dieser die linke Seite mit $v_1 \frac{dt}{dx_1}$ multiplizirt, dadurch t eliminirt und das Ergebniß in Bezug auf x_1 integrirt wird.

Dieses Beispiel und die gleiche Behandlung der in §. 99 aufgelösten Aufgabe, welche dem Leser ernstlich empfohlen sein soll, werden es hinlänglich einleuchtend machen, wie weit man nach der bisherigen Begründung des Lehrsatzes von der Aenderung der lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems von einer klaren Einsicht in die hier obwaltenden Verhältnisse entfernt war, und wie sehr man diesen Lehrsatz für die Anwendung überschätzt hat, da er bei veränderlichen Systemen nur dann allein und unmittelbar angewendet werden kann, wenn die Verbindungen der einzelnen Punkte oder Theile des Systems der Art sind, daß aus der Bewegung eines Punktes die Bewegungen aller übrigen Punkte im Voraus gefolgert werden können (wie dieß bei den Maschinen meistens der Fall ist), und wenn keine unbekannten innern Kräfte, welche sich mit der Bewegung ändern oder von ihr abhängen (wie die Reibung und die Spannungen elastischer Federn oder Bänder) darin vorkommen, also überhaupt, wenn der nur auf äußere Kräfte beschränkte analytische Ausdruck (208) jenes Lehrsatzes anwendbar ist. In allen andern Fällen müssen die Gleichungen für die Bewegungen der einzelnen Punkte oder Theile des Systems zu Hülfe genommen werden; und in den Fällen, wo die Reibung zu berücksichtigen ist, können nur diese darüber belehren, unter welchen Verhältnissen oder Bedingungen die eine oder die andere von mehreren möglichen Bewegungen eintreten wird. Endlich ist leicht zu sehen, daß aus diesen Gleichungen für die Bewegungen der einzelnen Punkte oder Theile des Systems in jedem gegebenen Falle der Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft des ganzen Systems unmittelbar abgeleitet werden kann, wie es z. B. in §. 54 für ein Planetensystem geschehen ist, aber nicht umgekehrt jene aus diesem; es sind demnach jene Gleichungen die allgemeinen, und der Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft nur eine Folgerung aus ihnen, aber eine Folgerung, welche aus ihnen in allen Fällen, wie auch das System beschaffen sein mag, gezogen werden kann.

§. 115.

Aus dem Lehrsatz (207) lassen sich, wie bei dem materiellen Punkte oder einem festen System, folgende allgemeine Schlüsse ziehen:

1) Wenn die äußern und innern Kräfte alle von der Art sind, daß sich die Integrale auf der rechten Seite allgemein herstellen lassen, daß man also hat

$$\int_{\underset{0}{s_i}}^{s_i} ds_i \left(X_i \frac{dx_i}{ds_i} + Y_i \frac{dy_i}{ds_i} + Z_i \frac{dz_i}{ds_i} \right) = F_i(x_i, y_i, z_i) - F_i(\underset{0}{x_i}, \underset{0}{y_i}, \underset{0}{z_i}),$$

$$\int_{\underset{0}{s_i}}^{s_i} ds_i \, . \, J_{h,k} \left[\left(\frac{dx_h}{ds_h} \cos\alpha_{h,k} + \frac{dy_h}{ds_h} \cos\beta_{h,k} + \frac{dz_h}{ds_h} \cos\gamma_{h,k} \right) \frac{ds_h}{ds} \right.$$
$$\left. - \left(\frac{dx_k}{ds_k} \cos\alpha_{h,k} + \frac{dy_k}{ds_k} \cos\beta_{h,k} + \frac{dz_k}{ds_k} \cos\gamma_{h,k} \right) \frac{ds_k}{ds} \right]$$
$$= f_{h,k}(x_h - x_k, y_h - y_k, z_h - z_k) - f_{h,k}(\underset{0}{x_h} - \underset{0}{x_k}, \underset{0}{y_h} - \underset{0}{y_k}, \underset{0}{z_h} - \underset{0}{z_k}),$$

so erhält man aus der Gleichung (207) das allgemeine Gesetz:

(209.

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} . \, m_i (v_i^2 - \underset{0}{v_i}^2) &= 2 \sum_{i=1}^{i=n} . \left[F_i(x_i, y_i, z_i) - F_i(\underset{0}{x_i}, \underset{0}{y_i}, \underset{0}{z_i}) \right] \\ &+ 2 \sum_{h=1}^{h=n} . \sum_{k=h+1}^{k=n} . \left[f_{h,k}(x_h - x_k, y_h - y_k, z_h - z_k) - f_{h,k}(\underset{0}{x_h} - \underset{0}{x_k}, \underset{0}{y_h} - \underset{0}{y_k}, \underset{0}{z_h} - \underset{0}{z_k}) \right], \end{aligned}\right\}$$

In diesem Falle hängt also die Aenderung der lebendigen Kraft des Systems nur von der Lage der einzelnen Punkte am Anfang und Ende der Zeit t ab, nicht von den Wegen, welche sie während der Zeit t beschrieben haben; das System erhält demnach immer die anfängliche lebendige Kraft wieder, so oft die einzelnen Punkte in die anfängliche Lage zurückkehren oder überhaupt in eine Lage, für welche $F_i(x_i, y_i, z_i) = F_i(\underset{0}{x_i}, \underset{0}{y_i}, \underset{0}{z_i})$, und $f_{h,k}(x_h - x_k, y_h - y_k, z_h - z_k) = f_{h,k}(\underset{0}{x_h} - \underset{0}{x_k}, \underset{0}{y_h} - \underset{0}{y_k}, \underset{0}{z_h} - \underset{0}{z_k})$ wird. Dieser Satz wird das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft eines Systems genannt.

Nach dem, was in §. 70 des ersten Buches bewiesen wurde, muß die obige Bedingung für die äußern Kräfte erfüllt werden, wenn diese von festen Punkten ausgehen und nur Functionen der Entfernungen der bewegten Punkte von den festen sind, so daß man hat

$$X_i = R_i \frac{x_i - a_i}{r_i}, \quad Y_i = R_i \frac{y_i - b_i}{r_i}, \quad Z_i = R_i \frac{z_i - c_i}{r_i},$$

$$R_i = \varphi_i(r_i),$$

worin r_i die Entfernung $\sqrt{(x_i - a_i)^2 + (y_i - b_i)^2 + (z_i - c_i)^2}$ des bewegten Punktes $x_i\, y_i\, z_i$ von dem festen Punkte $a_i\, b_i\, c_i$ vorstellt; denn es ergibt sich dadurch

$$\int_{s_{i_0}}^{s_i} ds_i \left(X_i \frac{dx_i}{ds_i} + Y_i \frac{dy_i}{ds_i} + Z_i \frac{dz_i}{ds_i} \right) = \int_{s_{i_0}}^{s_i} ds_i \,.\, \varphi(r_i) \frac{dr_i}{ds_i}.$$

Ebenso wird man sich leicht überzeugen, daß die betreffende Bedingung auch für die innern Kräfte erfüllt wird, wenn diese nur Functionen der Entfernungen je zweier Punkte sind, so daß man hat

$$J_{h,k} = \varphi_{h,k}(r_{h,k});$$

denn man hat dann auch

$$r_{h,k}^2 = (x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2 + (z_h - z_k)^2$$

und zieht daraus das Aenderungsgesetz:

$$\frac{dr_{h,k}}{ds} = \frac{x_h - x_k}{r_{h,k}} \left(\frac{dx_h}{ds} - \frac{dx_k}{ds} \right) + \frac{y_h - y_k}{r_{h,k}} \left(\frac{dy_h}{ds} - \frac{dy_k}{ds} \right) + \frac{z_h - z_k}{r_{h,k}} \left(\frac{dz_h}{ds} - \frac{dz_k}{ds} \right);$$

daraus folgt mit der Beachtung, daß

$$\frac{x_h - x_k}{r_{h,k}} = \cos \alpha_{h,k}, \quad \frac{y_h - y_k}{r_{h,k}} = \cos \beta_{h,k}, \quad \frac{z_h - z_k}{r_{h,k}} = \cos \gamma_{h,k}$$

ist, die Beziehung:

$$J_{h,k} \left[\cos \alpha_{h,k} \left(\frac{dx_h}{ds} - \frac{dx_k}{ds} \right) + \cos \beta_{h,k} \left(\frac{dy_h}{ds} - \frac{dy_k}{ds} \right) + \cos \gamma_{h,k} \left(\frac{dz_h}{ds} - \frac{dz_k}{ds} \right) \right]$$

$$= J_{h,k} \frac{dr_{h,k}}{ds},$$

welche mit der Gleichung (207^b) verglichen zeigt, daß die Arbeit einer solchen innern Kraft durch das formelle Integral:

$$\int_{s_0}^{s} ds \,.\, \varphi_{h,k}(r_{h,k}) \frac{dr_{h,k}}{ds}$$

ausgedrückt werden kann und daher nach ausgeführter Integration eine Function von $r_{h,k}$ werden muß.

Wenn demnach an dem System nur äußere und innere Kräfte von der vorher angegebenen Art thätig sind, und noch solche, für welche das Aenderungsgesetz der Arbeit immer Null bleibt, so kommt die Gleichung (207) nach ausgeführter Integration der rechten Seite auf die Form:

$$\sum_{i=1}^{i=n} . m_i (v_i^2 - \underset{0}{v_i^2}) = 2 \sum_{i=1}^{i=n} . [\Phi_i (r_i) - \Phi_i (\underset{0}{r_i})]$$
$$+ 2 \sum_{h=1}^{h=n} . \sum_{k=h+1}^{k=n} . [\Phi_{h,k} (r_{h,k}) - \Phi_{h,k} (\underset{0}{r_{h,k}})]$$

zurück, welche nach Einführung der Werthe für r_i und $r_{h,k}$ mit der Gleichung (209) übereinstimmt.

2) Wenn für besondere Lagen und Gestaltungen des Systems die lebendige Kraft desselben einen größten oder kleinsten Werth erreicht, so muß man für diese haben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d . \sum_{i=1}^{i=n} . m_i v_i^2}{d s_i} \frac{d s_i}{d s} = 0 = \sum_{i=1}^{i=n} . \left(X_i \frac{d x_i}{d s_i} + Y_i \frac{d y_i}{d s_i} + Z_i \frac{d z_i}{d s_i}\right) \frac{d s_i}{d s} \\ &+ \sum_{h=1}^{h=n} . \sum_{k=h+1}^{k=n} . J_{h,k} \left[\cos \alpha_{h,k} \left(\frac{d x_h}{d s} - \frac{d x_k}{d s}\right) + \cos \beta_{h,k} \left(\frac{d y_h}{d s} - \frac{d y_k}{d s}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \cos \gamma_{h,k} \left(\frac{d z_h}{d s} - \frac{d z_k}{d s}\right)\right]; \end{aligned}\right\} (210)$$

ein größter oder kleinster Werth der lebendigen Kraft kann demnach nur in solchen Lagen und für solche inneren Gestaltungen des Systems statthaben, für welche sich entweder alle äußern und innern Kräfte das Gleichgewicht halten, oder alle normal zu der Bewegung ihrer Angriffspunkte gerichtet sind, oder für welche bei dem einen Theil dieser Kräfte der eine, bei dem andern der zweite Umstand stattfindet.

Der umgekehrte Satz muß zwar nicht nothwendig eintreffen; es wird aber in den meisten Fällen, namentlich in denjenigen, wo die lebendige Kraft eines Systems fortwährend ab- und zunimmt, ein größter oder ein kleinster Werth der lebendigen Kraft in solchen Lagen und Gestaltungen statthaben, für welche die vorherbemerkten Umstände in Bezug auf die innern und äußern Kräfte eintreten.

3) Wenn die Kräfte, welche normal zur Bewegung ihrer Angriffspunkte gerichtet sind, nur in Widerständen fester Curven oder Flächen

bestehen, so wird das System ohne anfängliche Geschwindigkeiten in jeder der vorhergenannten Lagen und Gestaltungen im Gleichgewichte bleiben, und dieses wird offenbar ein stabiles sein, wenn das System beim Durchgange durch die betreffende Lage eine größte lebendige Kraft erhalten würde, und ein labiles, wenn diese lebendige Kraft daselbst einen kleinsten Werth erreicht. Denn in beiden Fällen müssen die Kräfte, welche zu überwiegen anfangen, wenn das System etwas aus dem Gleichgewichtszustande entfernt wird, dahinwirken, die lebendige Kraft desselben zu vermehren, es also demjenigen Zustande zu nähern, wo diese lebendige Kraft die größte werden kann. Wenn demnach jener Gleichgewichtszustand, aus welchem das System etwas verrückt wurde, der Zustand für die größte lebendige Kraft war, so müssen die überwiegenden Kräfte dasselbe in diesen Zustand zurückführen; dieser Zustand wird folglich stabil sein. War es dagegen der Zustand der kleinsten lebendigen Kraft, so wird das System nach einer kleinen Verrückung, immer mehr davon entfernt und wieder dem Zustande der größten lebendigen Kraft genähert werden müssen; jener Zustand wird daher nur ein augenblicklicher, vorübergehender oder labiler sein können.

4) Halten sich endlich die innern und äußern Kräfte fortwährend das Gleichgewicht, oder sind sie fortwährend normal zu den Bewegungsrichtungen ihrer Angriffspunkte, besteht also die Gleichung (210) nicht nur für besondere Lagen und Gestalten des Systems, sondern für eine stetige Folge solcher Lagen und Gestalten, so hat man auch für irgend einen dieser Zustände die Gleichung:

$$211.)\left\{\begin{array}{l}\overset{i=n}{\underset{i=1}{\Sigma}}.\,m_i(v_i^2-\underset{0}{v_i^2})=0=2\overset{i=n}{\underset{i=1}{\Sigma}}.\int_{s_0}^{s}ds\left(X_i\frac{dx_i}{ds_i}+Y_i\frac{dy_i}{ds_i}+Z_i\frac{dz_i}{ds_i}\right)\frac{ds_i}{ds}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad + \text{etc.}\,,\end{array}\right.$$

wenn sich $\underset{0}{v_i}$ und s_0 auf einen vorangehenden gleichen Zustand beziehen.

Für alle diese Zustände bleibt demnach die lebendige Kraft des Systems oder die Geschwindigkeit eines jeden Theiles oder Punktes desselben ungeändert, und das System befindet sich im weitesten Sinne genommen im Zustande des Gleichgewichtes.

§. 116.

Für ein stetiges veränderliches System geht der Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft aus der Gleichung (78) hervor, wenn man diese zuerst auf die ursprüngliche Form bringt:

$$\left\{\begin{aligned} q\,\frac{d.u_x}{dt} &= q\,X + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} \\ q\,\frac{d.u_y}{dt} &= q\,Y + \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} \\ q\,\frac{d.u_z}{dt} &= q\,Z + \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z} \end{aligned}\right\},$$

und sie der Reihe nach auf der linken Seite mit $\frac{u_x}{v}$, $\frac{u_y}{v}$, $\frac{u_z}{v}$ multiplicirt, auf der rechten Seite dagegen mit $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, indem man unter s eine solche Veränderliche versteht, daß man hat $\frac{ds}{dt} = v$. Man wird so, und zwar sowohl unter der obigen Form der Änderungsgesetze $\frac{d.u_x}{dt}$, u. s. f. als unter der entwickelten:

$$\frac{d.u_x}{dt} = \frac{du_x}{dt} + u_x\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\,\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\,\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

u. s. f.

für die Summe der linken Seiten den Werth: $\frac{1}{2}\,q\,\frac{d.v^2}{ds}$ finden und demnach für die Summe beider Seiten der genannten Producte die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\,q\,\frac{d.v^2}{ds} = \left\{\begin{aligned} & q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right) \\ & + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x}\frac{dz}{ds} \\ & + \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y}\frac{dz}{ds} \\ & + \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\}. \quad \text{(A.}$$

erhalten, deren Integral in Bezug auf s die Aenderung der geometrischen lebendigen Kraft eines beliebigen Punktes x y z des Systems vorstellt, eigentlich aber als Aenderungsgesetz dritter Ordnung der Aenderung der lebendigen Krafe des ganzen Systems in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung der Begrenzung des Systems parallel zu den drei Coordinatenebenen zu betrachten ist. Für die Berechnung der geometrischen lebendigen Kraft eines Punktes wird man im Allgemeinen am besten die aus der Gleichung (A) unmittelbar hervorgehende Form anwenden, d. h. den Ausdruck:

212.)

$$q\,(v^2-v_0^2)=\left\{\begin{aligned}
&2\int_0^s ds\,.\,q\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)\\
&+2\int_0^s ds\,.\left(\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x}\frac{dz}{ds}\right)\\
&+2\int_0^s ds\,.\left(\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y}\frac{dz}{ds}\right)\\
&+2\int_0^s ds\,.\left(\frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)
\end{aligned}\right\}$$

worin v_0 die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes am Anfang der Zeit t oder für den Anfang der Veränderlichen s bedeutet, indem man t und s miteinander anfangen läßt. Für die Berechnung der lebendigen Kraft des ganzen Systems dagegen kann man der Gleichung (A) wieder wie in §. 115 die Form geben:

$$\frac{1}{2}\, q\, \frac{d\,.\,v^2}{ds} = \left\{ \begin{array}{l} q \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \\ + \dfrac{\delta\,.\left(T^{(x)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(x)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(x)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta x} \\ + \dfrac{\delta\,.\left(T^{(y)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(y)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(y)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta y} \\ + \dfrac{\delta\,.\left(T^{(z)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(z)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(z)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta z} \end{array} \right\} \quad \text{(B.}$$

und daraus in Bezug auf s das Integral ziehen:

$$q\,(v^2 - v_0{}^2) = \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_0^s ds\,.\,q \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \\ + 2\, \dfrac{\delta\,.\int_0^s ds \left(T^{(x)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(x)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(x)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta x} \\ + 2\, \dfrac{\delta\,.\int_0^s ds \left(T^{(y)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(y)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(y)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta y} \\ + 2\, \dfrac{\delta\,.\int_0^s ds \left(T^{(z)}_x \frac{dx}{ds} + T^{(z)}_y \frac{dy}{ds} + T^{(z)}_z \frac{dz}{ds} \right)}{\delta z} \end{array} \right\}, \quad \text{(212}^b\text{.}$$

welches in Bezug auf x, y und z zwischen den Grenzen des Systems integrirt für die lebendige Kraft desselben den Ausdruck gibt:

$$213.)\quad \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z \,.\, q\,(v^2 - v_0{}^2)$$

$$= 2\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\int_0^s ds \,.\, q\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)$$

$$+ 2\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^s ds\left(T_x^{(x)}\frac{dx}{ds} + T_y^{(x)}\frac{dy}{ds} + T_z^{(x)}\frac{dz}{ds}\right)\\ \displaystyle -\int_0^s ds\left(T_{0x}^{(x)}\frac{dx_0}{ds} + T_{0y}^{(x)}\frac{dy_0}{ds} + T_{0z}^{(x)}\frac{dz_0}{ds}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ 2\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^s ds\left(T_x^{(y)}\frac{dx}{ds} + T_y^{(y)}\frac{dy}{ds} + T_z^{(y)}\frac{dz}{ds}\right)\\ \displaystyle -\int_0^s ds\left(T_{0x}^{(y)}\frac{dx_0}{ds} + T_{0y}^{(y)}\frac{dy_0}{ds} + T_{0z}^{(y)}\frac{dz_0}{ds}\right)\end{array}\right\}$$

$$+ 2\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^s ds\left(T_x^{(z)}\frac{dx}{ds} + T_y^{(z)}\frac{dy}{ds} + T_z^{(z)}\frac{dz}{ds}\right)\\ \displaystyle -\int_0^s ds\left(T_{0x}^{(z)}\frac{dx_0}{ds} + T_{0y}^{(z)}\frac{dy_0}{ds} + T_{0z}^{(z)}\frac{dz_0}{ds}\right)\end{array}\right\},$$

worin sich die Spannungen $T_{0x}^{(x)}$, $T_{0y}^{(x)}$, u. s. f. wie die Aenderungsgesetze $\frac{dx_0}{ds}$, $\frac{dy_0}{ds}$, u. s. f. auf die Grenze $x_0\, y_0\, z_0$ des Systems beziehen. Dieser Ausdruck dürfte aber kaum eine beachtenswerthe Anwendung finden, da es von ebenso geringem Interesse ist, die lebendige Kraft eines in innerer Bewegung begriffenen stetigen Systems zu kennen, wie die eines nicht stetigen Systems, dessen Theile nicht in materieller Verbindung stehen, z. B. die eines Planetensystems. Ich werde deßhalb auch nicht weiter auf die besondern Formen eingehen, welche die vorhergehende Gleichung für stetige Systeme annimmt, die als materielle Flächen und Linien

betrachtet werden können, und will nur noch bemerken, daß aus dieser Gleichung der Ausdruck für die Aenderung der lebendigen Kraft eines stetigen festen Systems hervorgeht, und zwar dadurch, daß für ein solches die drei letzten Doppel=Integrale Null werden. Man wird die linke Seite der so reduzirten Gleichung:

$$\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.q(v^2-v_0^2)=2\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\int_0^s ds.q\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)$$

durch die in §. 207 des zweiten Buches angewendete Umwandlung der Coordinaten x, y und z in $\mathbf{X}+x_{,}$, $\mathbf{Y}+y_{,}$, $\mathbf{Z}+z_{,}$ (worin $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der Masse bedeuten und $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die eines beliebigen Punktes in Bezug auf ein zu den festen Achsen paralleles System, dessen Anfangspunkt dieser Mittelpunkt ist) leicht auf die Form:

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}^2-\mathbf{v}_0^2)+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q\,(u^2-u_0^2)$$

$$=2\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\int_0^s\delta s\,.\,q\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)$$

bringen, unter welcher sie der dortigen Gleichung (141) entspricht, und man wird dann dem zweiten Glied der linken Seite mit Berücksichtigung der Untersuchungen in §. 186 des zweiten Buches die Form:

$$\varphi^2\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.qw^2-\varphi_0^2\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.qw_0^2 \text{ oder } \mathfrak{M}\varphi^2-\mathfrak{M}_0\varphi_0^2$$

geben, worin $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_0$ die Massenmomente, φ und φ_0 die Winkelgeschwindigkeiten des Systems in Bezug auf die augenblickliche Drehungsachse im Mittelpunkt der Masse am Anfang und Ende der Zeit t sind. Man erhält so den allgemeinen Ausdruck:

$$\mathbf{M}(\mathbf{v}^2-\mathbf{v}_0^2)+\mathfrak{M}\,\varphi^2-\mathfrak{M}_0\,\varphi_0^2 \tag{214.}$$

$$=2\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\int_0^s\delta s\,.\,q\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)$$

für die Aenderung der lebendigen Kraft eines stetigen festen Systems, wenn dasselbe ganz frei oder bei einer Beschränkung seiner Bewegung keiner Reibung unterworfen ist.

§. 115.

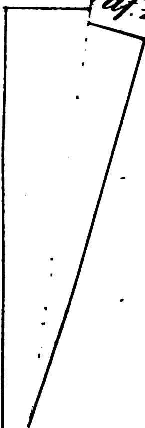
Schließlich haben wir noch eines andern Lehrsatzes zu erwähn welcher sich auf den äußern und innern Zustand eines Systems zugl bezieht, nämlich des Princips von der kleinsten Wirku welches wir im ersten Buch, §§. 110 und 111 für einen materie Punkt kennen gelernt haben, welches aber bei einem beliebigen Sy von Punkten noch viel weniger Anwendung findet als das Princip der Aenderung der lebendigen Kraft und eigentlich nur noch ein hi sches Interesse hat. Ich begnüge mich daher mit der Bemerkung, jener Lehrsatz ohnehin schon einer größern Beschränkung unterworf als der zuletzt genannte Satz, und daß man ihn daher auch n solchen Systemen für anwendbar erklärt hat, bei welchen die Beding gleichungen für die Verbindungen der einzelnen Theile die Zeit explicite enthalten, und verweise im Uebrigen Diejenigen, welc mit diesem Satz bekannt machen wollen, auf die mehrfach angef Werke von Poisson und Duhamel.

Taf. 1.

für die Aenderung der lebendigen Kraft eines stetigen festen Systems, wenn dasselbe ganz frei oder bei einer Beschränkung seiner Bewegung keiner Reibung unterworfen ist.

§. 115.

Schließlich haben wir noch eines andern Lehrsatzes zu erwähnen, welcher sich auf den äußern und innern Zustand eines Systems zugleich bezieht, nämlich des Princips von der kleinsten Wirkung, welches wir im ersten Buch, §§. 110 und 111 für einen materiellen Punkt kennen gelernt haben, welches aber bei einem beliebigen System von Punkten noch viel weniger Anwendung findet als das Princip von der Aenderung der lebendigen Kraft und eigentlich nur noch ein historisches Interesse hat. Ich begnüge mich daher mit der Bemerkung, daß jener Lehrsatz ohnehin schon einer größern Beschränkung unterworfen ist, als der zuletzt genannte Satz, und daß man ihn daher auch nur bei solchen Systemen für anwendbar erklärt hat, bei welchen die Bedingungsgleichungen für die Verbindungen der einzelnen Theile die Zeit nicht explicite enthalten, und verweise im Uebrigen Diejenigen, welche sich mit diesem Satz bekannt machen wollen, auf die mehrfach angeführten Werke von Poisson und Duhamel.


Taf. 1.

ne, 2.

Taf. 3.

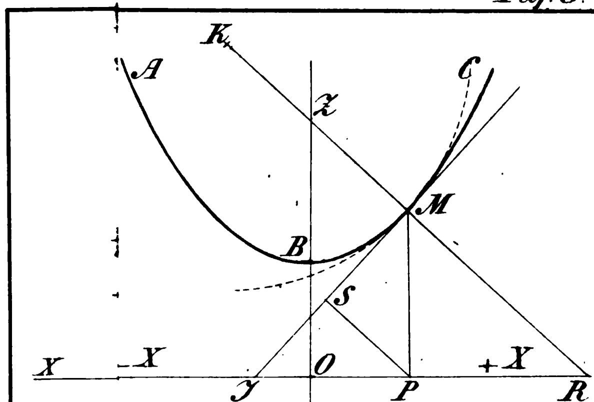
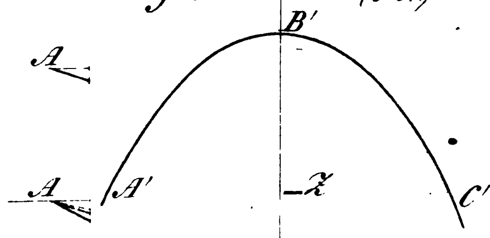


Fig. 20. (§ 67.)



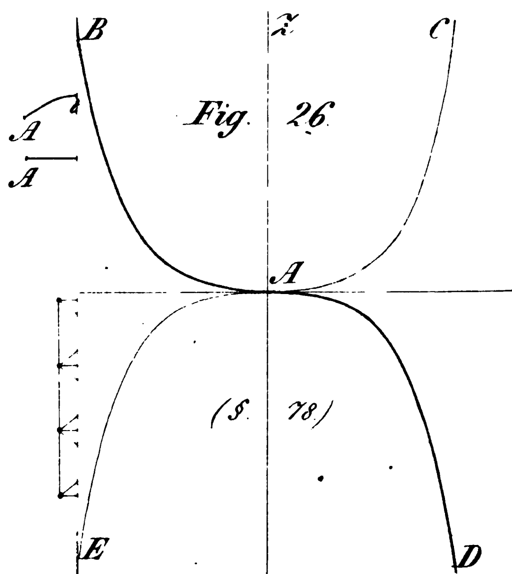
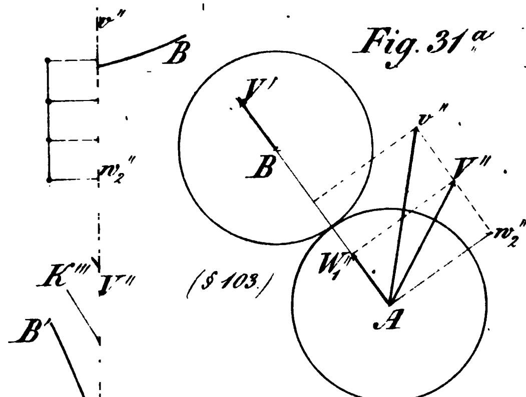
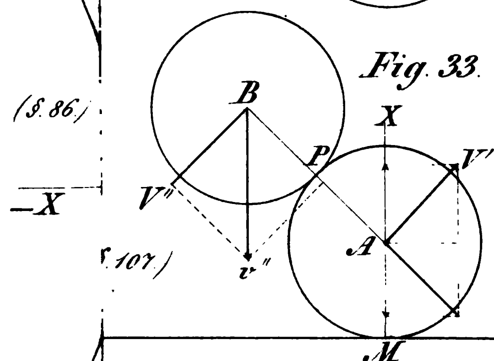
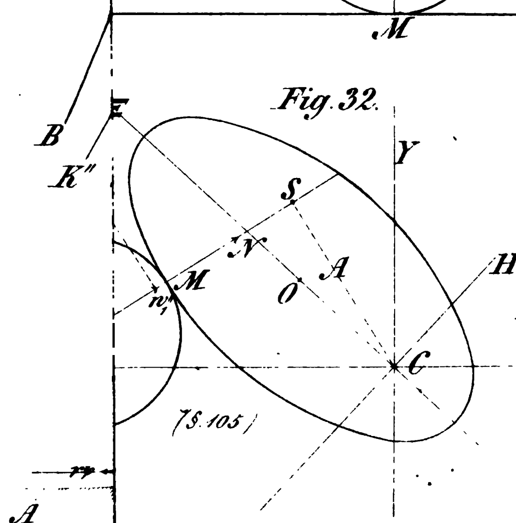


Fig. 26.

Decher,


Fig. 31a
V'
B
v''
V''
w2''
W1''
A
(§ 103.)
B
K'''
B'


Fig. 33.
B
X
P
V'
V''
A
v''
M
(§. 86.)
-X
(§. 107.)


Fig. 32.
Y
S
N
A
O
M
H
C
B
K''
w1
(§. 105.)
A